Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Fünfter Band.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1896,
die auf der Versammlung in Frankfurt a. M. gehaltenen Vorträge,

sowie:

Die Entwickelung der synthetischen Geometrie.

I. Teil: Von Monge bis auf Staudt, 1847.

Bericht von Ernst Kötter in Aachen.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

A. Wangerin
in Halle a. S.

A. Gutzmer
in Jena.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1901.

Terra fennica
(V. ii. 2.)

Inhalt.

Erstes Heft.

I. Chronik der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

II. Bericht über die wissenschaftlichen Sitzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung während der Jahres-Versammlung zu Frankfurt a. M.

Zweites Heft.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Fünfter Band. Erstes Heft.
1896.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1896,
sowie
kurze Berichte über die auf der Versammlung in Frankfurt a. M.
gehaltenen Vorträge.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

A. Wangerin
in Halle a. S.

A. Gutzmer
in Halle a. S.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1897.

Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Heften bestehenden Bandes. Das zweite Heft, enthaltend einen ausführlichen Bericht über die Entwickelung der synthetischen Geometrie von E. Kötter, Aachen, erscheint im Juni d. J.

Neuester Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

1896. 1897.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

Bobek, Dr. **Karl,** Einleitung in die projektivische Geometrie der Ebene. Ein Lehrbuch für höhere Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Nach Vorträgen des Herrn C. Küpper. Mit 96 Textfiguren. 2., wohlfeile Ausgabe. [VI u. 210 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 2.—

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 3 Bände. III. (Schlufs-)Band. 3 Abt. II. Abt. Die Zeit von 1700 bis 1726. Mit 30 Fig. im Text. [472 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 6.—

Cranz, Prof. Dr. **Carl,** Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Docent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademieen; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 20.—

Föppl, Dr. **A.,** Prof. der Mechanik an der Technischen Hochschule zu München, die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verf. über die Maxwell'sche Theorie der Elektricität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 3.60.

Frischauf, Dr. **Johannes,** Professor an der Universität Graz, Vorlesungen über Kreis- und Kugel-Functionen-Reihen. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 2.—

Girndt, Martin, Königl. Baugewerkschul-Lehrer, Raumlehre für Baugewerkschulen und verwandte gewerbliche Lehranstalten. In 2 Teilen. II. Teil: Körperlehre. Mit 64 Textfiguren. [VIII u. 55 S.] gr. 8. 1897. kart. n. *M.* 1.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. II. Theil: die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 16.—

Gundelfinger, Dr. **Sigmund,** Prof. an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. [IV u. 15 S.] 4. 1897. Steif geh. n. *M.* 1.40.

Holzmüller, Prof. Dr. **Gustav,** Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen i. W., Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. In zwei Teilen. I. Teil. Mit 287 Figuren und zahlreichen Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] gr. 8. 1897. In Leinw. geb. n. *M.* 5.—

Chronik

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung zu Frankfurt a. M.

Am 21. bis 26. September 1896.

Die diesjährige Jahresversammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand in Gemeinschaft mit der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte zu Frankfurt a. M. statt, und es hatten sich gegen 60 Mathematiker aus Deutschland, Österreich und der Schweiz mit einigen Fachgenossen aus Belgien und Amerika in der alten, für derartige Zusammenkünfte günstig gelegenen Kaiserstadt zu wissenschaftlichem Gedankenaustausch vereinigt.

Nachdem der Einführende der Abteilung für Mathematik, Herr Rausenberger, die Erschienenen bewillkommnet hatte, richtete der Vorsitzende der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Herr A. Brill, einige Worte der Begrüfsung an die Mitglieder derselben und widmete den im Laufe des Jahres verstorbenen Mitgliedern L. von Seidel in München und Chr. Wiener in Karlsruhe Worte des Gedächtnisses.

In den wissenschaftlichen Sitzungen ist eine ungewöhnlich grofse Zahl von Vorträgen gehalten worden, deren Titel in der folgenden Zusammenstellung vereinigt sind. Die Referate über dieselben gelangen, soweit sie von Mitgliedern der Vereinigung gehalten und der Redactionscommission zugekommen sind, im zweiten Teile dieses Jahresberichts zur Veröffentlichung.

Liste der gehaltenen Vorträge:

1. A. Brill (Tübingen): Die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren.
2. R. Fricke (Braunschweig): Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen.
3. F. Klein (Göttingen): Über einen Satz aus der Theorie der endlichen (discontinuirlichen) Gruppen linearer Substitutionen beliebig vieler Veränderlichen.
4. G. Kohn (Wien): Über eine geometrische Deutung der Invarianten doppelt binärer Formen.
5. G. Landsberg (Heidelberg): Über eine specielle Art räumlicher Abbildungen.
6. Fr. Meyer (Clausthal): Über volle Systeme in der Trigonometrie.
7. R. Haufsner (Würzburg): Über das Goldbach'sche Gesetz.
8. L. Heffter (Giefsen): Über Nachbarconfigurationen, Tripelsysteme und metacyklische Gruppen.

9. M. Noether (Erlangen): Continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen.
10. Rogel (Barmen): Über die Vieldeutigkeit trigonometrischer Entwickelungen innerhalb gewisser Grenzen.
11. Schapira (Heidelberg): Über ein cribrum algebraicum oder die cofunctionale Entstehung der Primzahlen.
12. F. Schilling (Aachen): Über Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt.
13. Schoenflies (Göttingen): Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie.
14. Study (Bonn): Das Apollonische Problem.
15. E. Schröder (Karlsruhe): Über G. Cantor'sche Sätze.
16. Hagen (Washington): Bericht über ein Verzeichnis der Werke von Leonhard Euler.
17. K. Rohn (Dresden): Bestimmung der Constantenzahl bei Raumcurven.
18. Steinitz (Berlin): Homogene Congruenzen.
19. J. Franz (Königsberg i. Pr.): Lineare Differentialgleichungen mit absolutem Gliede.
20. F. Klein (Göttingen): Über die analytische Darstellung der Rotationen bei Problemen der Mechanik.
21. Henneberg (Darmstadt): Zur Hydrostatik.
22. Fr. Meyer (Clausthal): Über Kraftwirkungen bei Drillingsmaschinen.
23. Schwalbe (Berlin): Über die Vorbildung der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Unterrichtsanstalten den Forderungen der heutigen Zeit gegenüber.
24. W. Dyck (München): Über die Beschlüsse der internationalen Catalog-Conferenz zu London im Juli d. J.
25. K. Heun (Berlin): Über die mathematischen und mechanischen Principien in Anwendung auf die technischen Probleme.
26. F. S. Archenhold (Berlin): Photographien des grofsen Fernrohrs (70 cm Öffnung, 21 m Brennweite) der Treptower Sternwarte.
27. H. Burkhardt (Göttingen): Über Vectoranalysis.
28. Israel-Holtzwart (Frankfurt a. M.): Vorschlag zu einer Vervollständigung der intuitiven mathematischen Darstellungsmittel.
29. F. Höffler (Zürich): Über eine Methode der gleichzeitigen Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichtes und der Geschwindigkeit des Sonnensystems im Raume.
30. G. Mie (Karlsruhe): Über die Energiewanderung im elektromagnetischen Felde.
31. W. A. Nippoldt (Frankfurt a. M.): Vorschläge zur Erzielung eines möglichst vollkommenen Isochronismus von Uhrpendeln durch verschiedene einfache Compensationen.
32. O. Rausenberger (Frankfurt a. M.): Die Unstetigkeiten der Flüssigkeitsbewegungen.
33. Schütz (Göttingen): Lösung der Randwertaufgabe für das Beugungsbild von Röntgen-Strahlen.
34. E. Wiechert (Königsberg i. Pr.): Über die Massenverteilung im Innern der Erde.
35. H. Wiener (Darmstadt): Demonstration von Modellen des mathematischen Cabinets der Technischen Hochschule zu Darmstadt.

Von diesen Vorträgen wurden die ersten 22 in den Fachsitzungen, der letzte bei Besichtigung der Technischen Hochschule in Darmstadt, die übrigen in zwei gemeinschaftlichen Sitzungen mit

den Abteilungen für Physik, für Instrumentenkunde und für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gehalten.

Die rege Beteiligung an diesen gemeinsamen Sitzungen verschiedener Abteilungen läfst einerseits erkennen, dafs dieselben einem vorhandenen Bedürfnisse entsprechen, andererseits legt die grofse Zahl der hierfür angemeldeten Vorträge doch den Wunsch nahe, in Zukunft diese gemeinsamen Sitzungen dadurch wirksamer und anregender zu gestalten, dafs in denselben weniger specielle Probleme, als vielmehr und in erster Linie Fragen von allgemeinerem Interesse und von principieller Bedeutung — etwa in Form von Referaten und Correferaten — behandelt werden. Dem Vorstande wurde anheimgegeben, diesem Wunsche in Zukunft nach Möglichkeit Rechnung zu tragen. Auch für die Fachsitzungen der Abteilung bezw. der Vereinigung trat der Wunsch nach Zusammenhang zwischen den Vorträgen zu Tage.

Einen Anfang nach dieser Richtung bildeten diesmal die Vorträge der Herren B. Schwalbe und H. Burkhardt, denen der Vorstand für die Bereitwilligkeit, mit der sie sich ihrer Aufgabe unterzogen haben, zu Dank verpflichtet ist. Diese beiden Vorträge gelangen im zweiten Teil des Jahresberichts vollständig zum Abdruck.

Bei Gelegenheit des Besuches der Technischen Hochschule zu Darmstadt gab Herr F. Klein dem Wunsche Ausdruck, es möchte eine Sammlung kinematischer Modelle publicirt werden, welche für einen mäfsigen Preis in solider, aber nicht luxuriöser Ausstattung die wichtigsten Mechanismen in der Art zur Anschauung brächte, dafs der mathematische Grundgedanke überall deutlich erkennbar hervorträte. Eine solche Sammlung würde insbesondere auch für den Universitätsunterricht ein sehr schätzenswertes Hülfsmittel sein. Bei der Discussion zeigte sich, dafs mehrfach Ansätze in der von Herrn Klein bezeichneten Richtung gemacht worden sind, und dafs es nur an einer systematischen Durchführung mangelt. Die Bedeutung einer derartigen Sammlung kinematischer Modelle wurde allseitig anerkannt.

In Bezug auf die in Aussicht genommenen Referate ist Folgendes zu bemerken.

1. An Stelle des ursprünglich geplanten Referates der Herren Hilbert und Minkowski über den gegenwärtigen Stand der Zahlentheorie ist besonderer Umstände wegen ein Bericht über die Theorie des algebraischen Zahlkörpers von Herrn Hilbert in dem Jahresbericht IV veröffentlicht worden, während Herr Minkowski die Fertigstellung seines Berichtes für einen der nächsten Bände in Aussicht gestellt hat.

2. Herr Czuber, welcher ein Referat über Wahrscheinlichkeitsrechnung übernommen hat, hofft, dasselbe auf der nächsten Versammlung vorlegen zu können.

3. Herr Stäckel hat in Bezug auf den von ihm übernommenen Bericht über Differentialgeometrie der diesjährigen Versammlung nähere Mitteilungen vorlegen lassen und schätzt die zur Fertigstellung des Referates nötige Zeit auf etwa zwei Jahre.

In Vorbereitung befinden sich ferner noch folgende Referate:

4. Wälsch, über Liniengeometrie;

5. Pringsheim, über die Lehre von den unendlichen Reihen.

Aufserdem hat sich

6. Herr Mehmke bereit erklärt, einen Bericht über die graphischen Methoden zu erstatten.

Der gegenwärtige Jahresbericht enthält als gröfseres Referat den ersten Teil des von Herrn E. Kötter übernommenen Berichtes über die Entwickelung der synthetischen Geometrie. Der zweite Teil wird voraussichtlich im Jahresbericht VI zur Veröffentlichung gelangen.

Dem auf früheren Versammlungen wiederholt zum Ausdruck gelangten Wunsche, die Frage der Vorbildung der Lehrer und des Unterrichts auf die Tagesordnung zu setzen, ist diesmal durch den schon erwähnten Vortrag des Herrn Schwalbe genügt worden; der Vorstand wurde von der Versammlung beauftragt, diesen Fragen auch ferner seine Aufmerksamkeit zu widmen.

An Stelle des ursprünglich geplanten mathematischen Lexikons befindet sich eine Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften in Vorbereitung; dieselbe wird mit Unterstützung der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen und der Akademien zu München und Wien im Verlage von B. G. Teubner zu Leipzig erscheinen. Die Redaction des Unternehmens liegt in den Händen der Herren Fr. Meyer (Clausthal) und H. Burkhardt (Zürich). Seitens der von den Akademien niedergesetzten Commission ist Herr H. Weber (Strafsburg i. E.) als Vertreter der Deutschen Mathematiker-Vereinigung cooptirt worden.

Der von verschiedenen Seiten und auch auf den früheren Versammlungen erörterte Plan eines internationalen Mathematiker-Congresses ist inzwischen seiner Verwirklichung näher gerückt. Infolge einer, wohl zuerst von Herrn H. Weber gegebenen Anregung haben sich die Mathematiker Zürichs unter dem Vorsitz des Herrn Geiser zu einem localen Comité constituirt und die Vorbereitung eines internationalen Congresses von Mathematikern übernommen. Ebenso wie sich hervorragende Mathematiker aller Länder

und auch die Société mathématique de France über das Unternehmen günstig geäufsert haben, wurde von den in Frankfurt a. M. versammelten Mitgliedern der Deutschen Mathematiker-Vereinigung die Zustimmung zu dem Congress ausgesprochen. Nach den Mitteilungen des Herrn Rudio (Zürich) auf der Frankfurter Versammlung, welcher namens des Züricher Comités zur Beteiligung an dem Congresse einlud, wird der letztere am 9., 10. und 11. August 1897 in Zürich stattfinden. Das locale Comité wird sich mit einem erweiterten Comité umgeben, welchem namhafte Mathematiker der verschiedenen Länder angehören werden; von deutschen Mathematikern ist Herr Klein (Göttingen) cooptirt worden. Die Einladungen werden nicht an die mathematischen Gesellschaften ergehen, sondern sie werden an die einzelnen Mathematiker persönlich gerichtet werden. Von Seiten der Vereinigung wurde noch nachträglich der Wunsch geäufsert, dafs die wissenschaftlichen Verhandlungen des Congresses nicht aus einer Fülle einzelner specieller Mitteilungen bestehen sollten, sondern dafs möglichst gröfsere Fragen von allgemeinem Interesse zum Gegenstande der Besprechung gewählt werden möchten.

Aus Anlafs des bevorstehenden 80. Geburtstages des Herrn R. Hoppe (Berlin) ermächtigte die Versammlung ihren Vorstand, den Jubilar namens der Vereinigung in angemessener Weise zu begrüfsen. Der Vorsitzende, Herr A. Brill, hat Herrn Hoppe zum 18. November 1896 in einem Schreiben die Glückwünsche der Vereinigung ausgesprochen.

Da die nächste Jahresversammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Braunschweig stattfinden wird, so beschlofs die Vereinigung, im Jahre 1897 ebendaselbst in Verbindung mit der Abteilung für Mathematik und Astronomie die nächste Zusammenkunft abzuhalten.

Geschäftlicher Bericht.

1. Die geschäftlichen Mitteilungen wurden von dem Schrift- und Kassenführer, Herrn Gutzmer, in der Geschäftssitzung der Vereinigung, welche unter dem Vorsitz des Herrn A. Brill am 24. September 1896 in Frankfurt a. M. stattfand, erstattet. Eine Übersicht über die Einnahmen und Ausgaben nach dem Stande vom 31. December 1896 ist unten mitgeteilt.

2. Zu Kassenrevisoren wurden die Herren G. Cantor und H. Grafsmann gewählt. An Stelle der statutengemäfs Ende 1896 ausscheidenden Herren H. Weber und G. von Escherich wurden die Herren G. Hauck (Berlin) und A. Vofs (Würzburg) in den Vorstand gewählt. Beide Herren haben die Wahl angenommen. Der Vorstand der Vereinigung besteht demnach für das Jahr 1897 aus folgenden Herren: A. Brill (97), A. Wangerin (97), F. Klein (98), A. Gutzmer (98), G. Hauck (99), A. Vofs (99); dabei bezeichnen die in Klammern beigefügten Zahlen das Jahr, an dessen Ende der Betreffende statutengemäfs ausscheidet.

3. Die Wahlen innerhalb des Vorstandes haben für das Jahr 1897 zu folgendem Ergebnis geführt:

Herr F. Klein (Göttingen) Vorsitzender;
Herr A. Gutzmer (Halle a. S.) Schrift- und Kassenführer;
Herr A. Wangerin (Halle a. S.) und Herr A. Gutzmer Redactionscommission für den Jahresbericht.

4. Da es nicht möglich war, in der kurzen Frist bis zur Drucklegung dieses Jahresberichtes für sämtliche verstorbenen Mitglieder Nachrufe bezw. Würdigungen ihrer wissenschaftlichen Leistungen zu erlangen, wird der Dahingeschiedenen erst im nächsten Bande ausführlich gedacht werden.

5. Vom vorliegenden Bande an ist der Verlag der Jahresberichte an die Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig übergegangen; dieselbe liefert den Jahresbericht an die Mitglieder zum Buchhändler-Nettopreise.

6. Die Versammlung hat den Beschlufs gefafst, dafs in Zukunft die rückständigen Mitgliederbeiträge unter Zuschlag des Portos durch Postauftrag eingezogen werden sollen, und dafs die Nichteinlösung des Postauftrages die Streichung aus der Mitgliederliste zur Folge haben soll.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. December 1896.

Einnahmen.	ℳ	₰	Ausgaben.	ℳ	₰
Kassenbestand am 1. December 1895 . .	492	96	Drucksachen	42	—
Jahresbeiträge der Mitglieder:			Verschiedenes (Papier, Briefordner u. s. w.)	18	75
2 Nachträge für 1893 . . . . . ℳ 4,00			Postporti	75	—
4 „ „ 1894 . . . . „ 8,00			Angekauft: nom. ℳ 900 3% Reichsanleihe		
34 „ „ 1895 . . . . „ 68,03			(500 à 99,40; 200 à 99,70; 200 à 99,10)	898	50
90 Beiträge für 1896 . . . . . „ 180,21			Barbestand	165	65
11 Vorauszahlungen f. 1897 . . „ 22,00					
5 „ „ 1898 . . „ 10,00					
1 „ „ 1899—1905 „ 14,00	306	24			
11 Ablösungen der Jahresbeiträge	331	20			
Zinsen von ℳ 1800 3% Reichsanleihe 1 Jahr . . . . ℳ 54,00					
Zinsen von ℳ 700 3% Reichsanleihe ½ Jahr . . . . . . „ 10,50	64	50			
Summe	1194	90	Summe	1194	90

Vermögensbestand: nom. ℳ 2700 3% Reichsanleihe im Ankaufswerte von ℳ 2586,40.
Barer Kassenbestand . . . . „ 165,65.

Ausstände: 6 Beiträge für 1893; 9 Beiträge für 1894; 62 Beiträge für 1895; 121 Beiträge für 1896; insgesamt 198 Beiträge à ℳ 2,00 = ℳ 396,00.

A. Gutzmer, als Kassenführer.

G. Cantor, H. Grafsmann, als Revisoren.

Mitglieder-Verzeichnis

nach dem Stande vom 1. März 1897.

Abbe, C., Meteorological Institute, Washington.
Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adami, Reallehrer an der Realschule, Bayreuth.
Amthor, A., Hannover.
Archenhold, F. S., Astronom, Villenkolonie Grunewald bei Berlin.
Bacharach, J., Professor an der Realschule, Nürnberg.
Bauer, G., Professor an der Universität, München, Türkenstr. 29.
Bauschinger, J., Professor an der Universität, Berlin S., Lindenstr. 91.
Beck, A., Professor am Polytechnikum, Riga.
10. Biermann, O., Professor an der technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Falkensteinergasse 5.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Bjerknes, Professor an der Universität, Christiania.
Blaschke, E., Privatdocent an der Universität, Wien XVIII, Gürtelstr. 1.
Bobek, K., Professor an der deutschen Universität, Prag.
Bock, A., Reallehrer an der Realschule, Rothenburg a. d. T.
Böger, R., Oberlehrer an der Realschule, Hamburg, Sophien-Allee 31.
Bohlmann, G., Privatdocent an der Universität, Göttingen, Bertheaustr. 1.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, Wien.
Bolza, O., Professor at the University, Chicago Ill.
20. Braunmühl, A. v., Professor an der technischen Hochschule, München.
Brill, A., Professor an der Universität, Tübingen.
Brückner, Oberlehrer am Real-Gymnasium, Zwickau, Lasaustr. 8.
Brunn, H., Privatdocent an der Universität, München.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig, Sternwarte.
Burkhardt, H., Professor an der Universität, Zürich.
Burmester, L., Professor an der technischen Hochschule, München, Barerstr. 69.
Busche, E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor, G., Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg, Griesbergstr. 15.
30. Carajianides, A., Athen.
Cranz, C., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart, Johannesstrafse 17.
Czuber, E., Professor an der technischen Hochschule, Wien.
Dalwigk, v., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstr. 29.
Dedekind, R., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 87.
Dickstein, S., Professor, Warschau, Marza Tkowskastr. 119.

Dingeldey, F., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 13.
Dobriner, H., Oberlehrer am Philantropin, Frankfurt a. M., Eiserne Hand 18.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München.
40. Doergens, R., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin NW., Spenerstr. 2.
Dyck, W., Professor an der technischen Hochschule, München, Hildegardstr. $1\frac{1}{2}$.
Dziobek, O., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg, Berlinerstr. 55.
Eberhard, V., Professor an der Universität, Halle a. S.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.
Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig, An der Pleifse 5.
Escherich, G. v., Professor an der Universität, Wien IX, Dietrichsteingasse 5.
Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin SO., Elisabeth-Ufer 41.
Fiedler, E., Professor an der Cantonschule, Zürich-Hottingen, Englisches Viertel 37.
Finger, J., Professor an der technischen Hochschule, Wien IV, Alléegasse 35.
50. Fink, K., Professor an der Realschule, Tübingen, Neckarhalde 35.
Finsterwalder, S., Professor an der technischen Hochschule, München, Leopoldstr. 51/0.
Fischer, K., Assistent an der technischen Hochschule, München.
Flatt, R., Privatdocent an der Universität, Basel, Margarethenstr. 77.
Franklin, F., früher Professor an der Johns Hopkins Universität, Baltimore.
Franz, J., Professor an der Universität, Breslau.
Fricke, R., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 17.
Friesendorff, Th., Oberlehrer an der reformirten und an der Katharinenschule, Assistent an der Universität, St. Petersburg, Grofse Podjatscheskaja 23.
Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 70.
Fuchs. L., Professor an der Universität, Berlin NW., Kronprinzen-Ufer 24.
60. Fuhrmann, A., Professor an der technischen Hochschule, Dresden, Circusstr. 39.
Gegenbauer, L., Professor an der Universität, Wien IX, Frankstr. 1.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Graudenz.
Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen.
Godt, W., Oberlehrer am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt, Mühlstrasse 11.
Graf, Professor an der Universität, Bern.
Grafsmann, H., Oberlehrer an der Latina, Halle a. S., Niemeyerstr. 23.
Greenhill, A. G., Professor am Artillery College Woolwich, London W.C. 10 New Inn, Strand.
70. Grübler, M., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg.
Günther, S., Professor an der technischen Hochschule, München, Akademiestr. 5.
Gundelfinger, S., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt, Eichbergstr. 6.
Gutzmer, A., Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Gartenstr. 5.
Haas, K., Gymnasialprofessor, Wien VI, Matrosengasse 8.

Haentzschel, E., Oberlehrer an der dritten Realschule, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Gleditschstr. 43.
Hagen, J., Professor und Director der Sternwarte am Georgetown College, Washington. D. C.
Hamburger, M., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin N., Karlstr. 28.
Hancock, H., Instructor at the University, Chicago Ill.
Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
80. Hauck, G., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Bülowstr. 6.
Hausdorff, Privatdocent an der Universität, Leipzig, Nordstr. 58.
Haufsner, R., Privatdocent an der Universität, Würzburg, Markusstr. 11.
Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Nunnenbeckstr. 19.
Heffter, L., Professor an der Universität, Giefsen, Alicestr. 12.
Helm, G., Professor an der technischen Hochschule, Dresden, Winkelmannstr. 2.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin, Director des geodätischen Instituts, Potsdam.
Henneberg, L., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt, Hochstr. 58.
Henneke, Professor am Gymnasium, Preufsisch-Friedland.
Henrici, O., Professor am City and Guilds of London Institute, London, Exhibition Road.
90. Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstendamm 148.
Hermes, J., Professor am Progymnasium, Königsberg i. Pr.
Hertzer, H., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Frobenstr. 14.
Herz, N., Astronom, Wien XVII, Alsbachstr. 8.
Hefs, E., Professor an der Universität, Marburg, Wörthstr. 24.
Hettner, G., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg, und an der Universität, Berlin W., Kaiserin Augustastr. 58.
Heun, Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin SW., Mittenwalderstrafse 17.
Hilbert, D., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weberstr.
Hölder, O., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Holländer, E., Marine-Oberlehrer auf S. M. Schiff „Stosch".
100. Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin S., Prinzenstr. 69.
Horn, J., Privatdocent an der technischen Hochschule, Charlottenburg, Leibnizstr. 24.
Hofsfeld, C., Oberlehrer am Gymnasium, Eisenach, Rennbahn 4.
Hurwitz, A., Professor am Polytechnikum, Zürich, Falkengasse 15.
Hurwitz, J., Privatdocent an der Universität, Basel, Claragraben 37.
Jahnke, E., Oberlehrer an der achten Realschule, Berlin; Charlottenburg, Kantstr. 24.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg, Papenstr. 56.
Jolles, St., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Halensee bei Berlin, Boothstr. 2.
Joukovsky, N., Professor an der Universität, Moskau.
Jürgens, E., Professor an der technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstr. 49.
110. Junker, F., Reallehrer, Urach (Württemberg).
Kasten, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen, Dechanatstr. 5.
Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, S., Professor an der Universität, Krakau.
Kerschensteiner, G., Stadtschulrat, München, Lilienstr. 66.

Kiepert, L., Professor an der technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstrafse 1 D.
Killing, W., Professor an der Akademie, Münster i. W., Salzstr. 21a.
Kleiber, J., Hauptlehrer an der Handelsschule, München.
Klein, F., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm-Weberstr. 3.
Klein, G., Rector des Realgymnasiums, München.
120. Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat, Kastanien-Allée 9.
Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin W., Karlsbad 12.
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg, Theaterstr. 18.
König, J., Professor an der technischen Hochule, Budapest.
Königsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstrafse.
Köpke, A., Oberlehrer an der Realschule, Ottensen, Holländische Reihe 4.
Kötter, E., Professor an der technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstrafse 42.
Kötter, F., Professor an der Berg-Akademie, Berlin S., Annenstr. 1.
Kohn, G., Professor an der Universität, Wien, Schottenring 15.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
130. Kraft, F., Privatdocent am eidgen. Polytechnikum, Zürich III., Aufsersihl.
Krause, M., Professor an der technischen Hochschule, Dresden, Kaitzerstrafse 12.
Krazer, A., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Nikolausring 3.
Kühne, H., Gymnasiallehrer, Königsberg i. N.
Kürschak, J., Privatdocent an der technischen Hochschule, Budapest, Albrechtstr. 14.
Kullrich, Oberlehrer des Kadettenkorps, Grofs-Lichterfelde, Margarethenstrafse.
Kutta, M., Assistent an der technischen Hochschule, München.
Lampe, E., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg, Berlin W., Kurfürstenstr. 139.
Landsberg, G., Professor an der Universität, Heidelberg.
Laugel, L., Mitglied der Société Mathématique de France, Châlet des Bruyères, Golfe Jouan, Alpes Maritimes.
140. Lerch, M., Professor an der Universität, Freiburg (Schweiz).
Lie, S., Professor an der Universität, Leipzig, Seeburgstr. 33.
Lilienthal, R. v., Professor an der Akademie, Münster i. W., Wehrstr. 26.
Lindemann, F., Professor an der Universität, München, Georgenstr. 42.
Lipschitz, R., Professor an der Universität, Bonn, Königstr. 34.
Lommel, E. v., Professor an der Universität, München, Hefsstr. 16.
London, F., Professor an der Universität, Breslau.
Lorenz, H., Professor an der Universität, Halle a. S., Mühlweg 26.
Lorey, W., Schulamts-Candidat am Realgymnasium, Leer (Ostfriesland).
Loria, G., Professor an der Universität, Genua.
150. Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
Mandl, M., Lehrer an der Realschule, Profsnitz in Mähren.
Mangoldt, H. v., Professor an der technischen Hochschule, Aachen, Vaelserstr. 148.
Maschke, H., Professor at the University, Chicago Ill.
Mathematischer Verein der Universität Göttingen.
Maurer, L., Professor an der Universität, Strafsburg (vom 1. April 1897 ab: Tübingen).
Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig, Königstr. 1.
Mehmke, R., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart, Immenhoferstr. 4.
Meyer, F., Professor an der Berg-Akademie, Clausthal.
Meyer, G, Lehrer an der Realschule, Bremen, Georgstr. 56.
160. Meyer, G. F., Professor am Realgymnasium, München, Amalienstr. 80,3.

Meyer, Th., Oberlehrer am Gymnasium, Saarbrücken.
Minkowski, H., Professor am Polytechnicum, Zürich.
Moore, E. H., Professor at the University, Chicago Ill.
Müller, E., Wissenschaftlicher Lehrer an der Kgl. Baugewerkschule, Königsberg i. Pr., Dohnastr. 4.
Müller, F., Professor, Oberloschwitz bei Dresden, Heinrichstr. 12.
Müller, Reinh., Professor an der technischen Hochschule, Braunschweig, Hagenstr. 2.
Müller, Rich., Oberlehrer an der Königl. Realschule, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin SW., Wilhelmstr. 40a.
Nath, M., Oberlehrer am Luisen-Gymnasium, Berlin NW., Gerhardtstr. 8.
Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich.
170. Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig, Querstr. 10—12.
Netto, E., Professor an der Universität, Gießen, Süd-Anlage 13.
Noether, M., Professor an der Universität, Erlangen.
Papperitz, E., Professor an der Berg-Akademie, Freiberg i. S., Weisbachstr. 5.
Pasch, M., Professor an der Universität, Gießen.
Pelz, C., Professor an der technischen Hochschule, Prag.
Peschka, A. V., Professor an der technischen Hochschule, Wien III, Joaquingasse 2.
Pick, G., Professor an der Universität, Prag; Kgl. Weinberge, Tylplatz 28.
Piltz, A., Privatdocent an der Universität, Jena.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg.
180. Pockels, F., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Pokrowsky, P., Professor an der Universität, Kiew.
Pringsheim, A., Professor an der Universität, München, Arcisstr. 12.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Rados, G., Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Rausenberger, O., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.
Recknagel, G., Rector des Realgymnasiums, Augsburg.
Reich, K., Diplom. Chemiker, Wien IX, Michelbeurerweg 2.
Reinhardt, C., Oberlehrer an der Fürstenschule, Meißen, Freiheit 16.
Réthy, M., Professor an der technischen Hochschule, Budapest, Soraksárer Gasse 18.
190. Reuschle, C., Professor an der technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstraße 5.
Reye, Th., Professor an der Universität, Straßburg i. E.
Richarz, F., Professor an der Universität, Greifswald.
Richter, Oberlehrer am Gymnasium, Quedlinburg.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Ritter, A., Professor an der technischen Hochschule, Aachen, Kasernenstraße 36.
Rodenberg, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 2.
Rogel, F., Ingenieur, Barmen, Gewerbeschulstr. 2.
Rohn, K., Professor an der technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau, Schweidnitzer Stadtgraben 16b.
200. Rosenow, H., Director der neunten Realschule, Berlin N., Badstr. 22.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich, Feldeggstr. 64.
Runge, C., Professor an der technischen Hochschule, Hannover, Körnerstraße 19a.

Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Schapira, H., Professor an der Universität, Heidelberg.
Scheffers, G., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstr. 8.
Schell, W.. Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe, Lachnerstraße 8.
Schendel, L., Halensee bei Berlin, Hobrechtstr. 16.
210. Schering, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Schilling, C., Professor an der Navigationsschule, Bremen, Im krummen Arm 3.
Schilling, F., Privatdocent an der technischen Hochschule, Aachen, vom 1. April 1897 ab in Karlsruhe.
Schimpf, E., Oberlehrer am Gymnasium, Bochum, Blücherstr. 46.
Schlegel, V., Professor an der Gewerbeschule, Hagen i. W., Volmestr. 62.
Schleiermacher, L., Professor an der Forstschule, Aschaffenburg.
Schlesinger, L., Professor an der Universität, Bonn.
Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden, Liebigstr. 14.
Schmidt, Fr., Baumeister, Budapest V, Rudolfsquai 8.
Schmidt, M., Professor an der technischen Hochschule, München.
220. Schönflies, A., Professor an der Universität, Göttingen, Grüner Weg 4.
Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin; Steglitz, Fichtestr. 34.
Schottky, F., Professor an der Universität, Marburg, Barfüßerthor 14.
Schröder, E., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstr. 9.
Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Sulzbacherstr. 3½.
Schülke, A., Oberlehrer, Osterode i. Ostpr.
Schütz, J. R., Göttingen, Wilhelm-Weberstr. 12. (Vom 1. April 1897 ab: München.)
Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg, Steindamm 107.
Schultz, E., Oberlehrer am Realgymnasium, Stettin, Poelitzerstr. 9.
Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.
230. Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg.
Schur, F., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe, Westendstr. 46.
Schur, W.. Professor an der Universität, Göttingen.
Schwarz, H. A., Professor an der Universität, Berlin; Villenkolonie Grunewald, Boothstr. 33.
Schwatt, J. Professor at the University, Philadelphia Pa.
Schwering, K., Director des Gymnasiums, Düren.
Seeliger, H., Professor an der Universität, München, Sternwarte.
Selivanoff, D., Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116 log. 16.
Servus, H., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der technischen Hochschule, Charlottenburg.
Sidler, G., Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4.
240. Siebert, A., Oberlehrer an der Hauptcadetten-Anstalt, Groß-Lichterfelde, Potsdamerstr. 61.
Sievert, H., Professor am Gymnasium, Bayreuth.
Simon, M., Professor am Lyceum, Straßburg i. E., Lessingstr. 5.
Sommerfeld, A., Privatdocent an der Universität, Göttingen, Friedländerweg 5.
Souslow, Professor an der Universität, Kiew.
Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.
Stäckel, P., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 14.
Stahl, H, Professor an der Universität, Tübingen.

Staude, O., Professor an der Universität, Rostock, St. Georgstr. 38.
Steinitz, E., Charlottenburg, Uhlandstr. 187.
250. Sterneck, R. v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstr. 30.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstrafse 38.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck.
Strafsmann, H. W., Gymnasiallehrer, Berlin SW., Dessauerstr. 36.
Study, E., Professor an der Universität, Greifswald.
Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau, Fränkelplatz 9.
Tauber, A., Privatdocent an der Universität, Wien.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Tötössy, B. v., Professor an der technischen Hochschule, Budapest.
Universitäts-Bibliothek zu Utrecht.
260. Valentin, G., Oberbibliothekar an der Königl. Bibliothek, Berlin W., Burggrafenstr. 6.
Van Vleck, E. B., Professor an der Universität, Middletown, Conn.
Veronese, G., Professor an der Universität, Padua.
Vogel, P., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule München.
Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel, Aeschenvorstadt 72.
Vofs, A., Professor an der Universität, Würzburg, Sanderglacis 31.
Wälsch, E., Professor an der technischen Hochschule, Brünn.
Wallenberg, G., Oberlehrer an der neunten Realschule, Berlin N., Brunnenstr. 120.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle a. S., Burgstr. 35.
270. Wassiljef, Professor an der Universität, Kasan.
Weber, E. v., Privatdocent an der Universität, München, Königinstr. 5/0.
Weber, H., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Goethestr. 27.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich-Hottingen, Gemeindestrafse 40.
Weingarten, J., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Regentenstr. 14.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forst-Akademie, Tharand.
Weifs, W., Privatdocent an der technischen Hochschule, Prag.
Wellmann, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen.
Weltzien, C., Professor an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin; Zehlendorf, Prinz Handjerystr. 3.
Westermann, H. v., Oberlehrer an der Vorschule der technischen Hochschule, Riga.
280. Wiener, H., Professor an der technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 17.
Wiltheifs, E., Professor an der Universität, Halle a. S.
Wirtinger, W., Professor an der Universität, Innsbruck, Museumstr. 10.
Witting, A., Oberlehrer am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Residenzstr. 4.
Wölffing, E., Privatdocent an der technischen Hochschule, Stuttgart, Landhaus Gänsehaide.
Wolf, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
Zahradnik, P., Professor an der Universität, Agram.
Zindler, K., Privatdocent an der technischen Hochschule, Wien.
Ziwet, A., Professor at the University of Michigan, Ann Arbor, Mch.
Zorawski, C. v., Professor an der Universität, Krakau.
290. Zsigmondy, Privatdocent an der Universität, Wien I., Schmerlingplatz 2.
Züge, Oberlehrer am Gymnasium, Wilhelmshaven, Roonstr. 3.

Zum Gedächtnis.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat den Verlust folgender Mitglieder zu beklagen:

Buka, F., Professor an der technischen Hochschule, Charlottenburg.
Meyer, A., Professor an der Universität, Zürich.
Seelhoff, P., früher Lehrer an der Navigationsschule, Bremen.
Seidel, Ph. L. von, Professor an der Universität, München.
Sinram, H. Th., Hamburg.
Weierstraſs, K., Professor an der Universität, Berlin.
Weyer, G. D., Professor an der Universität, Kiel.
Wiener, Chr., Professor an der technischen Hochschule, Karlsruhe.

Die nachstehenden Mitteilungen über den Lebensgang von H. Th. Sinram sind auf Grund der Angaben seiner Angehörigen von Herrn A. Gutzmer zusammengestellt worden. — Durch die Vermittelung von Herrn F. Rudio sind wir ferner in der Lage, einen Nekrolog auf Arnold Meyer aus der Feder des Herrn A. Lang in die Chronik aufnehmen zu können.

Der übrigen verstorbenen Mitglieder wird im nächsten Jahresberichte eingehend gedacht werden.

Heinrich Theodor Sinram.

Am 22. December 1840 zu Hannover geboren und auf der damaligen Bürgerschule daselbst vorgebildet, trat Heinrich Theodor Sinram im Alter von 17 Jahren als Freiwilliger bei der Artillerie ein und besuchte drei Winter hindurch die Unterofficierschule zu Hannover, wo seine Begabung für Mathematik hervortrat. Nach dem Kriege von 1866 fand er Anstellung bei dem städtischen Vermessungsbureau in Hamburg und war später daselbst als Lehrer an der polytechnischen Vorbildungsanstalt von Pape thätig. Im Jahre 1876 begründete Sinram eine eigene „Fachschule für Mathematik, Physik und Zeichnen", die sich eines guten Zuspruchs er-

freute. Zur Vervollkommnung seiner Kenntnisse begab er sich auf ein Jahr nach Göttingen und besuchte hier insbesondere die Vorlesungen von M. A. Stern. Im April 1895 mufste er seine Thätigkeit eines inneren Leidens wegen einstellen, unterzog sich dann einer Operation, an deren Folgen er am 10. September 1895 zu Hamburg verschied. — Sinram hat eine Reihe von Aufsätzen im Archiv der Mathematik und Physik veröffentlicht, die sich auf Fragen der elementaren Geometrie, Algebra und Reihenlehre beziehen.

Arnold Meyer.*)

Von **A. Lang.**

Am 7. Juli 1896 starb in Zürich unser Mitglied Dr. Arnold Meyer, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität. Er war geboren als das älteste von drei Geschwistern den 11. September 1844 in Andelfingen, wo sein Vater Secundarlehrer war. Von 1850 bis 1859 besuchte er zunächst die Primar-, dann die Secundarschule seines Geburtsortes. Frühzeitig erwachte in ihm die Liebe zur Mathematik. Nach Absolvirung der Secundarschule blieb er noch ein Jahr zu Hause, um sich durch Privatstunden und durch Selbststudium auf den Eintritt in die höhere Industrieschule in Zürich vorzubereiten. Nachdem er die Klassen dieser Anstalt durchlaufen und das Zeugnis der Reife erhalten, trat Meyer in die sechste, d. h. die mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung des Polytechnicums ein, an der er sich das Diplom eines Fachlehrers für Mathematik, Physik und Chemie erwarb. Hierauf verbrachte Meyer zwei Jahre in ländlicher Zurückgezogenheit bei seiner Mutter — der Vater war inzwischen gestorben — in Andelfingen, um mit aller Mufse seinen mathematischen Studien obzuliegen. Dann ging er 1866 nach Berlin und 1867 nach Paris. Weierstrafs, Kummer und Hermite waren seine bevorzugten Lehrer; auf die Richtung seiner späteren eigenen Studien hat hauptsächlich Hermite bestimmend eingewirkt. Nach einem kurzen Aufenthalte in England kehrte Meyer in die Heimat zurück, versah 1868—1869 eine Stelle als Verweser an der Industrieschule und dem Gymnasium in Winterthur und habilitirte sich sodann 1870 am eidgenössischen Polytechnicum. 1871 promovirte er bei dem von ihm hochverehrten Schläfli in Bern auf Grund einer Inauguraldissertation, betitelt: „Zur Theorie

---

*) Mit unwesentlichen Änderungen abgedruckt aus dem 42. Bande der von F. Rudio herausgegebenen „Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich“.

der unbestimmten ternären quadratischen Formen". Zu gleicher Zeit übernahm er ein Vicariat in Mathematik an der Zürcher Industrieschule, 1872 wurde er definitiv angestellt und noch im gleichen Jahre zum Prorector, im Herbst 1873 sodann zum Rector der Anstalt ernannt. Ein neues und mehr zusagendes Wirkungsgebiet eröffnete sich ihm, als ihn die Regierung im September 1876 als Ordinarius für Mathematik an die Zürcher Universität berief, an der er mit dem gröfsten Pflichteifer thätig war, bis ihn eine bösartige Krankheit bald nach Beginn des Sommersemesters 1896 auf das letzte Krankenlager warf.

Mit Arnold Meyer schied ein äufserst gewissenhafter, trefflicher Lehrer, ein unermüdlicher Arbeiter und exacter klarer Kopf. Er war ein bescheidener, stiller, sehr zurückhaltender Mann, der sich stets vom öffentlichen Getriebe der Welt und von gesellschaftlichen Zerstreuungen fern hielt. Er hatte keinen Feind, war vielmehr von allen seinen Collegen und Schülern in gleich hohem Mafse geachtet und gewürdigt. Meyer war ein vielseitig gebildeter Mann. Er beherrschte das Französische, Englische und Italienische und war vertraut mit der vornehmsten Litteratur dieser Sprachen. Seinen Lieblingen unter den römischen Klassikern blieb er bis zum Tode treu. Daneben liebte er die Natur, war eifriger, doch nicht fanatischer Bergsteiger. Bewandert auch in allen beschreibenden Naturwissenschaften, beschäftigte er sich im Stillen, fast im Geheimen, mit Naturstudien aller Art, sammelte Käfer, Spinnen, Mineralien und legte sich ein stattliches Herbarium an.

Die vortrefflichen, in ihrer Art mustergültigen mathematischen Untersuchungen Arnold Meyer's bewegen sich auf dem Gebiete der Zahlentheorie.

Durch letztwillige Verfügung vermachte er sein ganzes Vermögen der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section der philosophischen Facultät der Zürcher Hochschule mit der Bestimmung, dafs bei einer etwaigen Auflösung der Facultät das Vermögen in das Eigentum der naturforschenden Gesellschaft in Zürich übergehen müsse.

Verzeichnis der wissenschaftlichen Abhandlungen von Arnold Meyer.

1. **Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen. Dissertation 1871.**
2. **Ein Satz aus der Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 28. Jahrg. 1883.**
3. **Über die Kriterien für die Auflösbarkeit der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 = 0$ in ganzen Zahlen. Daselbst, 29. Jahrg. 1884.**
4. **Über die Auflösung der Gleichung $ax^2 + by^2 + cz^2 + du^2 + ev^2 = 0$ in ganzen Zahlen. Daselbst, 29. Jahrg. 1884.**

5. Über die Klassenanzahl derjenigen ternären quadratischen Formen, durch welche die Null rational darstellbar ist. Crelle's Journal, 98. Bd. 1885.
6. Über eine Eigenschaft der Pell'schen Gleichung. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 32. Jahrg. 1887.
7. Über einen Satz von Dirichlet. Crelle's Journal, 103. Bd. 1888.
8. Zur Theorie der indefiniten ternären quadratischen Formen. Daselbst, 108. Bd. 1891.
9. Über indefinite quadratische Formen. Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, 36. Jahrg. 1891.
10. Note zu der Abhandlung über ternäre Formen im 98. Bande dieses Journals. Crelle's Journal, 112. Bd. 1893.
11—13. Über indefinite ternäre quadratische Formen. Daselbst, 113., 114., 115. Bd. 1894—1895.

Nach dem Tode erschien:

14. Über indefinite ternäre quadratische Formen. Daselbst, 116. Bd. 1896.

Bericht

über die

wissenschaftlichen Sitzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

während der

Jahres-Versammlung zu Frankfurt a. M.

Über die Vorbildung der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften an höheren Unterrichtsanstalten den Forderungen der heutigen Zeit gegenüber.

Von Prof. Dr. **B. Schwalbe** (Berlin).

(Zugleich Berichterstattung über die Beschlüsse, welche der Verein zur Förderung des naturwissenschaftlichen und mathematischen Unterrichts zu Pfingsten dieses Jahres in seiner Versammlung zu Elberfeld gefaſst hat.)

Nur verhältnismäſsig selten sind in den Versammlungen deutscher Naturforscher und Ärzte Fragen zur Erörterung und Darlegung gekommen, welche mit Unterricht und Erziehung in Zusammenhang standen oder unmittelbar Gebiete und Abschnitte daraus behandelten. Es waren stets nur Fragen der Wissenschaft und der ärztlichen Praxis, welche die einzelnen Abteilungen oder die Hauptsitzungen beschäftigten; die Behandlung der wissenschaftlich-unterrichtlichen Gegenstände blieb auf einen kleinen Kreis beschränkt, während diese gewiſs denselben Anspruch auf Wichtigkeit erheben können, wie viele Gebiete des ärztlichen Berufs. Die Versammlungen der jüngeren naturforschenden Gesellschaften, der British Association und der Association française, haben von Anfang an eine andere Richtung gehabt und der Umgestaltung des Unterrichts nach der naturwissenschaftlichen Seite hin seit Jahrzehnten die gröſste Aufmerksamkeit geschenkt. Namentlich war es die britische Naturforscherversammlung, welche in der Erkenntnis, daſs die Fortentwickelung der Naturwissenschaften nur dann von allgemeinem Segen sein kann, wenn diese Wissenschaften auch in der Volkserziehung und Jugendbildung eine den rein linguistischen Fächern gleichwertige Stellung einnehmen, den naturwissenschaftlichen Unterricht zum Gegenstande fortlaufender allgemeiner Berichterstattung gemacht hat. In fast allen Jahrgängen der Reports of the British Association findet sich ein Report: The Teaching of science in Elementary schools, so noch zuletzt in Oxford 1894, in Ipswich 1895, an welchem bedeutende Fachgelehrte (Armstrong, Maskelyne, Thompson etc.) beteiligt sind; ebenso bilden die Fragen der Technical Education einen stehenden Gegenstand der Erörterungen, die auch von den allgemeinwissenschaftlichen Zeitschriften, wie Nature, eifrig gepflegt werden.

Die Versammlung des Jahres 1885 zu Aberdeen lenkte in dieser Beziehung nicht nur die Aufmerksamkeit der zunächst beteiligten Kreise, sondern des ganzen englischen Volkes auf sich. „An eloquent protest against the exclusive system of classical education" wurde die Versammlung von dem Athenaeum genannt. In beredter Ansprache hatte Playfair vor der von 2000—3000 Personen besuchten Versammlung eine Übersicht über die Thätigkeit Englands in Beziehung auf den naturwissenschaftlichen Unterricht und die Bedingungen des Fortschritts des naturwissenschaftlichen Geistes gegeben. Er knüpfte an die Versammlung in Montreal 1884 an, erörterte die grofse Anregung, durch welche die Colonien in wissenschaftlicher Beziehung in geistigem Austausch mit England stehen, und forderte vor allem die Pflege des naturwissenschaftlichen Unterrichts in allen Schulen, indem er die Worte des Prince Consort Albert, gesprochen am 14. September 1859, anführte:

„Gesetzgebung und Staat werden mehr und mehr die Ansprüche der Naturwissenschaften auf Berücksichtigung anerkennen, so dafs die Wissenschaften nicht mehr zu betteln brauchen, sondern sich an sie wie ein geliebtes Kind an den Vater, sicher der väterlichen Fürsorge für ihr Wohlergehen, wenden können; wir haben Grund zu hoffen, dafs der Staat in den Naturwissenschaften eine der Grundlagen für seine Stärke und sein Glück anerkennnen wird, um sie zu pflegen, wie die einfachsten Gesetze der Selbsterhaltung es fordern".

„Die Naturwissenschaften werden mehr dem Namen nach als in Wirklichkeit gelehrt, gründlich und angemessen nur in drei Schulen Grossbritanniens, und England wird bald, wenn den Naturwissenschaften im öffentlichen Unterricht nicht gröfsere Aufmerksamkeit geschenkt wird, von anderen Ländern überholt werden. Die arbeitenden Klassen erhalten jetzt besseren Unterricht in den Naturwissenschaften als die mittleren, denn die für diese bestimmten Schulen haben sich noch nicht den Forderungen des modernen Lebens angepafst und zeigen beklagenswerte Mängel im naturwissenschaftlichen Unterricht (Lubbock). Während 12 bis 16 Stunden den klassischen Sprachen gewidmet werden, betrachtet man in einem grofsen Teile dieser Schulen 2 bis 3 Stunden für die Naturwissenschaften als ausreichend, und in Schottland sind überhaupt nur 6 Schulen, die mehr als 2 naturwissenschaftliche Stunden erteilen. Die alten Traditionen der Erziehung sitzen so fest wie die Bohrmuschel im Felsen, und man könnte fast die Hoffnung auf Änderung aufgeben, da das exclusive System klassischer Erziehung den Angriffen eines Milton, Cowley, Montaigne widerstanden hat. Die öffentliche Meinung mufs dieses System brechen, die Bedürfnisse des modernen Lebens werden auch die Schulen zwingen, sich einem naturwissenschaftlichen Zeitalter anzupassen. Die Grammatikschulen halten sich für unsterblich, aber sie werden schliefslich ihre

Unsterblichkeit bereuen, weil sie dann aufser Berührung mit dem Jahrhundert keine Sympathie und Anpassung mehr besitzen werden."

Vortrefflich widerlegt er dann die Behauptung, dafs die Naturwissenschaften für die Förderung der geistigen Entwickelung ungeeignet seien, und zeigt, wie die Naturwissenschaften alle Zweige der menschlichen Thätigkeit mit einander verbinden. Bei derselben Versammlung wurden in der physikalischen und chemischen Section allgemeine Ansprachen mit denselben Grundgedanken gehalten. Chrystal führte aus, dafs für den Fortschritt in den Naturwissenschaften vor allen Dingen ein naturwissenschaftlich gebildetes Publicum vorhanden sein müsse, ein Publicum, das in höherem oder geringerem Grade naturwissenschaftliche Bildung erhalten habe, nicht, wie in Deutschland, ein professionelles, wo nur ein kleiner bestimmter Kreis von Personen die naturwissenschaftlichen Fragen discutirt und versteht; Armstrong erörterte die Erziehung zur Beobachtung als ein Hauptziel des naturwissenschaftlichen Unterrichts. Auch einzelne Unterrichtsgegenstände wurden oft eingehend besprochen, und man kann wohl sagen, dafs in England auch die ganze wissenschaftliche Gelehrtenwelt den Fragen des Unterrichts und der Erziehung in den Naturwissenschaften das gröfste Interesse und eine eingehende Mitarbeit entgegenbringt. Die Überzeugung Huxley's: „der wahre Fortschritt der Menschheit, die Wohlfahrt des Einzelnen wie der Gesamtheit, die Milderung der Sitten hängt mit der Entwickelung der Naturwissenschaften zusammen", wird von den weitesten Kreisen geteilt.*)

Auch bei der diesjährigen Versammlung der British Association in Liverpool ist eine grofse Anzahl von unterrichtlichen Thematen zur Erörterung in den allgemeinen oder Sectionssitzungen vorgeschlagen: Physical and mental deviation from the normal among children in public elementary and other schools (Galton etc.). J. J. Thomson: Teaching of physics. Marr (Address, geology): The advantage of geology as an instrument of education (Nature Nr. 1401, p. 416). Daneben ist wieder ein Comitébericht: On science teaching in elementary schools angesetzt, und einer Dame, Miss Walters, wird gestattet: On science teaching in girls' schools zu sprechen. Es würde zu weit führen, näher auf die Thätigkeit der British Association in der bezeichneten Richtung einzugehen und die Verhältnisse an der Association française als Ergänzung hinzuzufügen. Es liegen offenbar in beiden Culturländern diese Verhältnisse ganz anders als bei uns. Die grofse, langsam sich vollziehende Umänderung auf dem Gebiete des höheren Unterrichtes in Deutschland zieht nur

*) Vgl. die allgemeine englische Naturforscherversammlung, insbesondere in ihrer Stellung zum naturwissenschaftlichen Unterricht, von Prof. Dr. B. Schwalbe. Berlin, bei Friedberg u. Mode (Central-Organ XIV, Nr. 34 u. 35 p. 613 ff.).

selten die Aufmerksamkeit weiterer Kreise und namentlich der Hochschulkreise auf sich. Die Erörterungen über solche Fragen finden fast ausschliefslich in Fachkreisen statt, und der mangelnde Zusammenhang zwischen Schule und Hochschule erschwert den Fortschritt auf dem Gebiete des naturwissenschaftlichen Unterrichts in bemerkenswerter Weise. Kaum aber hat es eine Zeit gegeben, in der so grofse und einschneidende unterrichtliche Fragen wie in der jetzigen der Lösung harren, eine Zeit, die in vieler Beziehung auf unterrichtlichem Gebiete Bewegungen und Ideen, deren Durchführung am Ende des letzten Jahrhunderts versucht wurde, aufs neue und jetzt auf sicherer Basis zur Verwirklichung zu bringen sucht.

So hat jetzt die Entwickelung der Technik, die heute alle Lebensverhältnisse berührt, und das Bestreben der Hochschulkreise, Umgestaltungen in den Einrichtungen für die Ausbildung der naturwissenschaftlich-mathematischen Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten zu treffen, zu näheren Erörterungen einiger Schulfragen geführt. Prof. Wiedemann hat schon in Wiesbaden 1894 auf die Anforderungen der Hochschule im physikalischen Unterricht und das Unzureichende der Vorbildung der Schüler, welche vom Gymnasium zur Universität entlassen werden, hingewiesen*), und die Vorschläge der Herren Professoren Klein und Riedler haben zu einem lebhaften Meinungsaustausch geführt und sind mit Veranlassung gewesen, dafs hier diese Fragen zur Besprechung kommen konnten.

Wenn es sich jetzt hauptsächlich um die Vorbildung der Lehrer in der Mathematik für den Unterricht an höheren Lehranstalten handelt, so mag erwähnt werden, dafs schon früher ebenfalls, um einen die Sache bezeichnenden, wenn auch nicht richtigen Ausdruck zu wählen, in ähnlicher Weise betreffs der Chemie zwischen Wissenschaft und Technik eine Auseinandersetzung stattgefunden hat. Es handelte sich in der Mitte der achtziger Jahre um die Frage, ob die Ausbildung für die praktischen Chemiker besser an der Universität oder am Polytechnicum stattfände (Lange, Frank u. s. w.), wobei auch die Vorbildung der Studirenden gestreift und gezeigt wurde, dafs die Vorbildung an realistischen Schulen eine erhebliche Erleichterung schaffen würde. Die Erfahrung scheint dargethan zu haben, dafs die wissenschaftliche Ausbildung und Richtung der praktischen Chemiker der reinen technischen Fachvorbildung vorzuziehen sei, wenigstens nehmen viele grofse chemische Werke mit Vorliebe die jüngeren Leute, welche an der Universität vorgebildet sind,

*) E. Wiedemann, die Wechselbeziehungen zwischen dem physikalischen Hochschulunterricht und dem physikalischen Unterricht an höheren Lehranstalten (Bericht der 3. Versammlung des Vereins zur Förderung des Unterrichts in Mathematik und Naturwissenschaften, Stettin, Herrcke u. Lebeling 1894; vgl. auch von demselben: Universität und Schule 1883, Deutsche Revue).

und bei den Erörterungen, weshalb in Deutschland die technische Chemie eine so hohe Entwicklung und einen Vorsprung vor den englischen Verhältnissen erlangt habe, wird die Frage mannigfach dahin beantwortet (cf. Ostwald, Nature 1896), dafs die wissenschaftliche Ausbildung unserer technischen Chemiker vielleicht die Erklärung dafür abgebe.

Die allgemeine Richtung unserer Zeit und ihrer Bedürfnisse geht dahin, den Einzelnen sobald als möglich erwerbsfähig zu machen, und es wird dieselbe noch durch das Streben der Einzelnen selbst unterstützt, weil die Hoffnung vorhanden ist, dadurch bald zu einem bestimmten Lebensgenufs, den sie nicht in der Arbeit sehen, bei möglichst wenig Arbeit zu gelangen. Daher wird die Fachbildung heutzutage so sehr der allgemeinen Bildung gegenüber betont. Es ist richtig, wer in seinem Fach etwas leisten will, mufs eine gediegene, gründliche Fachvorbildung für seinen Berufskreis, sei er grofs oder klein, sich erwerben, ob dies aber in der Weise geschieht, dafs man von Anfang an nur die Fachbildung betont oder erst eine allgemeine Vorbildung, auf welcher sich die Fachvorbildung aufbaut, ist damit durchaus nicht entschieden, da der letztere Weg sehr wohl der bessere sein kann; Deutschland ist mit diesem System anderen Ländern gegenüber durchaus nicht schlecht gefahren.

Das Bestreben, um einen übertriebenen Ausdruck zu gebrauchen, bei möglichst eingeschränkter allgemeiner Bildung eine möglichst grofse Fachbildung in möglichst kurzer Zeit zu erlangen, würde eine Auflösung des jetzigen Schulsystems bedingen, den Interessenstreit verschärfen und die eifersüchtige Erlangung von Fachvorteilen hervorrufen. Mit demselben Rechte, mit welchem die Maschinen- und Ingenieurtechnik eine besondere Berücksichtigung bei der Vorbildung in den höheren Schulen verlangt, mit demselben Rechte können dies andere Zweige unserer Culturentwickelung thun, wie der Ackerbau, Schiffahrt und Handel, die auch eine Fachvorbildung erfordern. Sind doch in allen diesen Richtungen Bestrebungen genug vorhanden: die Einführung des kaufmännischen Rechnens und der Buchführung in die allgemeinen Schulen ist vorgeschlagen; es wird angestrebt, Handelsakademien zu errichten, so dafs dann 3 Arten von Hochschulen, wissenschaftliche, technische und commercielle vorhanden sein werden; man könnte auch besondere Berücksichtigung der Vorbildung für Verwaltung, für Verkehr und Betrieb verlangen, und so würde ein vollständiges Zerschlagen des jetzigen Schulsystems in die verschiedensten Fachschulen eintreten müssen. Das Ende würde sein: die Volksschule, die Lesen, Schreiben, Rechnen als elementare Bildung giebt, und dann die Fachschule, die dann auch wieder zu mittleren Hochschulen führen würde, wie das Technicum, die Handwerkerschule, Baugewerkschule, Webeschule, höhere Handelsschule u. s. f. Es ist keine Frage, dafs das Fortbildungsschul- und Fach-

schulsystem einer Regelung bedarf. Die Frage, welche allgemeine Vorbildung für alle diese Schulen, die zum Teil ganz beliebig organisirt sind und verschiedene Stufen der allgemeinen Vorbildung voraussetzen, wird auch bei uns in bestimmter Weise zu lösen sein.

Das Streben nach frühzeitiger Fachvorbildung findet zunächst seine bestimmten Grenzen dadurch, daſs auch die Bevölkerung der kleinen Städte und des Landes volle Berechtigung auf Rücksichtnahme hat. Es kann nicht eine jede Stadt Fachschulen für alle möglichen Berufe, für alle Zweige unserer Culturentwickelung haben, und der Ausweg, daſs Gegenden mit besonders ausgebildeten Industriezweigen Fachschulen dieser Art erhielten, wie es schon in vielen Fällen geschehen ist (z. B. bei den Webeschulen), kann nicht allgemein beschritten werden.

Aus den eben angedeuteten Verhältnissen heraus werden nun auch die Anforderungen an die allgemeinen Bildungsschulen gestellt, eine groſse Reihe neuer Unterrichtsgegenstände in den Lehrplan aufzunehmen (Volkswirtschaft, Gesetzeskunde, Handfertigkeit, Hygiene u. s. w.), und dabei wird ihnen der Vorwurf gemacht, daſs sie das Leben zu wenig berücksichtigen, daſs sie nicht praktisch eingerichtet seien, und darauf hinaus laufen dann die Klagen von Eltern und Schülern, daſs diese so viel Überflüssiges, das sie im Leben nie anwenden könnten oder wollten, lernen müſsten. Um möglichst die allgemeinen Bildungsschulen, auf denen sich die Fachvorbildung aufbauen kann, beibehalten zu können, sind Vorschläge verschiedener Art gemacht; vielleicht lieſse sich der Cursus der höheren Vorbildungsanstalten, die auf die Hochschulen vorbereiten, um ein Jahr kürzen; für die mittleren Lehranstalten könnte man das Ziel der Erlangung des Berechtigungsscheines für den einjährigen Dienst fallen lassen und die Einrichtung der alten Stadtschulen, welche zu den bürgerlichen Berufen vorbereiten, in neuer Form wieder aufleben und sich den Volksschulen als Oberbau anschlieſsen lassen; aber diese gröſseren Reformen werden die neue, an die allgemeinen Bildungsschulen zu stellende Forderung nicht ausschlieſsen, daſs sie sich in ihren Lehrgegenständen, in ihren Einrichtungen den Forderungen des Lebens, der Entwickelung der Zeit schneller anpassen, als es bisher der Fall gewesen ist.

Hemmend hat dabei das Berechtigungswesen gewirkt, und eine auf Grund der Dauer der Vorbildung, nicht auf Qualität der Fächer, getroffene Regelung würde die naturgemäſse Anpassung der Schule an unsere Zeit erleichtern. Der Begriff der allgemeinen Bildung ändert sich mit der Zeit, der Culturstufe und der nationalen Entwickelung. Die allgemeine Bildung umfaſst die Fähigkeit, unsere Culturentwickelung zu verstehen, und die Kenntnisse, welche erforderlich sind, um mit zu derselben beizutragen. Es werden daher auch die Hauptgegenstände sich demgemäſs ändern müssen: noch vor

nicht langer Zeit durfte behauptet werden, daſs Unterricht in den Naturwissenschaften als Fachunterricht zu verwerfen wäre, während jetzt wohl niemand behaupten wird, daſs nicht einige Kenntnis der Naturwissenschaften für die allgemeine Bildung erforderlich sei. Man betrachte nur die Sprachen als Hülfsmittel und die Anschauung als Grundlage, und man hätte für die allgemeinen Schulen theoretisch die Grenze der Forderungen construirt. Die Verbalschulen müſsten Realschulen, der abstracte Idealismus sich zu einem idealen Realismus umgestalten, um alte Schlagworte zu gebrauchen.

Aber nur der Organismus kann sich gesund entwickeln, der in organischem Zusammenhang mit dem früher Gewesenen bleibt, und so können unsere Schulen auch nur dann gedeihen, wenn der historische Zusammenhang gewahrt wird. Die Gegenstände, welche für unser Culturleben nicht mehr die Bedeutung haben wir früher, müssen zurücktreten, die Gegenstände, die zu Bedeutung gekommen sind, wie die Naturwissenschaften, müssen gröſsere Berücksichtigung verlangen; alle Unterrichtszweige müssen es sich aber zur Aufgabe machen, den Inhalt so zu gestalten, daſs dabei die Jetztzeit und ihre Forderungen möglichst berücksichtigt werden. Es kann dies sowohl in den linguistischen wie realistischen Unterrichtsfächern geschehen, und die Ausbildung unseres Unterrichts nach dieser Seite hin giebt die Möglichkeit, das jetzige System beizubehalten und zu vervollkommnen und so Deutschland den Vorzug seiner Schuleinrichtungen zu erhalten.

Nicht ist es möglich, an dieser Stelle die angedeuteten Gedanken weiter durchzuführen; eine Fülle von Thatsachen müſste bei der weiteren Ausführung herangezogen werden, abgesehen davon, daſs dann auch die historische Begründung, welche in hohem Grade für die Richtigkeit des zuletzt angedeuteten Weges spricht, nicht vernachlässigt werden dürfte. Ebenso kann im Folgenden eine weitere Ausführung in Beziehung auf die einzelnen Gegenstände, welche berührt werden müſsten, nicht stattfinden; denn um zu zeigen, wie ein einzelner Gegenstand, Physik, Chemie, neuere Sprachen, den allgemeinen Forderungen methodisch gerecht werden kann, würde eine vollständige Darlegung des betreffenden Unterrichts erforderlich sein.

Wenn auch schon früher vieles an unseren Schulen in den angedeuteten Richtungen geschehen ist, so haben doch zu einem weiteren Fortschreiten vor allem die neuen Pläne von 1892 beigetragen. Für viele von den Forderungen, welche in weiten Kreisen gestellt wurden, ist die Erfüllung angebahnt, und wenn dies noch nicht zu Tage tritt, so liegt das einmal an der Kürze der Zeit, dann aber daran, daſs die Lehrer nicht überall den Forderungen nachkommen können. Viele von den Vorwürfen aber, die den Schulen nach dieser und nach anderen Richtungen hin gemacht werden, würden nicht erhoben werden, wenn

die Einrichtungen der Schulen denen, die darüber urteilen, bekannt wären. Wie oft habe ich nicht die vollständigste Unkenntnis betreffs des Unterrichts an den Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen gefunden, nicht einmal die äufseren Einrichtungen derselben, viel weniger der innere Betrieb waren bekannt. Eine Hauptschuld daran tragen die Quellen, aus denen die Einzelnen ihre Kenntnisse über die Schulen schöpfen. Die eine, die subjective Erfahrung, die Kenntnis der Unterrichtseinrichtung, die wir Älteren als Schüler gewonnen haben, ist oft schon deshalb nicht mafsgebend, weil das Urteil zu einer Zeit gebildet wurde, wo der Betreffende die einzelnen Verhältnisse noch gar nicht übersehen, ein geklärtes Urteil nicht haben konnte. Inzwischen hat sich, man denke nur an die neuen Pläne von 1856, 1882 und 1892, sehr vieles geändert, die Gegenstände werden ganz anders behandelt. Stoffe sind hinzugetreten, und da die meisten erst dann wieder mit den Schulen in Verbindung treten, wenn die eignen Kinder dieselben besuchen, sind für viele die alten Erfahrungen das Mafsgebende geblieben; es wird nicht bedacht, dafs auch die Schule und der Unterricht fortgeschritten sein kann. Dazu kommt aber der Subjectivismus, der die eigene, vielleicht vereinzelte Erfahrung verallgemeinert und glaubt, dafs, was einmal in einer vergangenen Zeit geschehen, auch heute und überall in derselben Weise noch vor sich gehe. Auch diese zweite Quelle, aus der die Anschauungen über die Schule und ihre Einrichtungen geschöpft werden, ist eine durchaus unzuverlässige. Abgesehen von dem auch in den oberen Klassen mangelnden Einblick in die Schuleinrichtungen selbst, ist in dem jugendlichen Alter die Fähigkeit, eine Sache frei von subjectiven Eindrücken richtig darzustellen, aufserordentlich gering. Nicht nur dafs Übertreibungen mit unterlaufen, auch Unrichtigkeiten und falsche Wahrnehmungen werden oft ohne böswillige Absicht berichtet, wozu noch kommt, dafs Schüler sowohl wie Eltern gern die geringen oder mangelhaften Fortschritte, die der Schüler macht, auf die Einrichtungen der Schule schieben. Nur wenn jemand sich die Mühe giebt, selbst die Einrichtungen der Schule kennen zu lernen, kann das Urteil zu bestimmten allgemeinen Schlufsfolgerungen berechtigen. Haben doch gerade uncontrollirte Angaben dem Unterricht und den Schulen oft die gröfsten Schwierigkeiten zugezogen, zumal alle solche Angaben oft ungeprüft die weiteste Verbreitung finden und die Richtigstellung derselben oder der Nachweis der Unrichtigkeit darauf gegründeter Behauptungen nur wenig beachtet wird. Wenn also der Subjectivismus bei der Beurteilung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts nicht mafsgebend sein soll, so bedarf es, um die Frage weiterer Lösung entgegenzuführen, vor allem einer Klarlegung des augenblicklichen Standes des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts an den höheren Schulen, dann müfsten aber auch die Forderungen bekannt

sein, welche die technischen Hochschulen an die eintretenden Studirenden in den einzelnen Fächern zu stellen für richtig halten, und ebenso die, welche die einzelnen Zweige des Universitätsunterrichts erheben. Die Berichte müſsten nicht allgemeine Punkte und Forderungen, die z. T. hinlänglich bekannt sind, wie Befähigung zum Beobachten, Fähigkeit zum Sehen und das Gesehene durch Zeichnung oder Worte richtig wiederzugeben, Verständnis der allgemeinen Grundbegriffe oder ähnliche, enthalten, sondern bestimmte, präcisirte Angaben in Bezug auf Kenntnisse, an denen sich diese Fähigkeiten zeigen sollen, darlegen; denn die Vorstellung wird doch kaum vorausgesetzt werden können, daſs, wenn z. B. in der Physik Kenntnis der Grundbegriffe, Kraft, Arbeit u. s. w. verlangt wird, dies ohne die Forderung bestimmter Kenntnisse erreicht werden könne. Die mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilungen würden die Frage der Vorbildung bedeutend fördern, wenn sie solche Erhebung veranlassen wollten.

Bei unseren Schulen kommen bei dieser wie bei jeder Reform die drei Factoren zur Berücksichtigung, einmal, wie die Schüler derselben gegenüber befähigt sind, dann, wie dieselbe durchzuführen ist (in Beziehung auf den Inhalt des Gegenstandes und die Methodik) und dann, wie weit die Lehrer dazu vorgebildet sind, und welche neuen Wege etwa in diesen Richtungen einzuschlagen sind. Welche Umänderungen in der Vorbildung der Lehrer für Mathematik und Naturwissenschaften sind also unter Festhaltung an dem System der allgemeinen Bildungsschule erforderlich, also der Lehrer, welche an solchen und nicht an Fachschulen zu unterrichten bestimmt sind?

Über die ersten beiden Punkte möchte ich nur wenige Bemerkungen binzufügen.

Meiner Ansicht nach liegt eine groſse Gefahr für unsere Schulen bei der Einführung vieler moderner Forderungen in einer Überschätzung der Fähigkeit unserer Jugend und einem Verkennen ihrer Auffassungskraft. Vergleicht man viele naturwissenschaftliche Schulbücher und hat man Gelegenheit, die aus den verschiedensten Kreisen gestellten hohen Anforderungen als wünschenswert zur Einführung zu hören, so erkennt man, sobald man praktisch den Versuch zur Durchführung macht, sofort die Unmöglichkeit. Wenn der Unterricht wirkliches Verständnis erzielen soll und nicht bloſs dadurch, daſs alles Mögliche vorgekommen ist, und der Schüler nachher sagen kann: ja, das haben wir auch einmal gehört, dem Halbwissen und Nichtkennen Vorschub geleistet werden soll, so muſs dem Bestreben, alles Neue in den Unterricht hereinzunehmen, entgegengetreten werden. Wer weiſs, wie schwierig es ist, den Begriff der Energie, der Entropie, des osmotischen Druckes u. s. w. selbst Studirenden zugänglich zu machen, wird nicht verlangen können, daſs Schüler im Alter von

15 bis 16 Jahren in den ersten Klassen der Realschulen davon zu hören bekommen; das absolute Maſssystem macht selbst den Anfängern beim Fachstudium Schwierigkeit, und das soll in dem jugendlichen Alter verstanden werden! In Oberprima, der Klasse, die zu der Hochschule überführt, wird man auf diesen oder jenen schwierigeren Begriff eingehen können, diesen und jenen Ausblick eröffnen können, aber auch da zu bedenken haben, daſs die Begriffe der modernen Physik doch nur auf Grund einer groſsen Menge von Kenntnissen aufgebaut sind, die dem Schüler gar nicht zugeführt werden können. Oder welchen Nutzen kann es für die allgemeine Bildung haben, wenn man Gleichstrom, Wechselstrom, Drehstrom in Untersecunda demonstriren will; kann da ein Verständnis erzielt werden? Wo soll es hinführen, wenn man an den Realschulen Probelectionen über Einführung in die Lehre von der Valenz, Einführung in die theoretische Chemie, für angemessen hält und glaubt, alles das zu eigen machen zu können, was in den Programmen, wie z. B. in der Abhandlung von Möhring*), angegeben wird?

Die geistigen Fähigkeiten der Menschen sind in der Weise nicht gewachsen, daſs die Jugend jetzt imstande wäre, sofort die höchsten Probleme der Wissenschaft zu erfassen, daſs, um ein Beispiel aus einer Discussion herauszugreifen, unsere Jugend schon in frühem Alter mit Differentialen und Integralen Bescheid wissen und dieselbe so vorgebildet werden könnte, daſs auch die geistige Berufsarbeit im späteren Alter von jedem in gleicher Weise durchführbar wäre. Das sind Utopien, die aber in der Forderung ein Abbild finden, daſs der geistigen Fassungskraft der Jugend alles zugänglich sein soll. Hierin liegt nach meiner Anschauung eine Hauptgefahr für unsere Schulbildung, deren Hauptzweck, abgesehen von der selbstverständlichen erziehlichen Seite, sein muſs, die elementaren Kenntnisse auf jedem Gebiete den Schülern zum Eigentum mitzugeben, damit sie mit denselben, durch dieselben sich weiter ausbilden können, so daſs sie also zum Können und zum Denken von sicherer Grundlage aus vorschreiten.

Was die Gegenstände anbetrifft, so haben sich unsere Einrichtungen derartig gestaltet, daſs man die Forderungen der Culturentwickelung zunächst nicht durch Umänderung der bestehenden Schulen, sondern durch Aufbau ähnlicher Schulen berücksichtigt hat; neben den Gymnasien sind seit dem vorigen Jahrhundert die realistischen Anstalten entwickelt, die Gymnasien, die im vorigen Jahrhundert den Anforderungen der Zeit mehr Rechnung trugen, sind dann am Anfang dieses Jahrhunderts zum linguistischen System auf altklassischer Basis übergegangen, dessen Ausbildung mit einer Beiseitelassung

*) Über den chemischen Unterricht an Realschulen von Dr. W. Möhring. Man vergl. auch die Besprechung in Rethwisch's Jahresbericht.

der realistischen Fächer verbunden war, bis diese jetzt wieder etwas mehr Ausdehnung und vor allem mehr Wichtigkeit erlangt haben. Daneben sind die Realgymnasien und die Oberrealschulen, nachdem die alten Gewerbeschulen beseitigt waren, zu allgemeinen Unterrichtsanstalten ausgebildet worden. Diesen entsprechen drei Arten sechsklassiger Schulen, die, ebenso eingerichtet, nur die oberen Klassen von Obersecunda an entbehren; daneben sind einige Combinationen und sogenannte Reformschulen gestattet, mit abweichenden Plänen, wie das sogenannte Altonaer und Frankfurter System, zu denen man auch die Berliner Realschulen (höhere Bürgerschulen) rechnen könnte, die nur in 4, nicht in 6 Klassen fremdsprachlichen Unterricht haben. Die letzteren Gruppen unterscheiden sich nicht durch andere Unterrichtsgegenstände oder Unterrichtszeit, sondern nur durch verschiedenartige Verteilung des Beginns der Unterrichtsfächer auf verschiedene Klassenstufen, womit eine geringe Einschränkung der Stundenzahl einiger Fächer zu Gunsten anderer, namentlich der linguistischen, verbunden ist. Aufserdem ist facultativer Unterricht in verschiedenen Gegenständen eingeführt, durch den man den Forderungen der Zeit entgegengekommen ist, so Englisch am Gymnasium und praktische Übungen in der Physik, auch ist selbst bei Gymnasien gestattet, Einzelne, für welche das geometrische Zeichnen von besonderem Werte ist, in die darstellende Geometrie einzuführen (Schattenconstruction, Projection). Schon aus den Lehrplänen liefse sich nachweisen, wie weit man in manchen Beziehungen den modernen Ansichten Folge gegeben hat. Die Betonung der Lectüre und des Realistischen im Sprachunterricht, die inductive Methode, nach welcher auch hier namentlich in Beziehung auf Grammatik verfahren werden soll, die rein praktischen Gesichtspunkte, von welchen aus die neueren Sprachen gelehrt werden, sind Zugeständnisse an die Gegenwart; vielleicht ist man hierbei schon zu weit gegangen, da viele dieser Forderungen nur beim Einzelunterricht, nicht beim Klassenunterricht, und mit besonders dazu geschulten Lehrern, nicht mit einem Lehrerpersonal, das sich nur schwer anpassen kann, durchführbar sind, wozu noch kommt, dafs in den neueren Sprachen der moderne Unterricht nur dann Erfolg haben kann, wenn die etwa erlangte Fähigkeit im mündlichen Ausdruck weiter geübt und angewendet wird. Aber auch in den übrigen Zweigen hat man versucht, der Zeit innerhalb des bezeichneten Rahmens gerecht zu werden. Die abstracten Aufgaben in der Mathematik und die Behandlung derselben ohne jede Beziehung zur Anwendung sind im Verschwinden begriffen, die Zeiten, wo nicht ein Beispiel aus dem Leben im mathematischen Unterricht vorkam, wo den Schülern die Wichtigkeit des Buchstabenrechnens nie an einer Verwertung klar gemacht, die geometrische Anschauung für weniger Beanlagte durch Anschauungsmittel nicht unterstützt wurde, sind auch für die Gym-

nasien vorüber. Die bequeme Methode des Vorlesens in der Physik, „auch einer Physik ohne Experimente", oder der Chemie ohne Demonstrationen ist geschwunden. Das Dictiren und Auswendiglernen in den beschreibenden Naturwissenschaften ist verbannt, überall soll beobachtet und aus dem Gesehenen und Beobachteten geschlossen werden, überall diese Anleitung zur Selbstthätigkeit führen. Die Anschauungsmittel werden fast im Übermafs producirt und stehen in verschiedenen Abstufungen für jeden Unterricht zur Verfügung, so dafs nur die Etatsfrage bei der Beschaffung eine Rolle spielen kann. So sollen denn durch Anknüpfungen alle Gebiete des modernen Lebens berücksichtigt, für alle Anregungen gegeben werden, so nur können Technik im ausgedehntesten Mafse, Hygiene, Culturgeschichte, Volkswirtschaftslehre, Gesetzeskunde Anknüpfungen im Unterrichte finden. Freilich ist für gewisse Fächer, namentlich die realistischen, dadurch die grofse Gefahr vorhanden, dafs an Stelle des bisherigen, vielleicht zu sehr systematischen Unterrichts der rein encyklopädische, zusammenhanglose Unterricht tritt, eine der Klippen, an der die Entwickelung dieses Unterrichts Ende des vorigen Jahrhunderts gescheitert ist. Wenn der zusammenhängende Gang in einem Unterricht stets unterbrochen, willkürliche Betrachtungen herangezogen, Unwichtiges als Wichtiges, willkürlich Ausgewähltes wie Notwendiges behandelt wird, verliert der Unterricht jede feste Grundlage, der Schüler erhält ein Mosaik, auf dem er kein Können und Wissen aufbauen kann; er wird wissenschaftlich abgestumpft, und die Hauptsache, die Übung im Denken an logisch geordnetem Stoffe, geht ihm verloren.*)

Wenn so, wie in grofsen Umrissen angedeutet, die Unterrichtsmethode und der Unterrichtsinhalt sich den allgemeinen Forderungen unserer Zeit anpassen kann, so darf man doch nicht erwarten, dafs einer einzelnen, besonders schnell und prägnant entwickelten Technik zu Liebe der Unterrichtsgang umgemodelt werden soll. So ist z. B. das Verlangen, dafs die Elektricitätslehre von dem Standpunkt der Elektrotechnik aus gelehrt werde, die Chemie als chemische Technologie gestaltet werden soll, vom Standpunkt der allgemeinen Schule aus unrichtig; nicht für Elektrotechnik, nicht für praktische Chemie soll die Schule Einzelne vorbereiten, sondern Allen die Kenntnisse und das grundlegende Wissen in der Elektricitätslehre und Chemie geben, so dafs der Einzelne im späteren Leben den betreffenden Zweigen der Technik nicht fremd gegenübersteht. Von einem Umlernen der Wissenschaften ist dabei gar nicht die Rede, denn wenn jemand die Thatsachen kennt, wird es ihm nicht schwer werden, theoretische Begriffe, die daraus abgeleitet sind, zu verstehen, während die theoretischen Be-

*) Für den vorliegenden Zweck kann eine ausführliche, ins Einzelne gehende Gestaltung der Pensen der einzelnen Unterrichtsgebiete nicht mitgeteilt werden.

griffe ohne ausreichende Begründung durch Thatsachen in der Luft schweben und willkürlich erscheinen. Wenn von einem Umlernen die Rede sein kann, so würde dies für den Lehrer der Fall sein, der, um einen nutzbringenden Unterricht zu erteilen, nicht bloſs die neuen Thatsachen, sondern auch die neuen theoretischen Folgerungen, die neuen Anwendungen der Wissenszweige kennen muſs, und da fragt es sich, ob die Lehrenden, die bei jedem Unterricht doch den Haupterfolg bedingen, hinlänglich und richtig vorbereitet sind, um jenen umfassenden und schwierigen Forderungen der Jetztzeit gerecht zu werden. Es ist klar, daſs bei der Frage der Lehrervorbildung nicht nur die Vorbildung auf der Schule — es können jetzt Gymnasien und Realgymnasien und auch Oberrealschulen zum Lehrerberuf Abiturienten entlassen — und die auf der Hochschule in Betracht kommen, sondern vor allem auch die Schulbehörde, die beurteilen kann, wie denn die aus der Vorbildung hervorgegangenen Lehrer nachher für die jetzt bestehenden und weiter zu entwickelnden Schulen brauchbar sind; in der einen Beziehung wird man kaum eine abweichende Meinung hören, nämlich darin, daſs die Lehrer eine allgemeine Vorbildung haben müssen in den philosophischen Fächern, eine Kenntnis der Gebiete der Schulwissenschaften in den Nebenfächern und eine wissenschaftliche Ausbildung, die zur wissenschaftlichen Weiterarbeit (receptiv oder productiv) befähigt, in den Hauptfächern, die der Candidat sich selbst gewählt hat. Dazu muſs noch eine Reihe persönlicher Eigenschaften treten, die für die Ausbildung des Unterrichtenden erforderlich sind, vor allem auch der Trieb der Weiterarbeit und der Fortbildung, für die jetzt auch mannigfache Gelegenheit durch Zeitschriften, geeignete Handbücher, Feriencurse u. s. w. gegeben ist. Nur die wissenschaftliche Vorbildung kann hier in Betracht kommen; für die praktische Ausbildung ist durch die Seminare und durch das Probejahr die Grundlage gegeben. Eine seminaristische Ausbildung, wie sie für die Lehrer an Elementarschulen durchgeführt ist, ist wegen des Umfangs des Gebietes, das der Candidat wissenschaftlich beherrschen muſs, nicht möglich; gerade die wissenschaftliche Vertiefung und wissenschaftliche Erfassung des Lehrstoffes ist für die gedeihliche Entwickelung des höheren Unterrichts Hauptbedingung.

Wie sehr der Lehrerstand selbst sich jetzt mit der Anpassung des Unterrichts den Forderungen der Jetztzeit gegenüber beschäftigt, davon geben zahlreiche Veröffentlichungen in den verschiedenen pädagogischen Zeitschriften Zeugnis, dafür spricht das Entstehen und Blühen von Zeitschriften für besondere Unterrichtsgebiete, dafür die Behandlung der einschlagenden Fragen in besonderen Vereinen. So hat es sich auch der Verein zur Förderung des Unterrichts in der Mathematik und den Naturwissenschaften von seiner Gründung an zur Hauptaufgabe gemacht, die Forderungen, welche jetzt an den Lehrer unserer heutigen Zeit im allgemeinen und in einzelnen

Fächern gestellt werden müssen, zu erörtern und zu begründen und die Anschauungen darüber in besonderen Leitsätzen der einzelnen Versammlungen niederzulegen. Schon auf der Versammlung jenes Vereins in Wiesbaden 1894 behandelte Herr Prof. E. Wiedemann die Wechselbeziehungen zwischen dem physikalischen Hochschulunterricht und dem physikalischen Unterricht an höheren Lehranstalten, und nach einem Vortrage des Herrn Oberl. Presler über Ausbildung der Mathematiker im Zeichnen wurde eine Resolution angenommen, dahin gehend: „Den Studirenden der Mathematik ist auf allen Universitäten Gelegenheit zu geben, sich diejenigen Kenntnisse und Fertigkeiten anzueignen, welche zur Erlangung der Lehrbefähigung im Linearzeichnen, insbesondere in der darstellenden Geometrie, erforderlich sind". Auf der Versammlung in Göttingen wurde die Frage aufs neue aufgenommen und auf Antrag des Herrn Prof. Klein in allgemeiner Fassung: Beziehung des mathematischen Unterrichts zur Ingenieurvorbildung für die Tagesordnung der Versammlung zu Elberfeld 1896 bestimmt; das Referat wurde dem Herrn Director Dr. Holzmüller aus Hagen i./W., das Correferat dem Vortragenden überwiesen. Jeder der Referenten hatte Thesen aufgestellt, aus denen dann eine Reihe von Leitsätzen nach lebhafter Discussion angenommen wurde, die als Ausdruck der Meinung der zahlreich besuchten Versammlung aufzufassen sind und fast einstimmig angenommen wurden. Das Referat des Herrn Holzmüller ist ausführlich in der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht (Red. J. C. V. Hoffmann) 1896, Heft 6 und 7, S. 468—480, 535—549 und in der Zeitschrift für lateinl. höhere Schulen Jahrg. VII, Heft 10 veröffentlicht.

Das Correferat, das überhaupt nur im Auszuge gegeben werden kann, erscheint in den Unterrichtsblättern des Vereins (Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, Red. Prof. Pietzker) 1896 Octoberheft. — Herr Holzmüller ging von einer Definition der allgemeinen Bildung aus, die er an einem praktischen Beispiel illustrirte. An die Verwaltung gröfserer Städte treten die verschiedensten Fragen heran, bautechnische, elektrische, pädagogische, financielle, commercielle u. s. w. Die Stadtverordneten müfsten in der Lage sein, sich selbst überall ein Urteil zu bilden, und so könne man die allgemeine Bildung als Stadverordnetenbildung bezeichnen*).

Der Redner ging dann auf sein Thema näher ein und bezeichnete es auf Grund seiner eigenen Erfahrungen als einen grofsen Mangel, dafs die Universitäten in Bezug auf den Unterricht in der Mathematik

*) Ausdrücklich möchte ich erwähnen, dafs Herr Holzmüller das Festhalten an der allgemeinen Vorbildung als notwendig betont hat. Der Correferent führte diesen Gedanken ausführlich weiter durch. Ein Teil der Ausführungen mufste naturgemäfs in den allgemeinen Erörterungen oben wiedergegeben werden.

in viel zu geringem Maſse den praktischen Anforderungen genügen und in viel zu hohem Grade für die Hochschulprofessoren vorbilden, daſs die Hochschulen auf die elementare Behandlung der Mathematik zu geringen Wert legen, zu sehr die Differential- und Integralrechnung behandeln und die Studirenden bis zu den Grenzen der Wissenschaft führen, während die praktische Anwendung in der Luft schweben bleibt. Von hundert Studirenden kommt vielleicht nur einer dazu, die akademische Laufbahn einzuschlagen, und für diesen einen ist der Unterricht zugeschnitten, die 99 anderen aber erhalten nach der Überzeugung des Redners auf der Hochschule in mathematischer Hinsicht eine ganz verkehrte Vorbildung. Dieser Ansicht schloſs sich vor einiger Zeit einstimmig auch eine Versammlung des Lenne-Bezirksvereins deutscher Ingenieure an, und es wurde beschlossen, an den Hauptverein den allerdings noch bescheidenen Antrag zu richten, daſs im ersten Studienjahre die Mathematik elementar behandelt werde. Im Bergischen Bezirksverein ist die Angelegenheit gleichfalls angeregt und einer Commission überwiesen worden, und es wird jener Antrag auf der Hauptversammlung in einigen Jahren in Stuttgart zur Verhandlung kommen. Auch einer der Berliner Hochschulprofessoren hat sich über die Ingenieurvorbildung dahin geäuſsert, daſs für die ersten Semester und für die groſse Menge der Studirenden der mathematische Unterricht elementar sein müsse, und der zweite, feine analytische Teil des Unterrichts auf diejenigen zu beschränken sei, die bis zu den Grenzen der Wissenschaft dringen wollen. Die Hochschule ist nicht dazu da, daſs nach ihr sich das praktische Leben richte, sondern sie hat sich nach dem praktischen Leben zu richten. Ein Hauptmangel auf den Universitäten ist, daſs z. B. die darstellende Geometrie nicht gelehrt wird, ohne die aber von einer gesunden Industrie gar nicht die Rede sein kann. Herr Director Holzmüller gab nun einige praktische Vorschläge für eine möglichst anschauliche Behandlung der Perspective aus dem einfachen Quadratwürfel und dem Pentagramm heraus. Er empfahl, für das Gymnasium zwei Stunden wöchentlich im gebundenen Zeichnen einzurichten, in welchem dann alle jene Dinge abgemacht und so ein Fundament für die Stereometrie gelegt werden könnte. In den realistischen Anstalten müſsten die jetzt eingerichteten wahlfreien Stunden im gebundenen Zeichnen obligatorisch werden. Die Hochschulen müſsten wirtschaftlicher arbeiten und die Ausbildung in drei Jahren abschlieſsen, was sie allerdings nur könnten, wenn die Schüler mit den richtigen Vorkenntnissen ausgerüstet seien. Es müſste danach gestrebt werden, die Anschauung mehr zu Hülfe zu nehmen und das, was analytisch gefunden wäre, auch noch auf anschauungsmäſsige Weise darzulegen. Auch die Mechanik könne rein elementar betrieben werden. Der Redner zeigte an einigen Beispielen, wie in der Praxis, z. B. bei Be-

rechnungen von Trägern, einfachen Brücken, Krahnen u. s. w., rein graphisch, zeichnerisch die Kräftepaare gebildet werden und mit dem sogen. Kräftepolygon die Constructionen geschehen können, so dafs man nicht mehr zu rechnen braucht, sondern mit Zirkel, Bleistift und Reifsbrett die gesamte Höhe der Technik beherrschen kann, ohne Zuhülfenahme der Logarithmentafeln.

Mit Rücksicht auf die schon vorgeschrittene Zeit mufste der Redner seine weiteren Ausführungen abbrechen und fafste dann das Gesagte und das, was er noch hatte näher darlegen wollen, in eine Reihe von Thesen zusammen, die, ebenso wie die Thesen des zweiten Berichterstatters, als Grundlage für die weitere Erörterung über die ganze streitige Frage dienten.

Der Correferent, dem die Thesen des Referenten nicht bekannt waren, hatte deshalb seine Aufgabe von einem weitergehenden Gesichtspunkte aus aufgefafst und auch von den Naturwissenschaften die Physik mit in die Betrachtung gezogen, weil namentlich auf diesem Gebiete, das aufserdem mit dem der Mathematik nahe zusammenhängt, viele praktische Beispiele sich zur Erörterung und Illustrirung darbieten. Er ging von der Anschauung aus, dafs den höheren Schulen der Charakter der allgemeinen Vorbildungsschulen durchaus gewahrt bleiben müsse, und begründete die Forderung mit durch die historische Entwickelung und den augenblicklichen Stand unserer höheren Schulen. Alle Neuforderungen könnten nur gedeihen auf dem einmal gegebenen Boden und durch den Ausbau und die Umänderung des bestehenden Baues, nicht aber durch Umreifsen desselben.

Er begründete näher, was die einzelnen Zweige unseres modernen Lebens von der Schule fordern könnten, und wie die Forderungen, welche die Technik macht, in entsprechender Weise von vielen anderen Berufen gestellt werden könnten. Sodann wurde die Verschiedenheit der Anforderungen des Fachunterrichts an die allgemeinen Unterrichtsfächer dargelegt. Der bisherige Weg, die allgemeinen Grundkenntnisse zu geben und von dem Studirenden zu verlangen, dafs er auf Grund derselben einzelne Zweige der betreffenden Wissenschaft weiter studirt, sei der richtige. Die Schule müsse nur die Anknüpfungen an die mannigfaltigen Entwickelungen und Anwendungen der Wissenschaft im Leben geben, die letzeren aber nicht zur alleinigen Grundlage machen. Die ganze Frage sei nicht nur bezüglich der Ingenieurvorbildung, sondern mit Rücksicht auf die gesamte Technik zu erörtern. Eine ausführliche Behandlung des Themas „Schule und Technik“ würde eigentlich erforderlich sein, wenn man einen einzelnen Teil desselben, der zur Besprechung gestellt sei, richtig beurteilen wolle. Das alte und neue System des Unterrichts wurde sodann im allgemeinen dargelegt, an einzelnen Beispielen erläutert, nicht aber bezüglich der einzelnen Unterrichtszweige im einzelnen behandelt. Sodann ging der Correferent kurz darauf ein, was denn die einzelnen

Fächer der Technik, wie der Ingenieur- und Maschinentechnik, von den einzelnen Schulwissenschaften verlangen müfsten oder könnten, und wie demgegenüber die Schule verfahre und verfahren könne. Bei der Kürze der für das Correferat zur Verfügung stehenden Zeit liefs sich dies vollständig auch nicht bei einer Wissenschaft durchführen, was noch weniger bei einem Vortrage an dieser Stelle möglich ist, wo das Schultechnische ganz ausscheidet und gar nicht mit zur Betrachtung herangezogen wird. Nur einzelne Beispiele aus Mathematik und Physik (Buchstabenrechnung und Elasticität) wurden berührt. Bezüglich der Lehrervorbildung ergiebt sich aus den allgemeinen Gesichtspunkten, dafs dieselbe unbedingt der Universität vorbehalten werden müfste, schon wegen des Zusammenhangs, in dem die Lehrer der Naturwissenschaften mit den übrigen Schulfächern (incl. Zoologie und Botanik) und den philosophischen Fächern bleiben müfsten. Ein früherer Versuch, für gewisse Schulen den Lehrern die Vorbildung an technischen Schulen zu gestatten, wie bei den früheren Gewerbeschullehrern, ist mifslungen, und wenn auch einzelne besonders tüchtige Kräfte daraus hervorgegangen sind, so wird doch niemand nach den früheren Erfahrungen einen solchen Weg heutzutage befürworten. Bezüglich der Lehrervorbildung kann man den Forderungen der Ingenieure und Techniker dadurch vollkommen gerecht werden, dafs man an den Universitäten Einrichtungen trifft, welche nach den bezeichneten Richtungen hin Gelegenheit geben, die erforderliche Vorbildung zu erlangen: das Hören einer allgemeinen technologischen Vorlesung ist für Studirende jeder Kategorie in hohem Grade wünschenswert, andererseits kann man sehr wohl gestatten, dafs zwei Semester des Studiums an einer technischen Hochschule zugebracht werden, die selbstverständlich auf die Studienzeit, die acht Semester betragen müfste, in Anrechnung zu bringen seien. An Orten, wo sich Universität und technische Hochschule befinden, steht ohnehin schon dem Studirenden die Ausbildung an beiden Hochschulen offen. Die Aufgabe der technischen Hochschulen ist auch nicht direct die der Lehrervorbildung, sie haben andere ebenso wichtige Aufgaben in fast übergrofser Anzahl zu lösen. Es sind die Universitäten viel eher imstande, das, was an Fachvorbildung den Lehrern fehlt, zu bieten, als umgekehrt die technischen Hochschulen die allgemeinen Fächer und neue Specialfächer, die den Candidaten der Mathematik und Physik mit offenstehen müssen, wie Zoologie und Botanik, berücksichtigen können. Auf Grund der Programme der technischen Hochschulen läfst sich kein Studienplan für die Lehrer der Mathematik und Naturwissenschaften aufstellen, während das sehr wohl nach den Vorlesungsverzeichnissen der Universitäten möglich ist.

Die Auseinandersetzungen beider Referenten wurden in Thesen zusammengefafst, welche hier wiedergegeben werden mögen, da sie

gewissermafsen als Resultat der Darlegungen der Referenten zu betrachten sind. Die Frage, wie etwa Lehrer für die Fachschulen vorzubilden seien, die für das Gedeihen unseres Fach- und Fortbildungsschulwesens von der gröfsten Bedeutung ist, konnte bei den ganzen Verhandlungen nicht mit in Betracht gezogen werden.

Thesen (Holzmüller).

1. Auf jeder deutschen Universität sind pflichtmäfsige Vorlesungen und Übungen in der darstellenden Geometrie einzuführen.

2. Die Prüfungsordnung für Candidaten des mathematischen Lehramts ist dahin zu ergänzen, dafs mindestens in den ersten Elementen der darstellenden Geometrie geprüft wird.

3. Dem Candidaten des mathematischen Lehramts mufs es freigestellt werden, einige Semester seiner Studienzeit auf der technischen Hochschule zu verbringen, die ihm voll anzurechnen sind.

4. Auf jeder Universität sind pflichtmäfsige Vorlesungen über die elementare Mathematik und Mechanik einzuführen.

5. Auf jeder technischen Hochschule ist für das erste Studienjahr eine Vorlesung über Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung einzurichten.

6. Auf den Oberklassen des Gymnasiums sind im Interesse der künftigen Ingenieure zwei Wochenstunden wahlfrei dem Betriebe des gebundenen Zeichnens und der darstellenden Geometrie zu widmen. Auf den realistischen Anstalten ist pflichtmäfsiger Betrieb dieser Fächer wünschenswert.

7. Die Begriffe der Energie, des Trägheitsmoments und des Potentials müssen auf dem Gymnasium in elementarer Weise zur Erläuterung kommen und an der Hand praktischer Übungsbeispiele geklärt werden.

8. Der Verein zur Förderung des mathematischen Unterrichts sieht in den mathematischen Lehrplänen von 1892 einen ersten Schritt zu einem dem praktischen Bedürfnis entsprechenden Betriebe der Mathematik und ist besonders mit der stärkeren Betonung der Stereometrie und des stereometrischen Zeichnens einverstanden.

Thesen (Schwalbe).

1. Dem Schulunterricht mufs das Ziel eines allgemein vorbildenden Unterrichts gewahrt bleiben. Eine Auswahl des Stoffes nur mit Rücksicht auf bestimmte Berufszweige ist nachteilig.

2. Bei der methodischen Durchführung des Unterrichts in den einzelnen Lehrgegenständen sind möglichst die Beziehungen derselben zum heutigen Leben, zu den Fortschritten in Industrie, Technik und Wissenschaft heranzuziehen, ohne dafs diese zum Mittelpunkt des Unterrichts gemacht werden. Hierbei sind nur die Stoffe auszu-

wählen, welche dem Verständnis des noch mehr oder weniger unentwickelten Auffassungsvermögens der Jugend zugänglich sind.

3. Die Auflösung der allgemeinen Schulen in Fachschulen ist für die Gesamtbildung nachteilig.

4. Um das unter 2 erwähnte Ziel zu erreichen, sind an den Universitäten der Städte, die nicht gleichzeitig technische Hochschulen besitzen, Einrichtungen zu treffen, welche die allgemeine Bildung auf den Gebieten der Technik vermitteln.

5. Die Studirenden der Mathematik und Naturwissenschaften, welche das Lehrfach ergreifen wollen, müssen den Nachweis der Teilnahme an diesen Vorlesungen erbringen. Die letzteren sind auch den nicht mehr Studirenden leicht zugänglich zu machen (den Juristen, Lehrern).

6. Die Lehrervorbildung mufs der Universität zugewiesen bleiben.

Die Versammlung trat sodann in die Erörterung der von den Herren Director Holzmüller aus Hagen und Director Schwalbe aus Berlin besprochenen Beziehungen des mathematischen Unterrichts zur Ingenieur-Vorbildung ein. Die Besprechung erfolgte an der Hand der beiderseitig vorliegenden Thesen, die viele Berührungspunkte mit einander hatten. Man einigte sich nach kurzer allgemeiner Erörterung darüber, zunächst über die in mehr allgemeiner Form gehaltenen Thesen des Herrn Director Schwalbe abzustimmen. Nach einigen unwesentlichen Änderungen und nachdem die These: „Die Auflösung der allgemeinen Schulen in Fachschulen ist für die Gesamtbildung nachteilig", fallen gelassen war, da dieser Punkt schon, wenn auch nicht in so scharfer Form, in der ersten These enthalten war, wurden aus beiden Gruppen der Thesen folgende angenommen:

Beschlüsse der Versammlung.

1. Dem Unterricht an den höheren Lehranstalten mufs das Ziel eines allgemein vorbildenden Unterrichts gewahrt bleiben. Auswahl und Behandlung des Stoffes nur mit Rücksicht auf bestimmte Berufszweige ist nachteilig.

2. Bei der methodischen Durchführung des Unterrichts in den einzelnen Lehrgegenständen sind möglichst die Beziehungen derselben zu dem heutigen Leben, zu den Fortschritten in Industrie, Technik und Wissenschaft heranzuziehen, ohne dafs diese zum Mittelpunkt des Unterrichts gemacht werden. Hierbei sind nur die Stoffe auszuwählen, welche für das Verständnis und das Auffassungsvermögen der Jugend geeignet sind.

3. Zur Erreichung dieses Zieles sind an den Universitäten der Städte, die nicht zugleich technische Hochschulen besitzen, Einrich-

tungen zu treffen, welche die allgemeine Bildung auf den Gebieten der Technik vermitteln.

4. Die Studirenden der Mathematik und der Naturwissenschaften, welche das Lehrfach ergreifen wollen, müssen den Nachweis der Teilnahme an diesen Veranstaltungen erbringen. Die letzteren sind auch den Nichtstudirenden (Juristen, Lehrern und Anderen) leicht zugänglich zu machen.

5. Die Lehrervorbildung mufs der Universität zugewiesen bleiben, doch soll es dem Candidaten des mathematischen Lehramts freigestellt werden, einige Semester, die ihm voll anzurechnen sind, auf der technischen Hochschule zu verbringen.

6. Auf den deutschen Universitäten haben Vorlesungen und Übungen in der darstellenden Geometrie ebenso wie über elementare Mathematik und Mechanik stattzufinden.

7. Die Prüfungsordnung für Candidaten des mathematischen Lehramts ist dahin zu ergänzen, dafs mindestens in den ersten Elementen der darstellenden Geometrie geprüft wird.

8. Auf den Oberklassen der Gymnasien sind zwei Wochenstunden wahlfrei dem Betriebe des gebundenen Zeichnens und der darstellenden Geometrie zu widmen. Auf den realistischen Anstalten ist pflichtmäfsiger Betrieb dieser Fächer notwendig.

Immerhin können diese Verhandlungen ein Bild von den Anschauungen geben, die in den beteiligten Kreisen selbst vorhanden sind. Hier sind die Thesen nicht zur Beschlufsfassung, sondern zur Aussprache mitgeteilt; dieselben hätten für die Naturforscherversammlung zum Teil wohl eine andere Fassung und Begründung nach anderer Richtung hin erfahren. Vor allem aber ist es wünschenswert, wenn an den Fragen des Unterrichts und der Erziehung, die heute vielleicht weiteren Veränderungen und notwendigen Umgestaltungen entgegengehen, alle Kreise teilnehmen und in gegenseitigen Gedankenaustausch treten, wozu die Naturforscherversammlung in hohem Grade beitragen kann, da auf dem Gebiete der Naturwissenschaften und in dem Bestreben, diese für Unterricht und Erziehung im weiteren Umfange zu benutzen, die gröfste Reform den früheren Einrichtungen gegenüber liegt. Mögen deshalb solche Fragen auch mehr und mehr Interesse in wissenschaftlichen Kreisen gewinnen, auch hier weiter behandelt werden und ihre Behandlung der Schule und unserer Jugenderziehung zur Förderung gereichen!

Über Vectoranalysis.

Von **H. Burkhardt** (Göttingen).

Wenn ich es heute wage, die Frage nach der zweckmäſsigsten Methode zur analytischen Behandlung physikalischer Probleme zur Discussion zu stellen, sollte ich wohl eigentlich erst die Vorfrage erörtern, ob denn die Physik überhaupt der Mithülfe der Mathematik bedarf. Doch ist das schlieſslich Sache der Physiker selbst; aber so lange unter ihnen noch Leute sich finden, die von der Mathematik feiner geschliffene Waffen als $\int \frac{dv}{v}$ verlangen, hat der Mathematiker das Recht und die Pflicht, sich die Frage vorzulegen, ob die Werkzeuge, die er dem Physiker liefert, ihrem Zwecke so vollkommen als möglich entsprechen. An dieser Frage ist in den letzten Jahren von vielen Seiten her gearbeitet worden; ich darf Ihnen einen Bericht über die Resultate dieser Arbeit vorlegen, ohne den Anspruch zu machen, wesentlich Neues hinzugefügt zu haben.

Das Werkzeug, dessen sich die Mehrzahl der Mathematiker seit $2^1/_2$ Jahrhunderten zur Beherrschung der Raumwelt bedient hat, ist die analytische Geometrie des Cartesius. Sie ersetzt die Beziehungen zwischen räumlichen Gebilden durch Beziehungen zwischen Zahlen, die ihren Elementen zugeordnet werden. Man hat seit lange den Vorwurf gegen sie erhoben, daſs durch Einführung solcher auf ein willkürlich gewähltes Fundamentalsystem bezogenen „Coordinaten" der Aufgabe ursprünglich fremde Elemente in die Betrachtung eingeführt, dadurch der Blick von der Realität der äuſseren Raumwelt abgelenkt und das abstracte Operiren mit Ziffern und Symbolen an Stelle der lebendigen Anschauung gesetzt wird. Schon Leibniz hat eine naturgemäſsere Symbolik für die geometrischen Operationen gefordert: „il nous faut encore une autre analyse proprement géométrique ou linéaire, qui nous exprime directement situm comme l'algèbre magnitudinem"; aber die Analysten des 18. Jahrhunderts hatten genug mit der Entwickelung der Infinitesimalrechnung zu thun. Als dann eine neuere Geometrie entstand, wurden jene Mängel zunächst so stark empfunden, daſs man es vorzog, auf die Dienste, die der Geometrie die Analysis leisten kann, ganz zu verzichten und sich der Reinheit der geometrischen Methode zu freuen. Bald traten dann in ihr die projectiven Eigenschaften in den Vordergrund, d. h. diejenigen, welche allen durch Projectionen aus einander hervorgehenden Gebilden gemeinsam sind. Die angewandte Mathematik hat, abgesehen von der graphischen Behandlung der Statik, diesen Umgestaltungsproceſs der Geometrie nicht mitgemacht, sondern ist den cartesischen Methoden treu geblieben; in der That sind für sie die quantitativen metrischen Verhältnisse viel zu wichtig, als daſs sie sich damit befreunden könnte, diese in zweite Linie gestellt zu

sehen. Um so mehr machten sich ihr die Unbehülflichkeiten der analytischen Geometrie fühlbar; so ging die Reformbewegung von Männern aus, die in den physikalischen und astronomischen Anwendungen der Mathematik zu Hause waren oder ihnen doch wenigstens nahe standen. Weitere Kreise hat sie aber erst erfaſst, als die Faraday-Maxwell'sche Theorie der Elektricität die elektrischen Vorgänge aus den Leitern in das umgebende Medium hinaus verlegt und damit auch dem Elektriker die Notwendigkeit auferlegt hatte, im dreidimensionalen Raume heimisch zu werden. Seitdem hat sich ein groſser Teil namentlich der englisch redenden Physiker ihr zugewandt, und es geht nicht mehr an, diese Bestrebungen als Absonderlichkeiten Einzelner vornehm bei Seite zu schieben.

An der Spitze des Reformprogramms steht die Forderung: man soll nicht mit den Coordinaten geometrischer Gröſsen, sondern mit diesen Gröſsen selbst rechnen — wobei natürlich nicht an das numerische Rechnen mit Ziffern, sondern an das analytische mit Buchstaben zu denken ist. Wie arbeitet nun die gewöhnliche Algebra mit ihren Buchstabensymbolen? Sie führt Namen und Zeichen für gewisse Verknüpfungen ein, die mit den durch diese Symbole dargestellten Objecten — den Zahlen — vorgenommen werden sollen. Sie lehrt dann fundamentale Gesetze kennen, welche aussagen: gewisse Verknüpfungen, mit irgend welchen Objecten in bestimmter Reihenfolge vorgenommen (erst $a+b=d$, dann $cd=e$), geben dasselbe Resultat, wie gewisse andere Verknüpfungen, mit denselben Objecten in bestimmter anderer Reihenfolge vorgenommen ($ac=f$, $bc=g$, $f+g=e$). Sie wendet endlich diese Gesetze an, um solche Übereinstimmung zwischen den Resultaten verschiedener Folgen von Verknüpfungen auch in verwickelteren Fällen zu erkennen.

Die neuen Methoden geometrischer Analysis wollen nun mit den geometrischen Gröſsen selbst rechnen, nicht mit Zahlen, die mit ihnen in mehr oder weniger künstlicher Weise in Verbindung gebracht sind. Das heiſst also: man bezeichne die geometrischen Gebilde selbst durch Buchstaben, die mit ihnen vorzunehmenden Verknüpfungen durch Operationssymbole; man stelle — durch geometrische Überlegungen — die Gesetze auf, nach welchen mit diesen Symbolen zu operiren ist; dann wird man eine groſse Reihe weiterer Beziehungen durch formales Manipuliren mit den Symbolen erhalten können und dabei doch den Vorteil haben, daſs jeder einzelne Schritt eine anschauliche geometrische Bedeutung besitzt. Um das gleich an einem Beispiel zu erläutern: seien die Objecte, die durch Buchstaben bezeichnet werden sollen, die von einem Punkte ausgehenden Strecken, die Operation, die aus zwei solchen Strecken eine neue ableitet, sei die Construction der Diagonale des durch die beiden ersten bestimmten Parallelogramms. Sei etwa $\hat{+}$ das Zeichen

dieser Operation, dann geben elementarste geometrische Überlegungen folgende beiden Eigenschaften derselben:

$$a \mathbin{\widehat{+}} b = b \mathbin{\widehat{+}} a,$$
$$(a \mathbin{\widehat{+}} b) \mathbin{\widehat{+}} c = a \mathbin{\widehat{+}} (b \mathbin{\widehat{+}} c).$$

Aus ihnen kann durch formales Schließen eine große Menge weiterer abgeleitet werden.

Aber geometrischer Objecte und geometrischer Verknüpfungen dieser Objecte giebt es eine unabsehbare Mannigfaltigkeit; welche unter ihnen wird man auswählen, um hier nicht ins Uferlose zu geraten? Die Auswahl, die man thatsächlich getroffen hat, ist in mehr oder weniger bewußter Weise, namentlich nach zwei Gesichtspunkten geschehen.

Der eine ist: man soll nur solche Verknüpfungen der Gebilde betrachten, deren geometrische Definition nur die gegebenen Gebilde selbst benutzt, nicht außerdem auch noch willkürlich gewählte Hülfselemente, wie Coordinatenaxen u. dgl.; wir werden auf die Bedeutung dieser Forderung noch zurückkommen müssen.

Andererseits war für die Auswahl der fundamentalen Operationen die Forderung maßgebend, daß die Verknüpfungsgesetze der gewöhnlichen Algebra, soweit als irgend möglich, auch für sie Geltung haben sollten, so daß die Lehre von den geometrischen Verknüpfungen in der Gestalt einer Erweiterung der Begriffe der gewöhnlichen Algebra auftritt. Das zu verlangen, hat man nun eigentlich von vornherein gar kein Recht als das der Bequemlichkeit; erst der Erfolg kann es nachträglich rechtfertigen, und er hat es eben auch nur in dem Sinne gerechtfertigt, daß er den Erfindern die Klausel „soweit als irgend möglich" aufzwang, die in ihrer ursprünglichen Auffassung gewiß nicht lag. Aber man hatte die Begriffe der Algebra schon mehrfach mit glücklichem Erfolge erweitert, indem man ihre Gesetze, die ursprünglich auf die ganzen Zahlen sich beziehen, auch auf andere Zahlenklassen wesentlich geometrischen Ursprungs — die negativen, gebrochenen, irrationalen Zahlen — übertrug. Dann war das Rechnen mit den sogenannten gemeinen complexen Zahlen gekommen, das allerdings zunächst den Bedürfnissen der Algebra selbst seine Entstehung verdankt, dem aber durch Gauß und Argand eine geometrische Unterlage geschaffen worden war. Ich darf ja hier wohl als bekannt voraussetzen, wie eine complexe Zahl $x + iy$ $(i = \sqrt{-1})$ durch einen Punkt der Ebene — besser noch durch eine vom Coordinatenanfangspunkt ausgehende Strecke (Vector) — repräsentirt wird. Die Addition solcher Zahlen geschieht durch die vorhin erwähnte Parallelogrammconstruction, die Multiplication durch Construction ähnlicher Dreiecke; es wird gezeigt, daß die so defi-

nirten Operationen allen Regeln der gleichnamigen Rechnungsoperationen mit reellen Zahlen gehorchen. Zu beachten ist übrigens dabei, dafs wohl die Addition, nicht aber diese Multiplication „complanarer Vectoren“ der Forderung der Unabhängigkeit vom Coordinatensystem genügt.

An diese geometrische Darstellung der gemeinen complexen Zahlen und des Rechnens mit ihnen knüpften sich alsbald Versuche, eine Gattung complexer, wenn man will übercomplexer Gröfsen zu erfinden, welche für die Geometrie des Raumes das leisten sollten, was für die Ebene dort geglückt war. Dem hat Gaufs durch die Erklärung abgewehrt, dafs „die Relationen zwischen Dingen, die eine Mannigfaltigkeit von mehr als zwei Dimensionen darbieten, nicht noch andere in der allgemeinen Arithmetik zulässige Arten von Gröfsen liefern können.“ In der That mufs man, wenn man eine solche Erweiterung vornehmen will, auf eine oder die andere Eigenschaft der elementaren arithmetischen Operationen verzichten. Entschliefst man sich aber dazu, so kann man auf zweierlei Arten vorgehen. Man kann entweder eine abstracte allgemeine Theorie der Verknüpfungen und ihrer Gesetze an die Spitze stellen, die verschiedenen möglichen Combinationen von Annahmen auf ihre Verträglichkeit prüfen und zu den übrig bleibenden nachträglich geometrische Darstellungen aufsuchen; oder man kann von bestimmten geometrischen Verknüpfungen ausgehen, ihre Eigenschaften bestimmen und nachher zusehen, durch welcherlei complexe Zahlen man sie etwa zweckmäfsigerweise darstellt. Natürlich haben sich in der thatsächlichen Entwickelung beide Gedankengänge vielfach durchkreuzt.

Das erste durchgeführte Beispiel einer geometrischen Analyse (ohne Beziehung auf complexe Zahlen) war der barycentrische Calcul von Möbius; er ist als solcher verschwunden und in die analytische Behandlung der projectiven Geometrie aufgegangen. Dann ist die schon oben erwähnte geometrische Addition der Vectoren von Bellavitis und Grafsmann gelehrt worden. Von einer eigentlichen Vectoranalysis kann man jedoch erst reden, seitdem neben diese Addition auch Multiplicationen getreten sind, die zu ihr in der durch das Distributionsgesetz:

$$a(b+c) = ab + ac$$

gegebenen Beziehung stehen. Solcher Manipulationen hat Grafsmann namentlich zwei entwickelt. Unter dem äufseren Product zweier Strecken (Vectoren) versteht er den Flächeninhalt des von ihnen umschlossenen Parallelogramms, seiner Gröfse und der Stellung seiner Ebene nach; unter dem inneren Product eine Zahl, welche gleich ist dem Product aus den Längenzahlen beider Strecken und dem Cosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Das erstere ist also $ab \sin \gamma$, das letztere $ab \cos \gamma$. Dafs dieses als eine Zahl,

jenes als eine geometrische Gröſse aufzufassen ist, haben Graſsmann und Hamilton durch Überlegungen plausibel gemacht, die letzterer selbst als somewhat metaphysical bezeichnet. Will man sie in mathematische Form bringen, so muſs man zu dem oben erwähnten Postulat der Unabhängigkeit der Verknüpfungsresultate vom Coordinatensystem noch das andere hinzunehmen, daſs man nur solche Gröſsen betrachten will, die rational und ganz von den Componenten der gegebenen Vectoren abhängen.

Keine von beiden Arten der Productbildung liefert also unmittelbar wieder einen Vector als Resultat; man kann aber das äuſsere Product als Vector auffassen, wenn man jede Stellung von Ebenen durch die zu ihr senkrechte Richtung von Geraden ersetzt, Flächenräume durch zu ihnen proportionale und senkrechte Strecken. Bei Graſsmann heiſst das „Übergang zur Ergänzung"; daſs es möglich und zweckmäſsig ist, beruht darauf, daſs in der Geometrie des Strahlenbündels das Dualitätsprincip auch für die metrischen Beziehungen gilt.

Mit diesen Operationen wirtschaftet nun die Vectoralgebra; ich brauche wohl nicht weiter auszuführen, wie es mit ihrer Hülfe in der That gelingt, eine groſse Reihe geometrischer Beziehungen durch eine übersichtliche Symbolik darzustellen. Aber zu eigentlicher Bedeutung gelangt alles das doch erst, wenn man von der „Vectoralgebra" zur „Vectoranalysis" fortschreitet, d. h. „in den Begriff der stetig veränderlichen Gröſse zugleich den Begriff von Verschiedenheiten aufnimmt, welche den Dimensionen des Raumes entsprechen". Bei Graſsmann ist das nur teilweise durchgeführt im Einzelnen; entwickelt ist es von den neueren Physikern englischer Zunge, und zwar zunächst im Anschluſs an Hamilton's System, ganz neuerdings sich davon emancipirend.

Kommt man von der Coordinatengeometrie, so kann man sich leicht klar machen, um was es sich handelt. Der Übergang von einem rechtwinkligen Coordinatensystem zu einem anderen geschieht durch diejenige besondere Art linearer Substitutionen, die man orthogonal nennt. Nun ist es einerseits ein in der Lehre von den linearen Substitutionen wohlbekannter Satz, „daſs sich die Differentiationssymbole zu den Variabeln contragredient substituiren"; andererseits ist eine orthogonale Substitution gerade dadurch charakterisirt, daſs sie zu sich selbst contragredient ist. Daraus entspringt hier die Berechtigung, die Differentialsymbole (d/dx, d/dy, d/dz) selbst wie Vectorcomponenten zu behandeln. Daſs ferner die Verknüpfung einer Funktion ξ mit einer auf sie ausgeübten Differentialoperation d/dx zur Ableitung $d\xi/dx$ in mehrfacher Beziehung den formalen Gesetzen der Multiplication gehorcht, darauf ist man schon früher aufmerksam geworden. Die Verbindung beider Bemerkungen giebt den vectoriellen Operator ∇, dessen Componenten d/dx, d/dy,

d/dz sind, und der mit reinen Zahlgrößsen, sowie mit anderen Vectoren durch die verschiedenen Arten der Multiplication verknüpft werden kann. Dieser Umstand, daßs das ∇ formal wie ein Vector behandelt werden darf, giebt der Differentialrechnung mit Vectoren ihre Eleganz. Er erscheint in den meisten Darstellungen als etwas ganz Geheimnisvolles, das nur zur Auffindung, nicht zum Beweis neuer Sätze dienen könne, enthält aber in der That eine ganz legitime Schlußsweise, die ihre Begründung in den erwähnten Sätzen der Invariantentheorie findet; man mußs nur bei ihrer Verwendung die Regeln beachten, die überhaupt für die Trennung von Operations- und Quantitätssymbolen gelten. Übrigens greifen hier die invariantentheoretischen Untersuchungen über „Endlichkeit der Formensysteme" ein, aus denen hervorgeht, daßs es außser den bereits bekannten vectoriellen Differentialoperatoren keine weiteren giebt. Daraus allein, daßs der „2. Differentialparameter" $\Delta^2 U$ in den verschiedensten Zweigen der Physik auftritt, dürfte nicht geschlossen werden, daßs den in ihnen studirten Erscheinungen dieselben Vorgänge zu Grunde liegen; das ist ein rein mathematischer Satz, sobald man Homogeneität und Isotropie des Mittels voraussetzt und außserdem noch, daßs die Erscheinungen durch Differentialgleichungen II. O. beschrieben werden können.

Weiterhin treten dann in der Vectoranalysis verschiedene Arten von einfachen und Doppelintegralen auf, indem die multiplicative Verbindung zwischen der zu integrirenden Ortsfunction und dem Bogen- oder Flächenelement einmal als innere, das andere Mal als äußsere Multiplication gefaßst wird.

Worin liegen nun die Vorteile einer solchen Symbolik? Von der bedeutenden Abkürzung der Formeln und der dadurch erhöhten Übersichtlichkeit der Rechnung will ich nicht reden; sie allein würde die aufgewandte Mühe nicht lohnen. Aber ich darf vielleicht anführen, was Gaußs zunächst über den baryoentrischen Calcul von Moebius schreibt: „Der Vorteil ist der, daßs, wenn ein solcher Cálcul dem innersten Wesen vielfach vorkommender Bedürfnisse correspondirt, jeder, der sich ihn ganz angeeignet hat, auch ohne die gleichsam unbewußste Inspiration des Genies, die niemand erzwingen kann, die dahingehörigen Aufgaben lösen, ja selbst in verwickelteren Fällen gleichsam mechanisch lösen kann, wo ohne eine solche Hülfe auch das Genie ohnmächtig wird. . . . Es werden durch solche Conceptionen unzählige Aufgaben, die sonst vereinzelt stehen und jedesmal neue Efforts (kleinere oder größsere) des Erfindungsgeistes erfordern, gleichsam zu einem organischen Reiche." Will man bestimmte Punkte genannt sehen, an welchen diese Vorteile zu Tage treten, so möchte ich in erster Linie die Aufstellung der Differentialgleichungen physikalischer Probleme anführen, dann aber auch die Aufstellung einfacher particulärer Integrale derselben, auf

die es schliefslich in der Physik mehr ankommt, als der Mathematiker gewöhnlich denkt.

Was freilich die Vectoranalysis ebensowenig wie irgend eine andere Symbolik zu leisten imstande ist, darf man nicht von ihr fordern wollen. Ein Problem, das nun einmal auf transcendente Functionen führt, kann niemals durch eine andere Art Symbolik algebraisch werden; oder um eine gebräuchliche, wenn auch eigentlich nichtssagende Ausdrucksweise anzuwenden: was man mit Coordinatengeometrie nicht integriren kann, kann man mit Vectoranalysis auch nicht integriren. Man wird vielleicht gewisse Erfolge erzielen können, wenn man eine systematische Theorie transcendenter Functionen von Vectoren aufbaut, wie man eine solche von transcendenten Functionen gewöhnlicher complexer Gröfsen hat; aber dazu ist noch kaum ein Anfang gemacht. (Doch sind neuerdings glückliche Versuche gemacht worden, die Existenzbeweise für Integrale von Differentialgleichungssystemen durch Benutzung complexer Zahlen mit mehreren Einheiten formal zu vereinfachen.) —

Zu besonderer Ausbildung ist ein Zweig der Vectoranalysis gelangt, der von seinem Erfinder Sir W. Rowan Hamilton den Namen Quaternionencalcul bekommen hat. Um seine Stellung innerhalb der Vectoranalysis zu charakterisiren, müssen wir etwas ausholen. Wir haben bisher immer von der Verknüpfung geometrischer Gebilde — seien es nun Punkte, Vectoren oder was sonst — gesprochen. Wir können aber die Gebilde auch als Vertreter geometrischer Operationen ansehen, die ein Gebilde in ein anderes überführen — die Vectoren z. B. als Repräsentanten von Translationen. Insbesondere solche Operationen werden wichtig sein, die sich auf jedes beliebige Raumgebilde anwenden lassen; man nennt sie Transformationen des Raumes in sich. Für sie liegt eine Art der Verknüpfung auf der Hand: führt eine Transformation A jedes Gebilde x in ein anderes x' über, eine zweite Transformation B x' in x'', so giebt es eine Transformation C, die jedes x direct in das zugehörige x'' überführt; diese kann als Resultat einer Verknüpfung von A und B betrachtet werden. Sind die Transformationen speciell Translationen, so ist die hier genannte Verknüpfung bekanntlich genau die mehrfach erwähnte Addition der Vectoren. Ebenso ist bekannt, dafs unendlich kleine Drehungen um Axen desselben Punktes durch Vectoren dargestellt werden können und sich wie Vectoren zusammensetzen. Endliche Drehungen um Axen desselben Mittelpunktes setzen sich ganz anders zusammen; ihre Zusammensetzung wird eben durch die Multiplication der Hamilton'schen Quaternionen dargestellt. Das ist zwar so noch nicht ganz präcise ausgedrückt: eine Quaternion repräsentirt nicht eine Drehung allein, sondern auch noch eine mit dieser verbundene Streckung vom Anfangspunkt aus. Eine solche aus Drehung und

gleichzeitiger Streckung bestehende Operation hängt von vier Parametern ab, und diese können so gewählt werden, dafs bei Zusammensetzung solcher Operationen die Parameter der resultirenden Operation bilineare Functionen der Parameter der componirenden werden. Von dieser Auffassung ist nur noch ein Schritt dazu, dafs man die vier Parameter mit Hülfe „imaginärer Einheiten" zu der viergliedrigen complexen Zahl:

$$ai + bj + ck + d$$

zusammenfafst und die Bildung der genannten bilinearen Functionen als eine Multiplication dieser complexen Zahlen ansieht: und dann hat man eben die Quaternionen.

Sie werden deshalb da am Platze sein, wo es sich in der That um die Gruppe solcher Drehungen und Streckungen handelt. Auch wo es auf Streckungen nicht ankommt, sondern nur auf die Drehungen, lassen sie sich noch mit Vorteil verwenden. Hamilton's Schüler gehen allerdings viel weiter; sie sehen in den Quaternionen nicht ein auf specielle Aufgaben zugeschnittenes specielles Hülfsmittel, sondern eine allgemeine Methode, bestimmt, cartesianische und, wie sie sich ausdrücken, „semicartesianische" Methoden völlig zu verdrängen. In der That haben Hamilton und seine Schüler dem Quaternionencalcul grofse Geschmeidigkeit zu geben verstanden; sieht man aber genauer zu, so erkennt man, dafs das hauptsächlich durch Concessionen erreicht ist, die dem strengen Princip der Methode abgedrungen sind. So ist z. B. das Product zweier Vectoren in der Quaternionentheorie eine Quaternion, deren „Scalarteil" d und „Vectorteil" $ai + bj + ck$, vom Vorzeichen abgesehen, mit dem oben nach Grafsmann definirten inneren und äufseren Product der Vectoren übereinstimmen. Öffnet man nun irgend eines der nachgerade schon zahlreich gewordenen Quaternionenbücher, so findet man es zum grofsen Teil angefüllt mit den Zeichen für Scalarbestandteil und Vectorbestandteil; die für den Quaternionencalcul im Gegensatz zu anderen Formen der Vectoranalysis specifische Zusammenfassung beider tritt dagegen auch äufserlich zurück. Wenn dem nun so ist, so wird man denjenigen Forschern Recht geben müssen, die sagen: der eigentliche Quaternionencalcul ist für den Physiker entbehrlich, und es genügt, wenn er sich mit den beiden Arten von Vectorproducten vertraut macht. Freilich bringt das eine kleine Unbequemlichkeit mit sich: für diesen Standpunkt ist es bequemer, gewisse, an sich ganz willkürliche Vorzeichenfestsetzungen anders zu treffen, als es Hamilton der Quaternionen wegen thun mufste. Verwendet man dabei gleichwohl Hamilton's an sich ganz zweckmäfsige Bezeichnungsweise, so kann das freilich, gerade wegen der Geringfügigkeit der Unterschiede, zu Verwechslungen Anlafs geben; aber diese Unbequemlichkeit reicht nicht aus, uns dazu zu nötigen, dafs

wir in den Formeln des Rechnens mit Vectoren an und für sich überflüssige Minuszeichen den Quaternionen zu Liebe mitschleppen.

Damit werden wir zum Schlusse noch auf eine allgemeinere Frage geführt. Grafsmann sowohl als Hamilton sind der Meinung gewesen, eine allgemeingültige, das ganze Gebiet geometrischer Forschung umspannende Symbolik gefunden zu haben; mit noch mehr Emphase ist das von den Schülern eines jeden verkündet worden. Schon dafs es möglich war, zwei verschiedene solche Systeme aufzustellen, spricht gegen die Naturnotwendigkeit des einen wie des anderen. Aber kann es denn überhaupt eine solche absolute Symbolik geben? Zur Beantwortung solcher Fragen zog man sich sonst wohl auf speculativ-philosophische Gesichtspunkte zurück; seit einem Menschenalter kann man mit einer ganz bestimmten mathematischen Auffassung an sie herantreten.

Geometrische Eigenschaften eines Raumgebildes sind solche, welche gleichzeitig allen zu ihm congruenten zukommen, oder anders ausgedrückt, welche bei allen Bewegungen des Gebildes im Raume ungeändert bleiben. Man kann diesen Begriff geometrischer Eigenschaften verengern und erweitern. Man verengert ihn, wenn man nur solche Eigenschaften berücksichtigt, die auch noch bei anderen Raumtransformationen ungeändert bleiben, also allen den Gebilden gemeinsam sind, die aus dem gegebenen durch solche andere Transformationen hervorgehen (z. B. allen, die zu ihm projectiv, oder allen, die zu ihm kreisverwandt sind). Man erweitert ihn, wenn man nur fordert, dafs die zu untersuchenden Eigenschaften bei solchen Bewegungen ungeändert bleiben, welche ein bestimmtes Raumgebilde in sich überführen; das sind dann nicht eigentlich Eigenschaften des zu untersuchenden Gebildes an sich, sondern Beziehungen desselben zu dem festen ausgezeichneten Gebilde. In jedem Falle hat man es mit einer bestimmten Gruppe von Transformationen des Raumes in sich zu thun; zu jeder solchen Gruppe gehört sozusagen eine eigene Geometrie, und jede dieser Geometrien, genauer gesagt, jeder Typus unter einander ähnlicher Gruppen bedarf seiner eigenen Symbolik. Ist die Symbolik auf eine umfassende Gruppe zugeschnitten, so entschlüpfen ihr die Besonderheiten der engeren Gruppen; ist sie auf eine specielle Klasse von Aufgaben berechnet, so reicht sie für allgemeinere nicht aus. Übrigens ist damit noch keineswegs gesagt, dafs jede dieser Symboliken gerade die Form eines Rechnens mit höheren complexen Zahlen annehmen mufs oder auch nur kann; es wird das vielmehr nur möglich sein, wenn die Gruppe gewisse besondere Eigenschaften besitzt. Die Gruppe der Drehungen um einen festen Punkt hat diese Eigenschaften z. B. an und für sich nicht, sondern erst, wenn man die Streckungen mit hinzunimmt; hierin liegt der innere Grund dafür, dafs Hamilton sich veranlafst gesehen hat, diese letzteren immer mitzuschleppen. Auch

die Gesamtgruppe der Bewegungen hat sie nicht bei gewöhnlicher, Euklidischer, wohl aber bei nichteuklidischer Mafsbestimmung (die anwesenden Physiker mögen entschuldigen, wenn ich mich noch mit ein paar Worten an die Mathematiker wende). Aber die Euklidische Geometrie ist doch ein Grenzfall der nichteuklidischen; es mufs also möglich sein, den Grenzübergang auch in den vorliegenden Formeln vorzunehmen. Das hat zum Teil schon Unverzagt in einem merkwürdigen Buche gethan; sein Resultat läfst sich am besten mit Benutzung einer späteren Kronecker'schen Terminologie aussprechen. Kronecker hat darauf aufmerksam gemacht, dafs alles Rechnen mit Gleichungen zwischen complexen Zahlen angesehen werden kann als Rechnen mit Congruenzen nach einer ganzen Function als Modul (bezw. nach einem Modulsystem). In dem erwähnten Grenzfall wird, wenn anders Unverzagt's Resultate richtig sind, der Modul reducibel, nämlich das Quadrat einer ganzen Function. Es scheint also, als ob die auch in den letzten Arbeiten über höhere complexe Zahlen noch stets festgehaltene Voraussetzung: dafs das Quadrat einer complexen Zahl nicht 0 sein kann, wenn die Basis nicht 0 ist — gerade geometrisch brauchbare Zahlensysteme ausschliefst.

Wie dem auch sei — jedenfalls möchte ich die Ergebnisse des Berichtes, den ich Ihnen erstatten durfte, in folgenden Sätzen resumiren:

Es kann keine allumfassende geometrische Symbolik geben, wie sie Grafsmann und Hamilton sich dachten.

Alles in Quaternionen zwängen zu wollen, ist zwecklos.

Man erhält das für physikalische Zwecke geeignetste System, wenn man Grafsmann's System nach der Seite der Infinitesimalrechnung hin ausbaut.

Über die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren.

Von A. Brill (Tübingen).

Die Aufgabe, die Reductibilität einer Ternärform vermöge einer endlichen und mäfsigen Anzahl von Operationen zu erkennen, erweist sich gerade in dem äufsersten Falle der Zerfällbarkeit in Linearfactoren als der Behandlung am leichtesten zugänglich. In einer Note in den Göttinger Nachrichten vom 20. December 1893 habe ich ein System von unendlich vielen Gleichungen aufgestellt, die erfüllt sind, wenn die Ternärform:

$$f(t) \equiv t^n f_0 + t^{n-1} f_1 + t^{n-2} f_2 + \cdots + f_n,$$

wo f_i eine Binärform i^{ter} Ordnung der Veränderlichen x, y ist, in der angegebenen Weise zerfällt. Man erhält sie in folgender Weise.

Der bekannte Ausdruck für die Summe s_ν (ν ist irgend eine positive ganze Zahl, die später $\geqq n$ angenommen wird) der ν^{ten} Potenzen der n Wurzeln, welche die Gleichung $f(t) = 0$ besitzt, durch die Coefficienten:

$$s_\nu = \left(-\frac{1}{f_0}\right)^\nu (f_1{}^\nu - \nu f_1{}^{\nu-2} f_2 + \cdots)$$

ergiebt für s_ν eine Binärform ν^{ter} Ordnung in x, y. Der Einfachheit halber nehme ich an, die Constante f_0 sei gleich Eins, und die n Wurzeln von $f_n = 0$ seien von einander verschieden, so daſs in $f_n = \psi_1 \psi_2 \cdots \psi_n$ die n Linearfactoren ψ ungleich sind. Wenn nun die Form $f(t)$ in n Ternärformen zerfällt, so hat man:

$$f(t) \equiv (t - \varrho_1 \psi_1)(t - \varrho_2 \psi_2) \cdots\cdots (t - \varrho_n \psi_n),$$

wo das Product der Constanten ϱ gleich $(-1)^n$ ist. Die Ausdrücke s_ν lassen sich alsdann in die Form bringen:

$$s_\nu = \alpha_1^{(\nu)} \psi_1^\nu + \alpha_2^{(\nu)} \psi_2^\nu + \cdots + \alpha_n^{(\nu)} \psi_n^\nu \equiv \sum \alpha_1^{(\nu)} \psi_1^\nu,$$

wo die α Constanten sind.

Bekanntlich ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daſs s_ν in dieser Form darstellbar ist, die, daſs die n^{te} Überschiebung von s_ν über f_n*) $(s_\nu, f_n)_n$ verschwinde. Die Gleichung

$$(s_\nu, f_n)_n = 0$$

ist also für $\nu = n, n+1, n+2, \ldots$ in inf. erfüllt, wenn $f(t)$ in Linearfactoren zerfällt. — Aber es giebt noch andere Gleichungen von niedrigerem Gewicht in den Coefficienten der f_i, die in diesem Falle gleichfalls bestehen.

Führt man nämlich in $f(t)$ statt t den Ausdruck $t + px + qy = t + \varphi$ ein, wo p, q unbestimmte Gröſsen sind, so erhält man

$$f(t+\varphi) \equiv F(t) \equiv t^n + t^{n-1} F_1 + t^{n-2} F_2 + \cdots + F_n,$$

wo
$$F_n = f_n + \varphi f_{n-1} + \cdots + \varphi^n \tag{I}$$

die Linearfactoren $\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n$ besitzen möge. Für kleine Werte der p, q wird dann Ψ_1 die Form annehmen:

$$\Psi_1 = \psi_1 + \varphi[\lambda_1 + (\mu_1 \varphi)_1 + (\nu_1 \varphi)_2 + \cdots\cdots + (\vartheta_1 \varphi)_{n-1} + \cdots]$$

wo λ_1 eine Constante, $(\mu_1 \varphi)_1$, $(\nu_1 \varphi)_2$, ... homogene ganze Ausdrücke 1., 2., ... Ordnung der Gröſsen p, q sind. An die Stelle der Binärformen ν^{ter} Ordnung s_ν treten alsdann die folgenden:

*) Bis auf einen Zahlenfactor ist $(s, f)_k$ gleich

$$\frac{\partial^k s}{\partial x^k} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial y^k} - \binom{k}{1} \frac{\partial^k s}{\partial x^{k-1} \partial y} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x \partial y^{k-1}} + \cdots\cdots (-1)^k \frac{\partial^k s}{\partial y^k} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x^k}.$$

$$S_\nu = s_\nu - \binom{\nu}{1}\varphi s_{\nu-1} + \binom{\nu}{2}\varphi^2 s_{\nu-2} - \cdots + (-1)^\nu \varphi^\nu, \quad \text{(II)}$$

wo die s_i die frühere Bedeutung haben, also von p, q unabhängig sind.

Andererseits verlangt die Zerfällbarkeit der Form $F(t)$, die an diejenige der Form $f(t)$ gebunden ist, wiederum das Verschwinden der n^{ten} Überschiebungen:

$$(S_\nu, F_n)_n = 0. \quad \text{(III)}$$

Ordnet man die linke Seite nach Dimensionen von p, q und jedes Glied mit Hülfe eines bekannten Satzes von Clebsch und Gordan nach Potenzen von φ an, wobei die Coefficienten die Polaren gewisser Formen in x, y nach p, q sind, so müssen diese Formen einzeln verschwinden, wenn die Gleichung (III) für alle p, q und x, y erfüllt ist. Man erhält so die Gleichungen $(s_0 = n)$:

$$\left.\begin{array}{r}
(s_\nu, f_n)_n = 0, \\
(s_\nu, f_{n-1})_{n-1} + \binom{\nu}{1}(s_{\nu-1}, f_n)_{n-1} = 0, \\
(s_\nu, f_{n-2})_{n-2} + \binom{\nu-1}{1}(s_{\nu-1}, f_{n-1})_{n-2} + \binom{\nu}{2}(s_{\nu-2}, f_n)_{n-2} = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
s_\nu + s_{\nu-1}f_1 + s_{\nu-2}f_2 + \cdots\quad\cdots + s_{\nu-n}f_n = 0.
\end{array}\right\} \text{(IV)}$$

Die letzten beiden Gleichungen sind erfüllt, auch wenn $f(t)$ nicht zerfällt. Die anderen bilden das von mir früher angegebene System von Gleichungen, das an die Zerfällbarkeit von $f(t)$ geknüpft ist. Durch das Hesse'sche Verfahren der „Ränderung“ mittelst Liniencoordinaten u, v, w geht die linke Seite der ersten Gleichung, für $\nu = n$ gebildet, in diejenige ternäre Zwischenform über, die ich vor einiger Zeit Herrn Gordan angegeben habe, und von der dieser (Math. Annalen, Bd. 45, S. 413) durch einen einfachen geometrischen Schlufs bewiesen hat, dafs ihr identisches Verschwinden auch die hinreichende Bedingung darstellt. Aber abgesehen davon, dafs die verwickelte Gestalt dieser Ternärform, die noch den überflüssigen Factor $(ux + vy + wt)^2$ besitzt, schon in den einfachsten Fällen eine ausgeführte Darstellung der Coefficienten kaum erlaubt, ist auch die Zahl der Bedingungsgleichungen wegen ihrer gegenseitigen Abhängigkeit erheblich zu grofs.

Ich habe daher die Frage nach den hinreichenden Bedingungen an der Hand der oben entwickelten binären Auffassung von neuem aufgenommen und bin zu dem Ergebnis gelangt, dafs das (für x, y identische) Gleichungssystem (IV), für $\nu = n, n+1, \ldots, 3n-4$ aufgestellt, $\frac{1}{2}(n-1)(2n-3)(3n-4)$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten der $f_1, f_2, \ldots, f_n$ liefert, deren Erfüllung die Zerfällbarkeit von $f(t)$ gewährleistet.

Bezüglich des Beweises deute ich nur an, dafs die Erfüllung der Gleichungen (IV) für $\nu = n, n+1, \ldots, 3n-4$ diejenige von

$$S_j = \sum A_1^{(j)} \Psi_1 \tag{V}$$

für $j = 2n-2,\ 2n-1, \ldots, 3n-4$ nach sich zieht, wo Ψ_1 oben definirt ist und in

$$A_1^{(j)} = \alpha_1^{(j)} + (\beta_1^{(j)}\varphi)_1 + (\gamma_1^{(j)}\varphi)_2 + \cdots$$

$\alpha_1^{(j)}$ eine Constante, $(\beta_1^{(j)}\varphi)_1, \ldots$ homogene Functionen von der 1., 2., ... Ordnung in p, q sind.

Ordnet man die rechten Seiten der Gleichungen (V) wiederum vermöge der Clebsch-Gordan'schen Entwickelung nach Potenzen von φ an und vergleicht sie mit den Potenzenentwickelungen (II) von S_j, so erhält man ein lineares Gleichungssystem für die Coefficienten der Formen $(\beta_i^{(j)}\varphi)_1$, $(\gamma_i^{(j)}\varphi)_2 \ldots$ sowie für $(\mu_i\varphi)_1$, $(\nu_i\varphi)_2 \ldots$, die, wie eine nähere Untersuchung lehrt, nur neben einander bestehen können, wenn der Reihe nach die folgenden Gleichungen identisch hinsichtlich p, q erfüllt sind $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$(\beta_i^{(j)}\varphi)_1 = 0 \text{ für } j = 2n-2,\ 2n-1, \ldots, 3n-4;$$

$$(\gamma_i^{(j)}\varphi)_2 = 0 \text{ für } j = 2n-1,\ 2n, \ldots, 3n-4; \text{ daneben } (\mu_i\varphi)_1 = 0;$$

$$(\delta_i^{(j)}\varphi)_2 = 0 \text{ für } j = 2n,\ 2n+1, \ldots, 3n-4; \text{ daneben } (\nu_i\varphi)_2 = 0;$$

. . . .

endlich $$(\vartheta_i\varphi)_{n-1} = 0.$$

Hieraus folgt aber sogleich

$$\Psi_i = \psi_i + \lambda_i\varphi + \text{Gliedern},$$

die mindestens von der Dimension $n+1$ in p, q sind. Setzt man die Gröfsen Ψ in die linke Seite von (I) ein und vergleicht die Glieder gleich hoher Dimension in p, q der beiden Seiten von (I), so erhält man für $f_1, f_2, \ldots, f_n$ Ausdrücke in den ψ_i und den Constanten λ_i, welche die Zerfällbarkeit aussagen.

Über eine einfache Gruppe von 360 Operationen.

Von Robert Fricke (Braunschweig).

Der Vortrag gab zunächst einen Bericht über die neuerdings von A. Wiman in Lund aufgestellte algebraische Theorie einer gewissen einfachen Gruppe von 360 ebenen Collineationen. Diese

G_{360}, welche mit der Gruppe aller geraden Permutationen von sechs Dingen isomorph ist, besitzt als invariante Curve niederster Ordnung eine C_6, welche bei zweckmäfsiger Auswahl des Coordinatensystems die Gleichung hat:

$$(1)\quad 10\,x^3y^3 + 9\,z\,(x^5 + y^5) - 45\,x^2y^2z^2 - 135\,xyz^4 + 27\,z^6 = 0.$$

Der Hauptgegenstand des Vortrages war die Formulirung des transcendenten Charakters des durch (1) definirten algebraischen Gebildes mit 360 Transformationen in sich.

Man hat auszugehen von der Dreiecksfunction $\zeta\,(2, 4, 5;\, J)$, deren Gruppe sich bei richtiger Auswahl von ζ schreiben läfst:

$$(2)\qquad \zeta' = \frac{(A + B\sqrt{P})\,\zeta + (C + D\sqrt{P})}{(-C + D\sqrt{P})\,\zeta + (A - B\sqrt{P})}.$$

Hierbei ist $P = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; A, B, C, D sind ganze Zahlen des quadratischen Körpers von der Basis $[1, P]$; und die Determinanten der Substitutionen (2) sollen entweder 2 oder 4 sein.

Die Gruppe dieser Substitutionen reducirt sich modulo 3 auf eine endliche G_{360}, welche in abstracto mit der obigen G_{360} identisch ist.

Diese Definition der G_{360} liefert zugleich in der ζ-Ebene ein Netz von $2 \cdot 360$ Dreiecken des Typus (2, 4, 5), welches zusammengebogen eine Riemannsche Fläche des Geschlechtes $p = 10$ mit 360 Transformationen in sich ergiebt. Das zugehörige algebraische Gebilde ist kein anderes als das durch Gleichung (1) dargestellte.

Einen Vorteil des an Gleichung (2) angeschlossenen transcendenten Ansatzes der G_{360} hat man einmal darin zu sehen, dafs die Erkenntnis der Structur der G_{360} von hier aus besonders leicht wird. Vor allem aber gelingt vermöge des transcendenten Ansatzes ohne jede Mühe die explicite Aufstellung jener beiden zur G_{360} gehörenden Resolventen sechsten Grades, deren Existenz auch in den Wiman'schen Entwickelungen eine wichtige Rolle spielt. Als Gestalt dieser Resolventen findet sich:

$$\begin{aligned} J : J - 1 : 1 = (\tau - 5)^4 \left(\tau - \frac{5\,(11 \pm 3\,i\sqrt{15})}{2}\right)^2 \\ : \left(\tau^2 - \left(40 \pm 6\,i\sqrt{15}\right)\tau + 5^4\right) \\ \cdot \left(\tau^2 - \frac{35 \pm 9\,i\sqrt{15}}{2}\,\tau - \frac{55 \pm 15\,i\sqrt{15}}{2}\right)^2 \\ : \mp\, 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2\, i\sqrt{15}\,\tau. \end{aligned}$$

Über einen Satz aus der Theorie der endlichen (discontinuirlichen) Gruppen linearer Substitutionen beliebig vieler Veränderlicher.

Von F. Klein (Göttingen).

Es handelt sich um den Satz, dafs bei jeder solchen Gruppe mindestens eine definite Hermite'sche quadratische Form (mit conjugirt imaginären Variabelen, bez. Coefficienten) invariant bleibt. Dieser Satz ist gleich anfangs in der Theorie der binären Gruppen hervorgetreten, insofern es sich bei ihnen unter Zugrundelegung der an die Riemann'sche Kugelfläche anknüpfenden geometrischen Interpretation um den Nachweis handelt, dafs bei allen Substitutionen der Gruppe notwendig ein im Kugelinneren befindlicher Punkt fest bleibt (Math. Ann. 9, 1875). Später haben Picard und Valentiner den Satz bei den ternären Gruppen in Betracht gezogen. Das allgemeine Theorem wurde erst neuerdings (20. Juli 1896) von A. Loewy veröffentlicht (Comptes Rendus). Vortragender bezog sich andererseits auf eine Mitteilung von Prof. Moore in Chicago, welche ihm dieser für die Verhandlungen der diesmaligen Versammlung zur Verfügung gestellt hatte. Herr Moore hat den allgemeinen Satz ebenfalls bemerkt und giebt folgenden einfachen Beweis. Sei φ_1 irgend eine definite Hermite'sche Form; aus ihr entstehen durch die Substitutionen der vorgelegten endlichen Gruppe $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$. Dann hat man nur $\Sigma\varphi_i$ zu bilden, um sofort eine bei der Gruppe invariante Form zu haben. In der That hat diese Summe nicht nur formale Symmetrie, sondern sie kann auch sicher nicht identisch verschwinden, indem sie als Summe definiter Formen selbst eine definite Form ist. Der Ansatz ist nur dann nicht conclusiv, wenn es sich um eine unendliche Gruppe handelt, insofern man dann vor die Frage der Convergenz der Summe $\Sigma\varphi_i$ gestellt ist, über die man von vornherein nichts auszusagen vermag, — und in der That weifs man schon von den binären Gruppen her, dafs der Satz für unendliche (discontinuirliche) Gruppen linearer Substitutionen keine allgemeine Gültigkeit besitzt. [Wie ich nachträglich erfahre, ist das in Rede stehende Theorem von Hrn. Moore bereits am 10. Juli der mathematischen Gesellschaft in Chicago vorgelegt und im Chicagoer „University Record" vom 24. Juli veröffentlicht worden. Man vergleiche andererseits die inhaltlich nahe verwandten Entwickelungen, welche Herr Fuchs am 9. Juli der Berliner Akademie der Wissenschaften vorgetragen hat (Sitzungsberichte). F. Kl.]

Über eine geometrische Deutung der Invarianten doppelt binärer Formen.

Von **Gustav Kohn** (Wien).

Von seiten der Invariantentheoretiker ist den Formen mit zwei Reihen von binären Veränderlichen, die von einander unabhängigen linearen Substitutionen unterliegen, bisher nicht die Aufmerksamkeit zugewendet worden, welche sie nach meiner Ansicht vermöge ihrer geometrischen Bedeutung verdienen.

Durch Nullsetzen einer solchen doppelt binären Form

$$f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}) = \sum a_{ik} x_1^i x_2^{m-i} y_1^k y_2^{n-k} \qquad \begin{pmatrix} i=0, 1, \cdots, m \\ k=0, 1, \cdots, n \end{pmatrix}$$

wird zunächst eine Correspondenz (m, n) zwischen zwei einstufigen rationalen Trägern gegeben sein, wenn x_1, x_2 als homogene Coordinaten der Elemente des einen Trägers, y_1, y_2 als homogene Coordinaten der Elemente des anderen aufgefaſst werden.

Nimmt man speciell als die Träger die beiden Scharen von Erzeugenden einer und derselben Oberfläche 2. O., so kommt man dazu, die Invariantentheorie der Form f statt mit der Geometrie einer Correspondenz (m, n) mit der projectiven Geometrie einer von den Erzeugenden der einen Schar in je n und denen der anderen Schar in je m Punkten getroffenen Curve C_{m+n} auf der Fläche 2. O. zu identificiren.

Eine andere, und wie es scheint, fruchtbarere Deutung ist es aber, welche den Gegenstand dieses Vortrages bilden soll. Auch diese beruht auf der unmittelbaren Deutung der Form f als Correspondenz, allein sie bewegt sich nicht mehr (für alle Zahlen m, n) im gewöhnlichen Raum von drei Dimensionen.

Hat man im m-dimensionalen Raume R_m eine Normcurve C_m dieses Raumes (d. h. eine nicht zerfallende Curve m-ter Ordnung, die nicht schon in einer (R_{m-1}-) Ebene des R_m liegt), und neben dieser eine rationale Curve n-ter Klasse $C^{(n)}$, so ist eine Correspondenz (m, n) zwischen den Punkten von C_m und den Ebenen von $C^{(n)}$ mitgegeben, nämlich die Correspondenz, welche entsteht, wenn man Punkte von C_m und Ebenen von $C^{(n)}$ als entsprechend ansieht, sobald sie sich in vereinigter Lage befinden.

Man überzeugt sich leicht, daſs man jede doppelt binäre Form f durch eine so hergestellte Correspondenz zwischen den Punkten einer C_m und den Ebenen einer $C^{(n)}$ im R_m interpretiren kann, und zwar nur auf eine Weise, wenn die Arten, die durch Collineation des R_m aus einander ableitbar sind, als nicht verschieden angesehen werden. Infolgedessen kann man sagen:

Die Invariantentheorie einer doppelt binären Form $f(\overset{m}{x}, \overset{n}{y})$, in der die beiden Reihen von Veränderlichen un-

abhängigen linearen Substitutionen unterliegen, kann gedeutet werden als projective Geometrie des Gebildes im R_m, das sich aus einer Normcurve C_m dieses Raumes und einer rationalen Curve $C^{(n)}$ n-ter Klasse zusammensetzt.

Das Verschwinden einer Invariante von f besagt eine projective Lagenbeziehung der Curven C_m und $C^{(n)}$; eine Covariante, in der nur die eine Variabelnreihe x_1, x_2 vorkommt, liefert ein durch die Curven C_m und $C^{(n)}$ auf der ersteren in projectiver Weise bestimmtes Punktsystem; eine Covariante, in der sowohl x_1, x_2 als y_1, y_2 auftreten, hat als geometrisches Bild eine durch die Curven C_m und $C^{(n)}$ in projectiver Weise gegebene Correspondenz zwischen ihren Elementen u. s. w.

Indem ich die Mittheilung von geometrischen Consequenzen dieser Auffassungsweise einer anderen Gelegenheit vorbehalte, möchte ich hier nur eine invariantentheoretische Anwendung zur Sprache bringen, nämlich einen Reciprocitätssatz, der die Invariantentheorie der doppelt binären Formen mit zwei gleichen Gradzahlen durchzieht und seine Bedeutung behält, wenn die beiden Variabelnreihen als cogredient vorausgesetzt werden.

Die Form

$$f(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) = \sum a_{ik} x_1^i x_2^{n-i} y_1^k y_2^{n-k} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

hat die Invariante

$$\Delta = |\, a_{ik} \,|$$

und die Covariante R, die aus ihr durch Ränderung hervorgeht:

$$R(\overset{n}{x}, \overset{n}{y}) =$$

$$\begin{vmatrix}
a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0k} & \cdots & a_{0n} & x_1^n \\
a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1n} & -\binom{n}{1} x_1^{n-1} x_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{i0} & a_{i1} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in} & (-1)^i \binom{n}{i} x_1^{n-i} x_2^i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\
a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{nn} & (-1)^n x_2^n \\
y_1^n & -\binom{n}{1} y_1^{n-1} y_2 & \cdots & (-1)^k \binom{n}{k} y_1^{n-k} y_2^k & \cdots & (-1)^n y_2^n & 0
\end{vmatrix}$$

$$= \sum (-1)^{i+k} \binom{n}{i} \binom{n}{k} A_{ik} x_1^{n-i} x_2^i y_1^{n-k} y_2^k,$$

wo in üblicher Weise A_{ik} die zum Elemente a_{ik} in der Determinante $|\, a_{ik} \,|$ adjungirte Unterdeterminante bedeutet.

Sieht man die Covariante R als die Stammform an und bildet für diese doppelt-binäre Form, welche gleich f in x_1, x_2 sowohl als in y_1, y_2 homogen vom Grade n ist, die Covariante R, so kommt er-

sichtlicherweise, vom Factor Δ^{n-1} und einem Zahlenfactor abgesehen, wieder die Form f zum Vorschein. Dieses Reciprocitätsverhältnis hat zur Folge, dafs einer Invariante (im weitesten Sinne des Worts) Π_i von f immer eine zweite Π_i' gegenübersteht, so zwar, dafs diese Beziehung eine wechselseitige ist und jede Relation zwischen den Invarianten Δ, Π_1, Π_2, $\cdots$, Π_k eine ähnliche Relation zwischen den Invarianten Δ, Π_1', Π_2', $\cdots$, Π_k' nach sich zieht. Die Invariante Π_i' ist dabei nichts anderes als die Invariante Π_i, gebildet für R als Stammform und befreit von der aufgehenden Δ-Potenz; sie entsteht aus Π_i, indem man jeden Coefficienten a_{ik} durch $(-1)^{i+k}\binom{n}{i}\binom{n}{k}A_{n-i,\,n-k}$ ersetzt und den resultirenden Ausdruck durch die höchste in ihm enthaltene Δ-Potenz dividirt.

Damit ist unser Reciprocitätssatz dargelegt. Allein erst unsere geometrische Auffassungsweise erklärt, wie man dazu kommt, die Covariante R aufzustellen und a priori ihre Bedeutung zu erkennen.

Wir haben im R_n das Curvenpaar C_n und $C^{(n)}$. C_n ist eine Normcurve des R_n, und $\Delta \gtrless 0$ ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs auch die Curve $n$ter Klasse $C^{(n)}$ eine Normcurve des R_n sei.

Im Falle $\Delta \gtrless 0$ haben wir zwei Correspondenzen, welche sich wechselseitig bedingen: Die eine, durch $f = 0$ gegebene, weist jeder Schmiegungsebene $C^{(n)}$ ihre Schnittpunkte mit C_n zu, die andere weist den Schmiegungsebenen von C_n ihre Schnittpunkte mit $C^{(n)}$ zu und ist, wie man leicht erkennt, durch $R = 0$ gegeben. Von diesem Gesichtspunkte aus liegt deshalb das Reciprocitätsverhältnis zwischen f und R klar zu Tage.

Über eine specielle Art räumlicher Abbildungen.

Von **G. Landsberg** (Heidelberg).

Der Vortragende berichtet von einem neuen Versuche, die conformen Abbildungen der Ebene in den Raum zu übertragen. Diese Abbildungen sind dadurch charakterisirt, dafs einer unendlich kleinen Kugel des einen Raumes ein unendlich kleines Rotationsellipsoid des anderen (und umgekehrt) entspricht. Bei der analytischen Darstellung werden x, y, z so als Functionen von u, v, w ausgedrückt, dafs

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = m^2(du^2 + dv^2 + dw^2) + n^2 d\varphi^2$$

wird, worin m, n und φ irgend welche Functionen von u, v, w sind. Die Untersuchung einiger specieller Fälle dieser Abbildung beschliefst den Vortrag.

Über volle Systeme in der ebenen Trigonometrie.

Von W. Franz Meyer (Clausthal).

Greift man aus der Gesamtheit der Formeln der ebenen Trigonometrie gewisse, wohl definirte Gebiete heraus — z. B. das Gebiet der Formeln, die aussagen, daſs die Summe dreier Winkel $= 2R$ (mod. $4R$) ist, oder das Gebiet der Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines ebenen Dreiecks —, so wird man auch eine übersichtliche Darstellung aller Formeln eines solchen Gebietes fordern dürfen. Schlieſst man numerische Coefficienten transcendenter Natur aus, so wird die gemeinte Darstellung eine rein arithmetische sein sollen, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Formeln eines Gebietes werden in einer abzählbaren Reihe anzuordnen sein, so daſs man auch umgekehrt jeder vorgegebenen Formel des Gebietes ihre bestimmte Stelle zuweisen kann. Eine Einteilung der Formeln in verschiedene algebraische Stufen, von der einfachsten Stufe aufsteigend, vollzieht sich dabei von selbst.

Für das zu zweit genannte Gebiet, nämlich das der „Trigonometrie des ebenen Dreiecks", ist die Aufgabe leicht lösbar.

Bezeichnet man (i, k, $l = 1, 2, 3$) mit a_i drei Längen, mit α_i drei Winkel, ferner mit $2A_i$, B_i die Ausdrücke

$$(1)\quad 2A_i \equiv a_k^2 + a_l^2 - a_i^2 - 2a_k a_l \cos\alpha_i,\quad B_i \equiv a_i - a_k \cos\alpha_l - a_l \cos\alpha_k,$$

so ergiebt sich sofort für die Werte der a_i:

$$(2)\qquad a_i = \frac{A_k + A_l}{B_i},$$

die man nur in

$$(3)\qquad \cos\alpha_i = \frac{a_k^2 + a_l^2 - a_i^2 - 2A_i}{2a_k a_l}$$

einzusetzen hat, um sowohl die a, wie die $\cos\alpha$ als rationale Functionen der A, B ausgedrückt zu haben.

Offenbar stellt jede algebraische Function der A, B, die mit denselben zugleich verschwindet, eine Formel der Trigonometrie des ebenen Dreiecks mit den Seiten a und den Winkeln α dar, und umgekehrt läſst sich jede vorgegebene solche Formel (algebraischen Charakters) vermöge (2), (3), in die angegebene Form bringen. Oder auch: Die Formeln der Trigonometrie des ebenen Dreiecks lassen sich vermöge der Formeln des „Cosinussatzes" und des „Projectionssatzes" mit nur numerischen Coefficienten darstellen. Das obige Ergebnis ist der Grenzfall eines vom Verfasser für das Gebiet der sphärischen Trigonometrie ausgesprochenen Satzes (Ztschr. f. Math. CXV, bes. S. 217—218).

Weniger leicht ist die Lösung der Aufgabe für das zuerst bezeichnete Gebiet der Formeln, die aussagen, dafs die Summe dreier Winkel α_1, α_2, α_3 gleich $2R$ (mod. $4R$) ist. Bedeutet σ die halbe Summe der α, so führe man die drei Ausdrücke ein

$$(4) \qquad G_i \equiv \cos\frac{\alpha_i}{2}\cos\sigma.$$

Mit Hülfe der Gleichung, die $\cos\sigma$ als ganze algebraische Function (vierten Grades) der $\cos\alpha$ liefert, erhält man $\cos^2\sigma$ und damit auch $\cos^2\frac{\alpha_i}{2}$ und $\cos\alpha_i$ als (ganze) allgemeine algebraische Functionen fünften Grades der G.

Beschränkt man sich daher auf solche Formeln, die nur die $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ mit sich führen, so bedarf man behufs Darstellung vermöge der G, mit nur numerischen Coefficienten, abgesehen von Quadratwurzeln, nur einer (allgemeinen) Irrationalität fünften Grades.

Einfacher gelangt man zum Ziel, wenn man die drei Ausdrücke

$$(5) \qquad H_i \equiv \operatorname{tg}\frac{\alpha_i}{2}\cos\sigma$$

zu Grunde legt; $\operatorname{cotg}\sigma$ wird eine algebraische Function zweiten Grades der H, und, bei obiger Beschränkung, sind also die einzigen, bei der gemeinten Darstellung in Betracht kommenden Irrationalitäten Quadratwurzeln.

Mit Hülfe der Ausdrücke $B(1)$ gelangt man so zu einer zweiten, manche Vorteile bietenden Lösung der erstbehandelten Aufgabe.

Die skizzirte algebraische Methode läfst sich auch mit Erfolg dazu verwenden, um reducible trigonometrische Formeln in ihre irreducibeln Bestandteile zu spalten.

Über das Goldbach'sche Gesetz.

Von R. Haufsner (Würzburg).

Das sogenannte Goldbach'sche Gesetz*) behauptet bekanntlich, dafs sich jede gerade Zahl $2n$ immer als Summe zweier Primzahlen x und y darstellen läfst. Für diese Behauptung läfst sich bis heute

*) Goldbach scheint zuerst dieses Gesetz bemerkt zu haben. Er teilte dann Euler seine Wahrnehmung mit, wie aus einem Briefe desselben an Goldbach (d. d. 30. Juni 1742) ersichtlich ist. Cf. P. H. Fufs, Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^e siècle. St. Pétersbourg 1843, t. I. Euler bemerkt in dem erwähnten Briefe noch, dafs zwei weitere von Goldbach aufgestellte Sätze

noch kein Beweis erbringen, und noch weniger ist es möglich, die Anzahl derartiger Zerlegungen jeder geraden Zahl independent anzugeben. Es war daher mit Dank zu begrüßsen, daß Herr G. Cantor eine experimentelle Prüfung dieses Gesetzes für alle geraden Zahlen bis 1000 vornehmen ließs und dieselbe in Gestalt einer Tabelle veröffentlichte.*) Diese Tabelle giebt für jede gerade Zahl $2n$ alle Zerlegungen in zwei Primzahlsummanden x und y, von denen $x \leqq y$ vorausgesetzt wird, in der Weise, daß sie die sämtlichen zugehörigen Primzahlen x und die Anzahl ν dieser letzteren angiebt.**) Es folgt aus dieser Tabelle, daß das Goldbach'sche Gesetz streng richtig ist, und daß die Werte von ν, welche zwar Schwankungen zeigen, wie sie derartigen zahlentheoretischen Functionen eigentümlich sind, eine fortwährende Zunahme mit wachsenden Werten von n erkennen lassen.

Da nun in dem ersten Tausend ganzer Zahlen sich bei weitem mehr Primzahlen befinden als in den folgenden Tausenden — I. Tausend: 169 Primzahlen, II: 135, III: 127, IV: 120, V: 119 —, so schien es mir wünschenswert, die Prüfung des Gesetzes weiter auszudehnen, als dies Herr Cantor gethan hatte. Besonders aber wünschte ich weiteres Material zu erhalten, um das Verhalten von ν näher studiren zu können. Aus diesen Gründen habe ich die Zerlegungen aller geraden Zahlen bis 5000 nach einem von mir angegebenen Verfahren berechnen und zu einer Tabelle zusammenstellen lassen.***) Es war zuerst beabsichtigt, die Prüfung des Gesetzes auf alle geraden Zahlen bis 10 000 auszudehnen; da aber der Umfang der Tabelle immer schneller wächst, je höher die obere Grenze derselben gewählt wird, so war die Beschränkung auf 5000 unbedingt geboten, um einen allzu großsen Umfang der Tabelle zu vermeiden.

---

sich sofort als richtig nachweisen lassen, wenn man das Goldbach'sche Gesetz als richtig annimmt; es sind dies die Sätze:

1) Jede ungerade Zahl läßt sich immer als Summe dreier Primzahlen darstellen;
2) Jede ganze Zahl g läßt sich als Summe von beliebig vielen Primzahlen, bis schließlich als Summe von g Einheiten darstellen.

Lucas schreibt in seiner Théorie des nombres, t. I, Paris 1891, die Aufstellung des in Rede stehenden Satzes Waring (Meditationes algebraicae) zu; jedenfalls gebührt aber Goldbach die Priorität.

*) Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Caen. 1894.

**) Die Zahl 1 ist von Herrn Cantor und mir zu den Primzahlen hinzugezählt. Darüber, ob dies berechtigt ist, sind ja die Meinungen geteilt. Es hat diese Festsetzung aber hier den Vorteil, daß auch die Zahl 2 dem Goldbach'schen Gesetze gehorcht, für welche nur die Zerlegung 1 + 1 möglich ist. Für alle anderen geraden Zahlen ist diese Festsetzung unwesentlich, da für diese ν ausnahmslos größer als 1 ist.

***) Diese Tabelle wird mit einem ausführlicheren Texte in Kürze in den Nova Acta der Kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher (Bd. LXXII) erscheinen.

Es sei mir nun hier gestattet, die aus dieser Tabelle sich ergebenden Resultate kurz mitzuteilen. Zunächst zeigt es sich, dafs das Goldbach'sche Gesetz für alle geprüften Zahlen ausnahmslos gültig ist. Ich kann sogar die Gültigkeit des Gesetzes für alle geraden Zahlen bis 10000 bestätigen. Auch die von Herrn Cantor in seiner Tabelle gemachte Wahrnehmung, dafs die Anzahl ν der Zerlegungen jeder geraden Zahl $2n$ — von den vorher erwähnten zahlentheoretischen Schwankungen abgesehen — mit wachsendem n beständig wächst, erweist sich weiterhin als richtig. So ist z. B. $\nu > 10$, wenn $2n > 428$ ist, und $\nu > 20$, wenn $2n > 1412$ ist. Gerade dieser Umstand aber spricht besonders dafür, dafs das Goldbach'sche Gesetz wohl allgemein gültig ist.

Betrachtet man die Reihe der Zahlen ν, so fällt sofort eine weitere merkwürdige Gesetzmäfsigkeit auf, welche Herr Cantor — nach einer mir gemachten mündlichen Mitteilung — schon früher in seiner Tabelle bemerkt hatte. Es zeigt sich nämlich, dafs bei allen Zahlen $2n$, welche durch 3 teilbar sind, ν ein relatives Maximum in Bezug auf die zu den beiden vorhergehenden und den beiden folgenden Zahlen $2n$ gehörenden Werte ν hat. Diese Erscheinung tritt von $2n = 36$ an — bis dahin sind die Werte von ν zu klein, um dieselbe erkennen zu lassen — durch die ganze Tabelle hindurch scharf zu Tage, mit der einzigen Ausnahme, dafs zu $2n = 1540$ und zu $2n = 1542$ dieselbe Zahl ν gehört. Der Wert von ν, welcher zu einer durch 3 teilbaren Zahl $2n$ gehört, ist also ausnahmslos die obere Grenze für die Zahlen ν, welche zu den beiden unmittelbar vorangehenden Zahlen $2n$ gehören. Die Erklärung für diese Erscheinung liegt darin, dafs die Zahlen $2n$ von der Form $6m$ Zerlegungen in Primzahlen von der Form zulassen, dafs entweder $x = 3k + 1$, $y = 3l + 2$ oder $x = 3k + 2$, $y = 3l + 1$ ist, während die Zahlen $2n$ von der Form $6m + 2$ nur Zerlegungen $x = 3k + 1$, $y = 3l + 1$ und die Zahlen $2n$ von der Form $6m + 4$ nur Zerlegungen $x = 3k + 2$, $y = 3l + 2$ zulassen (in den beiden letzten Fällen kann event. noch die eine Zerlegung $x = 3$, $y = 2n - 3$ vorkommen). Wären nun alle ungeraden Zahlen Primzahlen, so müfsten für die ν der durch 3 teilbaren Zahlen $2n$ relative Maxima auftreten; bei der höchst unregelmäfsigen Verteilung der Primzahlen aber ist diese scharfe Ausprägung der relativen Maxima, wie sie die Tabelle zeigt, sehr überraschend und bemerkenswert.

Diese Gesetzmäfsigkeit der Zahlen ν in Bezug auf die Zahl 3 legt den Gedanken nahe, zu untersuchen, ob sich in Bezug auf die übrigen Primzahlen ähnliche Regeln ergeben. Teilt man die Zahlen $2n$ nach ihren Resten R modulo 5 ein, so ergiebt sich für die möglichen Zerlegungen die folgende Tabelle:

R	x	y
0	$5k+1$	$5l+4$
	$5k+2$	$5l+3$
	$5k+3$	$5l+2$
	$5k+4$	$5l+1$
2	$5k+1$	$5l+1$
	$5k+3$	$5l+4$
	$5k+4$	$5l+3$
4	$5k+1$	$5l+3$
	$5k+2$	$5l+2$
	$5k+3$	$5l+1$
6	$5k+2$	$5l+4$
	$5k+3$	$5l+3$
	$5k+4$	$5l+2$
8	$5k+1$	$5l+2$
	$5k+2$	$5l+1$
	$5k+4$	$5l+4$

(für $R = 2, 4, 6, 8$:) event. noch $x = 5$, $y = 2n - 5$.

Es sind also für alle durch 5 teilbaren Zahlen $2n$ gröfsere Werte von ν zu erwarten als für die benachbarten Zahlen. Um die Tabelle daraufhin zu prüfen, mufs natürlich die vorher constatirte Gesetzmäfsigkeit in Bezug auf 3 berücksichtigt und deshalb die Untersuchung der Zahlen ν in doppelter Weise geführt werden. Erstens hat man die Reihe aller durch 3 teilbaren Zahlen $2n$ zu prüfen und zweitens die Reihe der Zahlen $2n$, welche übrig bleiben, nachdem aus den sämtlichen Zahlen $2n$ alle nur durch 3 und nicht zugleich auch durch 5 teilbaren Zahlen herausgestrichen sind. In beiden Fällen bildet mit wenigen Ausnahmen die Zahl ν, welche zu einer durch 5 teilbaren Zahl gehört, die obere Grenze für die Werte der ν, welche zu den unmittelbar vorangehenden, nicht durch 5 teilbaren Zahlen $2n$ gehören; meistens prägen sich sogar noch relative Maxima scharf aus. Wenn auch Ausnahmen, wie schon erwähnt, in diesem Falle vorhanden sind, so ist doch immerhin die Gesetzmäfsigkeit noch eine auffallende in Anbetracht der unregelmäfsigen Verteilung der Primzahlen.

In gleicher Weise kann man die Untersuchung fortsetzen und zunächst eine Prüfung der Zahlen ν in Bezug auf die Zahl 7 vornehmen. Aus dem analogen Grunde ist zu erwarten, dafs der zu einer durch 7 teilbaren Zahl $2n$ gehörende Wert von ν die obere Grenze liefert für die Werte ν aller Zahlen $2n$, welche zwischen der betreffenden und der vorangehenden durch 7 teilbaren Zahl liegen. Jetzt sind vier verschiedene Zahlenreihen zu prüfen, nämlich

1. die Reihe der durch $3 \cdot 5$ teilbaren Zahlen $2n$;
2. die Reihe der durch 3 teilbaren Zahlen $2n$, nachdem aus

dieser Reihe die durch 5 und nicht zugleich auch durch 7 teilbaren Zahlen gestrichen sind;
3. die Reihe der durch 5 teilbaren Zahlen $2n$, nachdem aus dieser Reihe die durch 3 und nicht zugleich auch durch 7 teilbaren Zahlen gestrichen sind;
4. die Reihe aller Zahlen $2n$, nachdem aus dieser die durch 3 oder 5 und nicht zugleich auch durch 7 teilbaren Zahlen gestrichen sind.

In der That zeigt sich für die vier Reihen die oben ausgesprochene Vermutung mit wenigen Ausnahmen bestätigt.

Setzt man in dieser Weise die Untersuchung fort, so sind, wenn man 1 als erste, 2 als zweite, 3 als dritte Primzahl u. s. f. bezeichnet, für die n^{te} Primzahl p im ganzen 2^{n-3} derartiger Zahlenreihen zu untersuchen. In jeder dieser Reihen ist die Zahl ν, welche zu einer durch p teilbaren Zahl $2n$ gehört, mit wenigen Ausnahmen die obere Grenze für die Werte ν aller Zahlen $2n$, welche zwischen der betreffenden und der vorangehenden durch p teilbaren Zahl liegen.

Da es vorläufig als ganz unmöglich erscheint, ν als Function von n zu bestimmen, so ist die Feststellung der obigen Regelmäfsigkeiten wohl nicht ohne Interesse; es scheint also ν wesentlich davon abzuhängen, durch welche Primzahlen $2n$ teilbar ist, nicht aber davon, wie oft $2n$ durch eine derselben teilbar ist.

Im übrigen mufs ich hier auf den die Tafel selbst begleitenden ausführlichen Text verweisen. Es sei mir nur noch erlaubt, kurz zu zeigen, wie sich ein Apparat construiren läfst, mittelst dessen man alle Zerlegungen jeder geraden Zahl $\leqq 2N$ in Primzahlsummanden ohne jede Rechnung erhalten kann. Man schreibt auf zwei parallele Streifen alle ungeraden Zahlen von 1 bis $2N - 1$ in gleichen Abständen von einander, auf den einen Streifen in aufsteigender, auf den anderen in fallender Reihenfolge; die Primzahlen werden auf beiden Streifen irgendwie hervorgehoben. Verschiebt man dann beide Streifen so längs einander, dafs die Zahl 1 des ersten Streifens der Zahl $2n - 1$ des zweiten Streifens, wo $n \leqq N$ ist, gegenübersteht, so ergeben alle Fälle, in denen sich auf beiden Streifen Primzahlen gegenüberstehen, alle Zerlegungen von $2n$ in zwei Primzahlsummanden*); dabei hat man nur alle Primzahlen des ersten Streifens zu berücksichtigen, welche $\leqq n$ sind. Zur gröfseren Bequemlichkeit müfsten beide Streifen nach erfolgter Einstellung von einer Rolle ab und auf eine andere aufgewickelt werden. Es läfst sich dann noch leicht ein Zählwerk anbringen, welches die Zahl ν nach erfolgter Abwickelung angiebt.

*) Nur die Zerlegung $4 = 2 + 2$ ergiebt sich nicht; diese nimmt aber überhaupt eine Ausnahmestellung ein, da sie die einzige Zerlegung ist, bei welcher die Zahl 2 auftreten kann. Indem man diese Zerlegung aufser Acht läfst, hat man den Vorteil, nur die ungeraden Zahlen zu brauchen.

Über Nachbarconfigurationen, Tripelsysteme und metacyklische Gruppen.

Von L. Heffter (Giefsen).

Das zuerst von Steiner (Ges. Werke II, S. 436) aufgestellte Problem der Tripelsysteme, das eine eingehende Behandlung durch die Herren Noether (Math. Ann. 15), Netto („Substitutionentheorie" und Math. Ann. 42) und Moore (Math. Ann. 43) gefunden hat, steht in gewissen Fällen zu dem vom Vortragenden früher bearbeiteten Problem der Nachbarelemente (Math. Ann. 38) in Beziehung.

Tripelsysteme existiren bei den Zahlen $n = 6m + 1$ und $n = 6m + 3$. Herr Netto hat gezeigt, wie bei den Primzahlen der Form $6m + 1$ eine gewisse cyklische Anordnung der Tripel möglich ist; ähnlich bei bestimmten Fällen der Form $6m + 3$. Solche cyklische Anordnungen sind noch in weiteren Fällen direct ablesbar aus jenen vom Vortragenden aufgestellten Nachbarconfigurationen.

Überhaupt läfst sich die Herstellung eines cyklischen Tripelsystems für $6m + 1$ auf die Lösung des folgenden einfacheren Problems zurückführen: „Aus den Zahlen $1, 2, \cdots, 6m$ sind m Gruppen von je dreien zu bilden, so dafs

1) die Summe der 3 Zahlen stets $\equiv 0 \mod. 6m + 1$ ist,
2) alle $3m$ Zahlen von einander verschieden sind,
3) nicht 2 der $3m$ Zahlen sich zu $6m + 1$ ergänzen."

Dieses Problem scheint stets lösbar zu sein.

Ähnliches gilt bei den Zahlen der Form $6m + 3$. —

Andererseits führt eine einfache geometrische Veranschaulichung der metacyklischen Gruppen, welche der allgemeinen geometrischen Gruppeninterpretation von Herrn Dyck (Math. Ann. 20) verwandt ist, ebenfalls auf Nachbargebiete.

Wenn p eine Primzahl und g eine zugehörige primitive Congruenzwurzel ist, so werden die $p(p-1)$ Substitutionen der metacyklischen Gruppe aus den Elementen $0, 1, \cdots, p-1$ durch die beiden Substitutionen

$$s = (z,\ gz), \quad t = (z,\ z+1)$$

erzeugt, wobei alle Zahlen mod. p zu nehmen sind. Wendet man die $p(p-1)$ Substitutionen auf das Element 1 an, so ergiebt sich

$$\begin{array}{lllll} g^0, & g^1, & g^2, & \cdots, & g^{p-2}, \\ g^0+1, & g^1+1, & g^2+1, & \cdots, & g^{p-2}+1, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ g^0+p-1, & g^1+p-1, & g^2+p-1, & \cdots, & g^{p-2}+p-1. \end{array}$$

Unterwirft man dieses Tableau der Substitution t, so vertauschen sich die Zeilen cyklisch; bei der Substitution s verschiebt sich die erste Zeile nur cyklisch in sich selbst, die übrigen vertauschen sich außerdem cyklisch unter einander in bestimmter Folge.

Dies gestattet folgende geometrische Deutung. Die p Zeilen seien p ebene $(p-1)$-Ecke, deren Ecken der Reihe nach (immer mit demselben Drehungssinn) mit den betreffenden $p-1$ Zahlen bezeichnet werden. Dann schließen sich die p Polygone zu einem Polyeder von bestimmtem Geschlecht zusammen, auf dem sie p Nachbargebiete bilden. (Falls p die Form $4\pi + 1$ hat, hat das Polyeder auch nur n Ecken, die gleichzeitig Nachbarpunkte sind.) Aus den besprochenen Eigenschaften des Tableaus folgt nun unmittelbar:

Die metacyklische Gruppe ist identisch mit der Gruppe der Drehungen dieser Nachbarconfiguration im Sinne der Analysis Situs.

Über continuirliche Gruppen von Cremona-Transformationen.

Von **M. Noether** (Erlangen).

Der Vortragende bespricht diese Gruppen zunächst aus Anlaß einer im Januar 1896 der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen durch Herrn F. Klein vorgelegten Note von Herrn G. Bohlmann: „Continuirliche Gruppen von quadratischen Transformationen der Ebene". Die Absicht dabei ist: erstens zu zeigen, daß diese Note, wenn sie auch in ihrem Resultate, daß es zweierlei continuirliche Gruppen von quadratischen Ebenentransformationen giebt, richtig ist, doch in ihrer Beweisführung eine Lücke hat, indem diejenigen Transformationen, deren drei Fundamentalpunkte consecutive Punkte sind, übersehen sind; sodann darauf hinzuweisen, daß die Aufgabe in allgemeinerer Gestalt, nämlich durch Aufstellung sämtlicher „Typen" von continuirlichen Gruppen von eindeutigen Ebenentransformationen irgend einer Ordnung, schon seit 1893 in der italienischen mathematischen Litteratur gelöst ist (s. F. Enriques in Rendic. della R. Accad. dei Lincei vom 21. Mai 1893). Hauptsächlich aber soll eine Erweiterung auf die continuirlichen Gruppen von quadratischen eindeutigen Raum-Transformationen gegeben werden. Von letzteren giebt es fünf verschiedene Arten:

1. Die Gruppe, welche die durch einen festen Kegelschnitt gehenden Flächen zweiter Ordnung in einander überführt; mit 10 Parametern (ähnlich der Gruppe der Kugeltransformationen).

2. Eine Gruppe, welche die durch zwei sich schneidende Gerade gehenden Flächen zweiter Ordnung in einander überführt und damit auch zwei Ebenenbüschel in sich; mit 11 Parametern.

3. Eine Gruppe, welche die Kegelflächen zweiter Ordnung, die sich längs einer festen Erzeugenden berühren, in einander überführt; mit 13 Parametern.

4. Eine Gruppe, welche die durch eine Gerade und einen derselben nicht benachbarten Punkt gehenden Flächen zweiter Ordnung in einander überführt; mit 11 Parametern.

5. Eine Gruppe, welche die durch eine Gerade gehenden Flächen zweiter Ordnung, die sich noch in einem Punkte derselben berühren, in einander überführt; mit 13 Parametern.

Dazu kommen nur noch die Untergruppen dieser Gruppen.

Cribrum algebraicum oder die cofunctionale Entstehung der Primzahlen.

Von H. Schapira (Heidelberg).

Das älteste und einfachste Mittel, um alle Primzahlen zu erhalten, ist bekanntlich das von Eratosthenes unter dem Namen Cribrum gebrauchte Aussiebeverfahren, welches in dem Ausstreichen jeder $n$ten Zahl hinter der Zahl n in der natürlichen Zahlenreihe besteht. Nachdem ich nun mehrfach gezeigt habe, wie man die nicht mathematische Operation des Streichens oder Weglassens gewisser Glieder durch den mathematischen Begriff des Substituirens von algebraischen Gröfsen immer ersetzen kann, war es klar, dafs es auch möglich sein mufs, die Primzahlen vermittelst algebraischer Operationen zu erhalten; was ich in der That bereits in meinem Vortrage in der mathematischen Section der Naturforscherversammlung in Baden-Baden 1879*) an Beispielen gezeigt habe.

Es scheint aber nicht genügend beobachtet worden zu sein, dafs in dem angedeuteten Verfahren die algebraische (oder, wie wir sehen werden, richtiger die algebraisch-logarithmische) Abhängigkeit der Primzahlen von einander in einer Weise ausgesprochen ist, aus der man fruchtbare Consequenzen leicht ziehen kann.

Wir betrachten folgende Operationen:

1) Ist $f(x) = \sum a_q x^q$ eine beliebig gegebene convergente Potenzreihe, so bedeute zunächst nur rein formal $\mathfrak{d}(f(x)) = \sum \delta_q a_q x^q$ diejenige in eindeutiger Weise aus $f(x)$ gebildete Potenzreihe, in der jedes Glied $a_q x^q$ mit einem Factor δ_q multiplicirt wird, wenn mit

---

*) Vgl. „Gegenseitigkeit von Partial- und circumplexen Functionen und Reihen", Vortrag etc. von Hermann Schapira. 1879. (Tagebl. der 52. Vers. D. N. u. A. zu Baden-Baden 1879, pag. 174.)

δ_q die Anzahl aller Divisoren von q bezeichnet wird. Die Convergenz der Reihe $\mathfrak{d}(f(x))$ wird mit Hülfe der folgenden Betrachtungen leicht anzugeben sein. So lange q von Null und ∞ verschieden ist, ist δ_q ebenfalls von Null und ∞ verschieden, und es wird daher kein Glied in $\mathfrak{d}(f(x))$ fehlen, welches nicht bereits in $f(x)$ gefehlt hat. Die k-fache Iteration dieser Operation $\mathfrak{d}^{(k)}(f(x)) = \sum \delta_q^k a_q x^q$ besitzt dieselbe Eigenschaft für alle ganzen, positiven und negativen Werte von k. Es besitzt somit jede Reihe $\mathfrak{d}^{(k)}(f(x))$ alle Glieder, die in $f(x)$ enthalten sind, und nur solche. Was aber die ferneren Werte der Coefficienten δ_q betrifft, so liegt in ihrer Definition die Eigentümlichkeit, die Glieder der Potenzreihe, insofern die Convergenzbedingung es zuläſst, in Gruppen zu ordnen nach den Werten $\delta_k = 1, 2, 3, \cdots$, wobei der Wert $\delta_k = 1$ allen solchen und nur solchen Gliedern zukommen wird, deren Exponent eine Primzahl ist; man wird dann 1 als Primzahl auffassen. Daraus folgt, daſs wenn $f(x)$ überhaupt keine anderen Glieder besitzt, als solche mit Primzahlexponenten, die beschriebene Operation dann und nur dann $f(x)$ unverändert läſst. Nennen wir eine solche Reihe Primpotenzreihe und bezeichnen dieselbe mit $p(x)$, so ist $\mathfrak{d}^{(k)}(p(x)) = p(x)$; also $p(x)$ ist eine Lösung der operativen Gleichung $\mathfrak{d}^{(k)}(f(x)) = f(x)$ für beliebige ganzzahlige k. Ferner wird, wenn $a_0 = 0$, die Differenz

$$\mathfrak{d}(f(x)) - f(x) = \sum (\delta_q - 1) a_q x^q$$

nur solche Glieder enthalten, deren Exponenten keine Primzahlen sind, also ein umgekehrtes Cribrum Eratosthenis.

2) Wir betrachten ferner folgende Operation. Wir benutzen unsere Bezeichnung $f_{n,i}(x) = \sum a_{qn+i} x^{qn+i}$ und Benennung als $i$te Partialfunction $n$ter Klasse in dem von uns oft gebrauchten Sinne und bemerken, daſs für $a_0 = 0$ die einfachste nullte Partialfunction $n$ter Klasse $a_n x^n$ sein wird, und wenn wir diese von der allgemeinen subtrahiren, so nennen wir die Differenz die reducirte nullte Partialfunction $n$ter Klasse, in der sämtliche Glieder, deren Exponenten Multipla von n sind, unverändert wie in der Hauptfunction bleiben, nur daſs das einzige Glied $a_n x^n$ fehlt.

Nimmt man nun $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$ als Hauptfunction und subtrahirt von derselben ihre reducirte nullte Partialfunction zweiter Klasse, so erhält man

$$f_2(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \cdots + a_{2q+1} x^{2q+1} \ldots,$$

in welcher nach 2 alle Primzahlen als Exponenten auftreten, welche überhaupt zwischen 3 und $3^2 = 9$ vorhanden sind.

Legt man jetzt $f_2(x)$ als Hauptfunction zu Grunde und subtrahirt von derselben ihre reducirte nullte Partialfunction 3. Klasse (3 ist der erste auf 2 folgende Exponent), so erhält man in

$$f_3(x) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + a_{11} x^{11} + \cdots + a_{23} x^{23} + a_{25} x^{25} + \cdots$$

ununterbrochen alle Primzahlexponenten, welche kleiner als 5^2 sind. Subtrahirt man von $f_3(x)$ ihre nullte Partialfunction 5. Klasse (5 ist der auf 3 folgende Exponent), so liefert $f_4(x)$ ununterbrochen alle Primzahlen, welche kleiner als 7^2 sind. Allgemein enthält $f_k(x)$ alle Primzahlen $p_1, p_2, \cdots, p_k, p_{k+1}, \cdots$, welche überhaupt bis p_{k+1}^2 vorhanden sind. Dieser Procefs führt immer näher zu einer Grenzpotenzreihe, welche überhaupt nur Primzahlen, aber auch alle Primzahlen als Exponenten enthält und wie oben Primpotenzreihe genannt werden kann.

Ist die ursprüngliche Hauptfunction $f(x)$ selbst eine $i$te Partialfunction $n$ter Klasse, so erhält man durch den beschriebenen Procefs nur, aber alle Primzahlen von der Form $qn + i$, wenn in $f(x)$ alle a_{qn+i} von Null verschieden sind.

Eine Primpotenzreihe kann immer angesehen werden als eine durch unseren Procefs erreichte Grenzfunction aus einer Function $f(x)$, in welcher alle Coefficienten a_q, deren Index q keine Primzahl ist, willkürlich bleiben.

Eine Primpotenzreihe besitzt die Eigenschaft, dafs eine nullte Partialfunction irgend einer $n$ten Klasse derselben immer Null ist, wenn n eine zusammengesetzte Zahl und $a_n x^n$, wenn n eine Primzahl ist. Analoges ist zu bemerken für irgend eine $i$te Partialfunction $n$ter Klasse, wenn i und n einen gemeinsamen Teiler δ haben.

Es ist leicht einzusehen, dafs auch unsere obige Operation $\mathfrak{d}(f(x))$ durch Summirung sämtlicher nullten Partialfunctionen $n$ter Klasse entsteht, wenn man n alle Primzahlen durchlaufen läfst.

Wichtig ist die Bemerkung, dafs, wenn man n alle ganzen Zahlen durchlaufen läfst, das Resultat dasselbe ist; indem alle Summanden, die einem zusammengesetzten n entsprechen, identisch Null sind. Daher braucht man bei der Erzeugung der Primzahlen durch den ebenerwähnten Procefs nicht etwa bereits die Primzahlen selbst vorauszusetzen.

Da die Partialfunctionen selbst lineare algebraische Summen sind von den Cofunctionen $f(\alpha x)$, wobei α Wurzel von $x^m - 1 = 0$ ist, so darf man sagen, dafs die Primzahlen in eindeutiger Weise algebraisch erhalten werden aus einer beliebigen Potenzreihe; und zwar ist der höchste Grad der algebraischen Gleichung ein endlicher, so lange die Grenze, bis zu welcher man die Primzahlen erhalten will, ein endlicher bleibt. Die Primzahlen treten als Exponenten auf. Übrigens läfst die Operation $x \dfrac{d}{dx}$ dieselben Primzahlen auch als Coefficienten erscheinen.

3. Man kann auch wie folgt verfahren, um alle Primzahlen

in ihrer natürlichen Reihenfolge von p_{i+1} bis $p_{i+k}(k>1$ und $p_{i+k}<p_{i+1}^2)$ zu erhalten. Man nehme eine ganze Function $g(x)$ vom Grade $m=p_{i+1}^2-1$, bilde daraus ihre erste Partialfunction 2. Klasse $g_{2,1}(x)=\frac{1}{2}[g(x)-g(-x)]=G(x)$ und aus dieser letzteren das Aggregat

$$G(x)-\sum_1^i i\,G_{p_i;\,0}(x)+\sum_1^i(i_1,i_2)\,G_{p_{i_1}p_{i_2};\,0}(x)+\cdots$$
$$+(-1)^i G_{p_1p_2\cdots p_i;\,0}(x)=N_{p_i}(x),$$

so ist dieses Aggregat identisch mit der Summe

$$a_1x+a_{p_{i+1}}x^{p_{i+1}}+a_{p_{i+2}}x^{p_{i+2}}+\cdots+a_{p_{i+k}}x^{p_{i+k}},$$

wobei p_{i+k} die gröfste Primzahl, welche kleiner als p_{i+1}^2, bedeutet, während man sich rechter Hand ein Aggregat von Gliedern, wie $G(\alpha x)$ denken kann, wenn α Wurzel von $x^m-1=0$; $m=1, 2, 3, 4, \cdots$ bedeutet. Denkt man sich nun k verschiedene ganze Functionen $G_h(x)$, deren Coefficienten etwa respective $a_{p_{i+\lambda}}^{(h)}$ seien, so erhält man k lineare identische Gleichungen, deren rechte Seiten etwa mit $H_{p_i}^{(k)}(x)$ bezeichnet werden können. Aus diesen ergiebt sich für irgend eine zwischen p_{i+1} und p_{i+k} enthaltene Primzahl die Formel

$$p_{i+j}=\frac{\log\left(\frac{\Delta_j}{\Delta}\right)}{\log x},$$

wobei Δ und Δ_j die bekannten aus dem Gleichungssysteme gebildeten Determinanten bedeuten.

Folgende Bemerkungen sind von Wichtigkeit:

a) Die Formel hat identisch Gültigkeit für beliebige Werte von x und willkürlich gewählte Functionen $G_h(x)$, wenn man nur vermeidet die Werte $\log x=0$, $\Delta=0$, $\Delta_j-\Delta=0$.

b) Unter den binomischen Gleichungen spielen wesentlich nur

$$x^{p_1}-1=0,\quad x^{p_2}-1=0,\quad \cdots,\quad x^{p_i}-1=0$$

eine Rolle, und somit ergeben sich die Primzahlen

$$p_{i+1},\quad p_{i+2},\quad \cdots,\quad p_{i+k}$$

als in obiger Formel dargestellte Functionen vermittelst der Einheitswurzeln von den Graden $p_1, p_2, \cdots, p_i$.

c) Die nächste Arbeit wird in den zweckmäfsigen Specialisirungen von $G(x)$ und x bestehen, wie auch in der Berücksichtigung der sich leicht ergebenden Consequenzen, auf welche einzugehen mir hier, der Kürze der Zeit willen, nicht gut möglich ist.

Über Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt.

Von **Fr. Schilling** (Aachen).

Meine Mitteilung bildete einen kurzen Bericht über die in das Gebiet der Functionentheorie gehörenden Untersuchungen, die von meinem verstorbenen Freunde Dr. Ernst Ritter und mir, und zwar anfangs unabhängig von einander, unternommen worden sind. Wir teilten uns unsere Resultate seiner Zeit gegenseitig mit und kamen darin überein, dafs Ritter von analytischer Seite, ich selbst mit Hülfe geometrischer Anschauungen unserem Thema näher treten sollte. Man sehe die inzwischen erschienene Arbeit Ritter's aus seinem Nachlafs, Math. Ann. Bd. 48, S. 1—36.

Bekanntlich bildet die Schwarz'sche s-Function die auf der positiven Seite der Axe des Reellen gelegene Halbebene P des Argu-

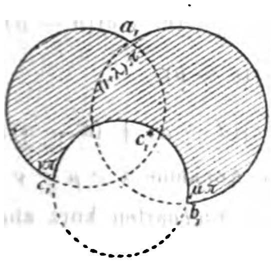


Fig. 1.

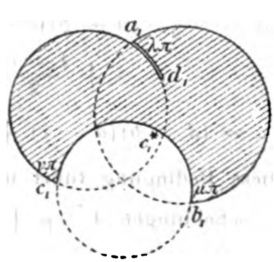


Fig. 2.

mentes z auf ein Kreisbogendreieck mit den Ecken a_1, b_1, c_1 ab (d.h. auf einen von Bogen dreier Kreise begrenzten, einfach zusammenhängenden Bereich, der weder im Innern noch auf dem Rande, mit Ausnahme der Ecken, Verzweigungs- oder Windungspunkte besitzt), und zwar so, dafs die Ecken dreien „singulären" Punkten a, b, c auf der Axe des Reellen in der z-Ebene entsprechen. Man gewinnt von geometricher Seite her den Ansatz zu neuen Ideen, wenn man, ausgehend von einem solchen Dreieck, dessen Winkel an der Ecke a_1 beispielsweise gröfser als π sein möge (Fig. 1), etwa den Bogen $c_1 a_1$ über a_1 hinaus längs seines Kreises als einen Einschnitt in den Bereich hinein verlängert der Art, dafs von dem Winkel $(1 + \lambda)\pi$ an der Ecke a_1 der Winkel π abgetrennt wird. Der Endpunkt d_1 des Einschnittes (Fig. 2) wurde als „einfacher Knotenpunkt" bezeichnet und der Bereich selbst, da er von Bogen nur dreier Kreise begrenzt ist, als „Kreisbogendreieck mit einfachem Knotenpunkt". Man stelle sich wieder die Aufgabe, auf diesen Bereich die Halbebene in analoger Weise wie oben abzubilden. Der Knotenpunkt d_1 entspricht einem vierten singulären Punkt auf der Axe des Reellen

in der z-Ebene, dem „Nebenpunkt“ d im Intervall ac. Die abbildende Function „S“ genügt der Differentialgleichung

$$\frac{S'''}{S'} - \frac{3}{2}\left(\frac{S''}{S'}\right)^2 = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)(z-d)}$$
$$\cdot\left\{\frac{1-\lambda^2}{2}\cdot\frac{(a-b)(a-c)(a-d)}{z-a} + \frac{1-\mu^2}{2}\cdot\frac{(b-a)(b-c)(b-d)}{z-b}\right.$$
$$\left. + \frac{1-\nu^2}{2}\cdot\frac{(c-a)(c-b)(c-d)}{z-c} - \frac{3}{2}\frac{(d-a)(d-b)(d-c)}{z-d} + \mathfrak{A}\right\},$$

wo die „Exponenten“ λ, μ, ν den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ des Dreiecks entsprechen. Der reelle „accessorische Parameter“ $\mathfrak{A}$ erfüllt die folgende Bedingung

$$\mathfrak{A} = \beta - \frac{1}{2}\alpha$$
$$\pm\sqrt{\lambda^2(a-b)(a-c)(d-b)(d-c) + \mu^2(b-a)(b-c)(d-a)(d-c) + \nu^2(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)},$$

wo $$\beta = \frac{1-\lambda^2}{2}(a-b)(a-c) + \frac{1-\mu^2}{2}(b-c)(b-a) + \frac{1-\nu^2}{2}(c-a)(c-b)$$

und $$\alpha = (d-b)(d-c) + (d-c)(d-a) + (d-a)(d-b)$$

ist. Diese Bedingung führt unter der Annahme $\lambda \geqq \mu \geqq \nu$ zu den Fallunterscheidungen $\lambda \lesseqgtr \mu + \nu$, deren Eigenarten kurz angegeben wurden. Meine Aufgabe besteht vor allem darin, die geometrischen Eigenschaften aller Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt (insbesondere für ganzzahlige Exponenten λ, μ, ν) zu untersuchen im Hinblick auf ihre functionentheoretische Verwendung.

Bei Fortsetzung des Einschnittes in unserem Beispiel (Fig. 2) zerfällt der Bereich schliefslich in zwei Teile, von denen einer wieder ein gewöhnliches Kreisbogendreieck ist (Fig. 3). In der Eigenart des analytischen Grenzübergangs, den hierbei die entsprechende Function S erleidet, liegt das allgemeinere Interesse begründet, das sie beanspruchen darf. Anstatt nämlich, wie man erwarten sollte, in der Grenze ihren Sinn zu verlieren, geht sie vielmehr unter Beachtung einer bestimmten Festsetzung in die Function s über, welche das abgeschnittene Dreieck auf die Halbebene P des Argumentes z abbildet. (Man vgl. meine Mitteilung: „Über die conforme Abbildung der Lemniscatenfläche“, Schlömilch's Zeitschrift

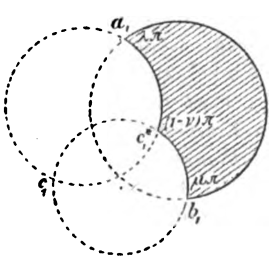


Fig. 3.

Bd. 40, S. 370—371, 1895, woselbst ähnliche Verhältnisse besprochen werden).

Sodann wurde eine Figurentafel erläutert, welche einen Überblick über alle Kreisbogendreiecke mit einfachem Knotenpunkt für die speciellen Werte $\lambda = {}^2/_3$, $\mu = {}^1/_2$, $\nu = {}^1/_3$ gewährt. Der Nebenpunkt d mufs hier die Axe des Reellen zweimal durchlaufen, will man dementsprechend alle Dreiecke mit einfachem Knotenpunkt bekommen. Sobald er mit einem der singulären Punkte a, b, c zusammenfällt, geht das Kreisbogendreieck mit Knotenpunkt in ein solches ohne Knotenpunkt über, entweder mit oder ohne gleichzeitige Abschnürung eines Teiles des Bereiches.

Den Beschlufs meiner Mitteilung bildete der Hinweis auf die wichtige Bedeutung der geometrischen Figuren zur Erkennung der zur einzelnen S-Function gehörenden Gruppe.

Die weitere Ausführung der berührten Gedanken hoffe ich bald in einer gröfseren Arbeit zu veröffentlichen.

Transfinite Zahlen, das Axiom des Archimedes und die projective Geometrie.

Von A. Schönflies (Göttingen).

Zweck des Vortrages war, nachzuweisen, dafs die von Herrn Veronese in seinen Fundamenten der Geometrie eingeführten transfiniten Zahlengröfsen als Grundlage der Mafsbestimmung auf der Geraden nicht geeignet sind, insbesondere, dafs sich mit ihnen — entgegen der Veronese'schen Behauptung — eine projective Geometrie nicht begründen läfst.

Die bisherigen Kritiken des Veronese'schen Buches, insbesondere diejenigen der Herren G. Cantor, Killing, Peano und Vivanti, richten sich vornehmlich gegen die Grundlagen der Theorie. Abgesehen davon, dafs ich die bezüglichen Einwände nicht immer als beweiskräftig ansehen kann, könnten ja doch die Resultate richtig sein, wenn auch die Begründung Mängel hätte. Aus diesem Grunde soll sich meine eigene Kritik gegen das System selbst wenden, während ich auf eine Erörterung der grundlegenden Begriffe und Definitionen nicht eingehe.

Als eigentlichen Zweck, dem Veronese's transfinite Zahlen dienen sollen, kann man die arithmetische Erfassung des anschauungsmäfsig gegebenen linearen Continuums hinstellen. Nach der bisher allgemein üblichen Auffassung findet die geometrische Stetigkeit ihren arithmetischen Ausdruck in dem Dedekind'schen Schnittprincip; genauer darin, dafs jedem Schnitt eine und nur eine bestimmte

Zahl entspricht. Mit diesem Princip hängt bekanntlich auch das Axiom des Archimedes eng zusammen. Das Archimedische Axiom und das Schnittprincip sind vollständig äquivalent; ich kann hierfür auf die Erörterungen verweisen, die Veronese an den Schlufs seines Buches gesetzt hat (S. 697 ff.) Es fragt sich nun aber, ob dieses Axiom ein notwendiger Bestandteil unserer Mafsbestimmung im linearen Gebiet, insbesondere der projectiven Geometrie ist. Dies ist das Problem, das Veronese sich stellt. Er beantwortet die Frage mit „nein" und sucht demgemäfs eine Geometrie, insbesondere eine projective Geometrie, aufzubauen, in der das Axiom des Archimedes nicht gilt. Das Folgende wird jedoch lehren, dafs diese Meinung irrig ist.

Ich gebe zunächst in Kürze und ohne jede kritische Bemerkung an, wie Veronese seine Mafsbestimmung, resp. die ihr entsprechenden transfiniten Zahlen auf der Geraden erhält. Seine Grundforderung ist, dabei „rein logisch" zu Werke zu gehen; in der Sache enthält seine Definition der Geraden im wesentlichen die Gleichwertigkeit aller Punkte und aller Segmente, sowie die Congruenz und Symmetrie. Er construirt sich zunächst, von einem beliebigen Punkte ausgehend, die Punkte $0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$ und postulirt, dafs es wenigstens ein Element der Geraden giebt, das „in Bezug auf jedes begrenzte Segment als Einheit aufserhalb der Scala liegt". (Vgl. die Hypothese III, S. 96). Die Existenz des so bestimmten Segments führt auf die Einführung der ersten transfiniten Einheit ∞.

Die Voraussetzung der Gleichartigkeit der Geraden in allen ihren Elementen führt von hier aus sodann zu den Punkten

$$\infty + 1,\ \infty + 2,\ \infty + 3,\ \ldots,\ 2\infty;$$

und da die Gleichartigkeit der Geraden auch für jedes Segment als Einheit bestehen soll, so ergeben sich weiter die Punkte

$$\infty,\ 2\infty,\ 3\infty,\ \ldots,\ \infty^2,\ \ldots,\ \infty^3,\ \ldots$$

(vgl. S. 111, sowie die Hypothese V, S. 121.) Endlich führt die Symmetrie, d. h. die Gleichartigkeit nach den beiden entgegengesetzten Richtungen, noch zu den Punkten (S. 104)

$$\infty - 1,\ \infty - 2,\ \infty - 3,\ \ldots\ldots \text{ u. s. w.}$$

Auf diese Weise weiter schliefsend, erhält er schliefslich die Punkte

$$a + a_1\infty + a_2\infty^2 + \cdots\cdots\cdots$$

wo die a_i beliebige ganze positive oder negative Zahlen sind. (S. 117 und 123). Nun verlangt aber die Gleichartigkeit der Geraden rücksichtlich aller ihrer Segmente, dafs das Segment von 0 bis 1 dieselbe Mafsbestimmung zuläfst, wie das Segment von 0 bis ∞, und damit

wird die Existenz einer „actual unendlich kleinen“ transfiniten Einheit gefordert, die für das Segment 01 dieselbe Bedeutung hat, wie die Einheit selbst für das Segment 0∞. (Vgl. S. 99, S. 140, sowie die Hypothese VII, S. 162.)

Gerade die Existenz solcher actual unendlich kleiner Zahlen ist bekanntlich Gegenstand der Controversen; ich gehe aus dem in der Einleitung genannten Grund auch auf diese Streitfrage nicht ein. Ich bemerke nur, dafs auch hier wieder das Axiom des Archimedes hereinspielt, insofern nämlich dieses Axiom und actual unendlich kleine Gröfsen einander ausschliefsen.*) Durch Einführung dieser unendlich kleinen Einheiten ergeben sich schliefslich die Zahlengröfsen, deren allgemeinen Typus der Ausdruck

$$(z) \cdots a_n \infty^n + \cdots + a_2 \infty^2 + a_1 \infty + a + \frac{a'}{\infty} + \frac{a''}{\infty_2} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^\nu} + \cdots$$

darstellt. Dies sind freilich noch nicht die allgemeinsten transfiniten Zahlen Veronese's. Einerseits mufs er naturgemäfs noch die Beschränkung fallen lassen, das die Coefficienten ganze Zahlen sind — dies geschieht auf Grund der Hypothese IV, S. 106 — andererseits setzt er die Reihe seiner transfiniten Einheiten in derselben Weise fort, wie dies auch bei Cantor der Fall ist, indem er (vgl. Hypothese V, S. 121) die Einheiten

$$1,\ \infty,\ \infty^{\infty},\ \infty^{\infty^{\infty}} \cdots$$

postulirt und die entsprechenden unendlich kleinen. Für den vorliegenden Zweck genügt es jedoch, wenn ich mich auf den vorstehenden Ausdruck (z) als die allgemeinste transfinite Zahl beschränke und an sie die kritische Erörterung anknüpfe**).

Zunächst ist klar, dafs den vorstehend definirten transfiniten Zahlen der allgemeinere Zahlencharakter nicht abgesprochen werden kann. Man kann sie geradezu als complexe Gröfsen mit unendlich vielen Einheiten auffassen***), und zwar insbesondere mit solchen Einheiten, die selbst einer bestimmten Gröfsenordnung unterliegen; sie sollen ja doch den Punkten des linearen Continuums eindeutig zugeordnet werden. Man hat nur zu beachten, dafs die Einheit $\infty^\lambda \gtreqless \infty^\varkappa$ ist, je nachdem $\lambda \gtreqless \varkappa$ ist, um sofort zu erkennen, dafs für zwei transfinite Zahlen der Begriff der Gleichheit, sowie das

*) Vgl. die ausführliche Erörterung bei Veronese, S. 697ff.

**) Aus demselben Grunde kann ich auch von der Veronese'schen Hypothese VIII (S. 167) hier absehen.

***) Auch Veronese teilt diese Auffassung; vgl. Vorrede S. XXV, sowie S. 139, Anmerkung.

Gröfser und Kleiner den bekannten logischen Erfordernissen entsprechend aufgestellt werden kann. Die Transfiniten erfüllen also wirklich die ersten grundlegenden Eigenschaften, die dem Zahlbegriff zukommen und haben keineswegs etwas an sich Unmögliches. Sie haben überdies ein bekanntes Analogon in der elementaren Analysis, und zwar in denjenigen Gröfsen, die man zur Bestimmung des „Unendlich der Functionen" benötigt, und die ich in Kürze hierhersetzen will. Bekanntlich ist für jede der Functionen

$$e^{e^x},\ e^x,\ x,\ lx,\ l(lx)$$

die Ordnung des Unendlichwerdens an der Stelle $x = \infty$ unendlich grofs gegen diejenige der folgenden. Schreibt man noch zur Abkürzung

$$e^x = E_1(x),\ e^{e^x} = E_2(x),\ \cdots$$
$$lx = L(x),\ l(lx) = L_2(x),\ \cdots$$

und bezeichnet die Ordnung des Unendlichwerdens der Functionen

$$E_n(x),\ x,\ L_\nu(x) \text{ mit } \eta_n,\ 1,\ \eta_{-\nu},$$

so erhält man als Ordnung des Unendlichwerdens der Function

$$\cdots E_n^{a_n} \cdots E_2^{a_2} \cdot E_1^{a_1} \cdot x^a \cdot L_1^{a'} L_2^{a''} \cdots L_\nu^{a^{(\nu)}} \cdots$$

den Ausdruck

$$a_n\eta_n + \cdots + a_2\eta_2 + a_1\eta_1 + a + a'\eta_{-1} + a''\eta_{-2} + \cdots$$
$$+ a^{(\nu)}\eta_{-\nu} + \cdots,$$

in dem die a_m und $a^{(\lambda)}$ freilich zunächst nur als positive Zahlen definirt sind. Man kann aber auch negative Zahlen zulassen, falls man festsetzt, dafs für die bezüglichen Functionen an der Stelle $x = \infty$ die Ordnung des Unendlichgrofs- oder Unendlichkleinwerdens in Frage kommt. Man braucht jetzt nur die Einheiten η_n und $\eta_{-\nu}$ den Einheiten ∞^n und $\infty^{-\nu}$ entsprechen zu lassen, und sieht sofort, dafs die transfiniten Zahlen und die Ordnungen des Unendlich der vorstehend betrachteten Functionen sich eindeutig und vollständig entsprechen.

Mufs man also zugeben, dafs Veronese's transfinite Zahlen nicht gegen die ersten Erfordernisse des Zahlbegriffs verstofsen, so ist jetzt die Frage, ob sie wirklich eine arithmetische Umschreibung des Continuums liefern, und ob mit ihnen eine projective Geometrie möglich ist. Was den ersten Punkt betrifft, so springt sofort in die Augen, dafs innerhalb des Veronese'schen Zahlsystems das Dedekind'sche Schnittprincip nicht allgemein gültig ist. Um ein einfaches Beispiel anzuführen, so nimmt die Reihe $0, 1, 2, \cdots, n, \cdots$ unauf-

hörlich zu, und ebenso nimmt die Reihe $\infty, \infty - 1, \infty - 2, \cdots, \infty - n, \cdots$ unaufhörlich ab; es giebt aber keine Zahl des transfiniten Zahlsystems, gegen die beide Reihen gleichzeitig convergiren. Dies bleibt auch bestehen, wenn man diese Reihen so vervollständigt, wie es das Dedekind'sche Schnittprincip verlangt, indem man in die erste Reihe jede Zahl aufnimmt, deren höchste nicht unendlich kleine Einheit die Zahl 1 ist, in die zweite dagegen alle übrigen. Alsdann haben beide Zahlgruppen durchaus den Charakter, der dem Dedekind'schen Schnitt entspricht. Sie stellen eine solche Zweiteilung der Zahlengesamtheit dar, dafs jede Zahl der ersten Gruppe kleiner ist als jede Zahl der zweiten Gruppe; es wird aber durch sie keine Zahl des Systems definirt. Dieser Umstand kann nicht überraschen; die Existenz actual unendlich kleiner Zahlen und das Axiom des Archimedes schliefsen, wie bereits erwähnt, einander aus, andererseits wurde auch schon hervorgehoben, dafs das Axiom des Archimedes und das Schnittprincip ebenfalls gleichwertig sind.

Herr Killing sieht in dem Vorstehenden das wesentlichste Hindernis, Veronese's Zahlengesammtheit als das arithmetische Äquivalent der sämmtlichen Punkte des Continuums zuzulassen*). Er sieht darin einen Widerspruch mit dem uns geläufigen Stetigkeitsbegriff und kleidet seine Einwendung insbesondere in die Form, dafs die Gerade Veronese's des „Zusammenhangs" entbehrt. Nun ist gewifs zuzugeben, dafs es aufserordentlich künstlich ist, das lineare Continuum durch die Einführung der unbegrenzt vielen, actual unendlich kleinen Einheiten zu erfassen, aber meines Erachtens ist die arithmetische Begriffsbestimmung der Stetigkeit nichts absolut Vorgeschriebenes und kann gewifs nicht durch den so wenig arithmetischen Begriff „des Zusammenhangs" abgethan werden. Sie richtet sich vielmehr nach dem arithmetischen Operationsgebiet, innerhalb dessen man sich bewegt. Die wirkliche Entscheidung über die transfiniten Zahlen liegt auf einem ganz anderen Gebiet. Sie hängt einzig davon ab, ob sie ein innerlich widerspruchsfreies und geschlossenes System darstellen. Insbesondere ist die Frage, ob innerhalb derjenigen Disciplin, der sie vorzugsweise dienen sollen, d. h. in der projectiven Geometrie, alle auszuführenden Operationen immer wieder auf bestimmte transfinite Zahlen führen; d. h. ob sie eine wirkliche Gruppe bestimmen und damit auch den weiteren Eigenschaften der Zahl genügen. Diese Frage ist aber zu verneinen.

Dies ergiebt sich folgendermafsen. Der Ausdruck (z) stellt dann und nur dann eine bestimmte transfinite Zahl im Sinne Veronese's dar, wenn sich zu jedem gegebenen Index n oder ν der zugehörige Coefficient a_n resp. $a^{(\nu)}$ als gewöhnliche endliche positive oder negative Zahl bestimmt angeben läfst. Man sieht nun sofort,

*) Über transfinite Zahlen. Math. Ann., Bd. 48, S. 425.

dafs Addition und Subtraction zweier bestimmter transfiniter Zahlen stets ausführbar sind, auch gelten die Gesetze der Addition resp. Subtraction ungeändert fort. Anders steht es jedoch mit der Multiplication, sobald die zu multiplicirenden Zahlen

$$A = \cdots a_n \infty^n + \cdots + a_1 \infty + a_0 + \frac{a'}{\infty} + \cdots + \frac{a^{(\nu)}}{\infty^\nu} + \cdots$$

$$B = \cdots b_m \infty^m + \cdots + b_1 \infty + b_0 + \frac{b'}{\infty} + \cdots + \frac{b^{(\mu)}}{\infty^\mu} + \cdots$$

allgemein sind, d. h. nach beiden Seiten sich ins Unendliche erstrecken. An und für sich ist es natürlich gestattet, als Product von A und B eine Zahl

$$C = \cdots c_r \infty^r + \cdots + c_1 \infty + c_0 + \frac{c'}{\infty} + \cdots + \frac{c^{(\varrho)}}{\infty^\varrho} + \cdots$$

so zu definiren, dafs man für jeden Coefficienten c_λ ein Bildungsgesetz gemäfs einer Functionalgleichung

$$c_\lambda = f_\lambda\,(a, b)$$

statuirt und dieses Bildungsgesetz näher zu bestimmen sucht. Aber da dieses Gesetz doch für alle betrachteten transfiniten Zahlen das gleiche sein mufs, so mufs es auch gelten, wenn von den transfiniten Zahlen eine oder beide eine endliche Zahl von Gliedern haben oder sich nur nach einer Seite ins Unendliche erstrecken. Das Multiplicationsgesetz kann daher kein anderes sein, als das triviale, wonach die Einheiten sich wie Potenzen multipliciren und die Zahlen selbst wie ganze Functionen dieser Einheiten. In Wirklichkeit ist dies auch das Gesetz, mit dem Veronese wie mit etwas selbstverständlichem operirt (vgl. z. B. S. 136 ff.) Wenn nun aber die beiden Zahlen A und B mit unendlich vielen Einheiten gebildet sind und sich überdies nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken, so stellen sich die c_r durch ein Aggregat von unendlich vielen Producten $a_k b_l$ dar und können daher nicht in der genannten Weise angegeben werden. Die Multiplication ist daher innerhalb des zu Grunde gelegten Gebiets nicht allgemein ausführbar.*)

Ob und in wie weit Veronese selbst bereits auf solche Überlegungen gestofsen ist, bleibt unsicher. In einer Anmerkung (S. 138 sowie S. XXVI der Vorrede) findet sich einmal ausgesprochen, dafs sich das Product zweier Zahlen nicht immer linear in den zu Grunde liegenden Einheiten darstellen läfst. Dies hat ihn aber doch nicht gehindert ohne weiteres von dem Product transfiniter Zahlen zu

---

*) Die transfiniten Zahlen des Herrn Levi-Cività gestatten die Multiplication, weil sie sich nur nach einer und zwar der nämlichen Richtung ins Unendliche erstrecken. Der Hinweis auf Herrn Levi-Cività ist daher für Veronese's Transfiniten ohne Einflufs.

sprechen und sogar die Geltung aller Rechnungsregeln dafür abzuleiten.*) Die Existenz des Products gründet sich bei ihm ausschließlich auf die Definition, wie er überhaupt einen großen Teil seiner Begriffe und Entwickelungen allein mittels der Definition einführt. Hier liegt meines Erachtens der entscheidende methodische Fehler, der dem „logischen" Aufbau der Fundamente anhaftet. Insbesondere möchte ich für die hier in Frage stehenden Punkte unter anderem auf den Inhalt von S. 170 ff. verweisen. Veronese leitet dort auf Grund der vorhergehenden sehr ausführlichen Entwickelungen seine „Scala" auf der Geraden ab und erfüllt insbesondere die Gerade mit all den Punkten, die durch das Symbol (s) für alle möglichen a_n und $a^{(\nu)}$ dargestellt werden. Dagegen wird ein Beweis, daß in dem so geschaffenen Zahlengebiet die Rechnungsoperationen wirklich ausführbar sind, nicht gegeben; die hierauf bezüglichen Sätze gehen im wesentlichen von dem Vorhandensein des Products oder Quotienten aus, oder sie stützen sich darauf, daß ein bezügliches Segment auf der Geraden existiren muß. Dieser Standpunkt läuft also darauf hinaus, das Product $A \cdot B$ dadurch als wirkliche Zahl C einzuführen, daß man geradezu C als neue transfinite Zahl durch die Gleichung

$$C = A \cdot B$$

definirt. Dies ist an sich freilich zulässig, aber es hört alsdann die Möglichkeit auf, diese Zahl C mit den bereits vorhandenen zu vergleichen, und damit überhaupt die Möglichkeit des Rechnens. Insbesondere folgt damit aber auch, daß im Gebiet der transfiniten Zahlen eine projective Geometrie nicht existiren kann.

Über G. Cantorsche Sätze.

Von Ernst Schröder (Karlsruhe).

Die wichtigen Sätze A bis E, welche Herr G. Cantor (Math. Annalen Bd. 46, p. 484) über eineindeutige Abbildung als zur Zeit noch nicht beweisbar anführt, lassen sich zu dem einen zusammenfassen:

$$\varepsilon = \gamma\delta + \bar{\gamma}\bar{\delta},$$

worin ε die Fälle darstellt, wo die Mengen a und b gleichmächtig sind, γ und δ bezüglich die, wo die eine von ihnen gleichmächtig

*) So heißt es z. B. auch in der resumirenden Vorrede: Aus den unendlich großen und unendlich kleinen Segmenten leiten wir neue ganze unendlich große Zahlen ab, welche bei der Addition und Multiplication den gewöhnlichen Gesetzen unterliegen . . . (S. XXV).

einem echten Teil der anderen, und durch den übergesetzten Strich die Verneinung eines Falles ausgedrückt werden soll. D. h. also: Zwei Mengen sind dann und nur dann gleichmächtig, wenn entweder keine oder jede von beiden eineindeutig auf einen echten Teil der anderen abgebildet werden kann. Nach einem logischen Theorem von Jevons ist dieser Satz in sechs äquivalenten Formen ausdrückbar, welche das Nichtvorkommen von vieren der acht in Bezug auf das Zusammenbestehen der drei Fälle denkbaren Möglichkeiten constatiren. Mittelst rein logischen Beweises des Satzes B von Cantor konnte das Verschwinden von dreien dieser vier elementaren Constituenten dargethan werden.

Über ein neues Verzeichnis der Werke von Leonhard Euler.

Von J. G. Hagen S. J. (Washington).

Wer immer sich mit der älteren Litteratur oder mit der Geschichte der Mathematik befafst hat, wird eine Gesamtausgabe der Euler'schen Werke vermifst haben. Woher kommt es doch, dafs, während späteren Gelehrten eine Gesamtausgabe ihrer Werke zuteil geworden, unserem Euler diese Ehre noch versagt ist? Ein Grund liegt wohl darin, dafs Euler drei verschiedenen Ländern angehört: Der Schweiz, als seinem Vaterlande, das er aber schon im Alter von 20 Jahren verliefs, dann Rufsland, wo er zweimal seinen Sitz aufschlug und im ganzen 31 Jahre verlebte, und endlich Preufsen, wo er die besten 25 Jahre seines Lebens zubrachte. Ein anderer Grund liegt wohl in der Masse seiner Schriften. Belaufen sich doch seine separat erschienenen Werke auf mehr als 30 und die übrigen Abhandlungen auf nahezu 800. Von diesen letzteren verfafste er fast die Häfte in den letzten 17 Jahren seines Lebens, wo er auf beiden Augen erblindet war.

1. In Ermangelung einer solchen Gesamtausgabe sind mehrere Verzeichnisse seiner Werke erschienen: „Liste complète" etc. im Éloge (St. Petersb. 1783) des älteren Fufs, dann ein „Index absolutissimus" etc. in der Ticiner Ausgabe des Differential-Calculs (1787, Vol. II.), und endlich eine „Liste complète et systematique" etc. in der „Correspondance" (St. Petersb. 1843) des jüngeren Nic. Fufs. Aufser diesen auf Vollständigkeit Anpruch machenden Verzeichnissen kommen noch mehrere kleinere vor, so die Nachträge in den Opera Minora Collecta (St. Petersb. 1849) und in den Opera Postuma (St. Petersb. 1862), dann Aufzählungen in Kayser's Bücherlexikon, in Brunet's Manuel du Libraire und in Poggendorff's Handwörterbuch.

2. Dieſes neue Verzeichnis wurde nun so angefertigt, dafs alle Titel der Euler'schen Abhandlungen auf Karten geschrieben und in

vielen Bibliotheken Amerikas und Europas mit den gedruckten Werken verglichen wurden. Die nicht aufgefundenen wurden mit Sternchen versehen oder in den Anhang verwiesen.

Die Titel mufsten vielfach verbessert und die Jahreszahlen auf ein einheitliches System zurückgeführt werden. Auch der Inhalt der Abhandlungen wurde nachgesehen, wo der Titel nicht bezeichnend war.

Dann wurden die Karten in vier Hauptteile gesondert nach: Mathematik, Physik, Astronomie und die vermischten Schriften. Diese vier Hauptteile wurden wieder in 34 Unterabteilungen gesondert, und erst innerhalb dieser Unterabteilungen geschah die Anordnung chronologisch.

In den Anhang wurden verwiesen die Titel der ungedruckten Schriften, der nicht aufgefundenen oder verloren gegangenen und endlich derjenigen, welche irrtümlich Euler zugeschrieben waren.

Schwierig war die Entscheidung über jene Schriften, welche von Euler's Schülern unter Anleitung des Meisters verfafst sind. Dieselben wurden im Verzeichnisse beibehalten, so oft diese Anleitung ausdrücklich angemerkt ist. Anmerkungen geben über diese und ähnliche Fragen Aufschlufs.

Eine Tafel erlaubt, die in der „Correspondance" vorkommenden Nummern mit denen dieses neuen Verzeichnisses zu vergleichen.

3. Der Zweck dieses Verzeichnisses ist einerseits eine bessere Kenntnis der Euler'schen Werke, andererseits aber auch eine Vorbereitung auf eine Gesamtausgabe dieser Werke. Die Herausgeber der einzelnen Bände könnten die im Verzeichnisse angegebene Reihenfolge einhalten, und die vier Hauptteile könnten mit je Band I beginnen, also zugleich gedruckt werden und auch einzeln verkäuflich sein.

Schätzt man die Gesamtausgabe mit Fufs auf 25 Quartbände zu je 80 Bogen und die Druckkosten eines Bandes zu 6000 Mark, so würde die ganze Ausgabe auf 150000 Mark kommen. Die Hälfte dieser Summe müfste jedenfalls vorhanden sein, ehe an das Unternehmen gedacht werden könnte. Ist dasselbe doch schon zweimal an der Geldfrage gescheitert. Alles, was die Gebrüder Fufs von der Akademie zu Petersburg erreichen konnten, war die Herausgabe zweier Bände der „Opera Minora Collecta" und zweier Bände der „Opera Postuma". Die Brüsseler Ausgabe der „Oeuvres Complètes" (Bruxelles 1839 etc.) brachte es nur auf fünf Octav-Bände. Vom Georgetown College aus wurden schon mehrere Versuche gemacht, einen der vielen amerikanischen Maecene für dieses nützliche Unternehmen zu gewinnen, aber bis jetzt vergebens.

Bestimmung der Constantenzahl bei Raumcurven.

Von **K. Rohn** (Dresden).

Die Bestimmung der Constantenzahl einer Raumcurve R_n^p, wo n die Ordnung und p das Geschlecht derselben bedeutet, bietet bekanntlich sehr große Schwierigkeiten. Die Arbeiten von Nöther: „Zur Theorie der algebraischen Raumcurven" und Halphen: „Sur la classification des courbes gauches algébriques", die im Jahre 1882 von der Berliner Akademie mit dem Steinerpreis gekrönt wurden, geben Mittel an, um diese Zahl zu gewinnen, und mag hier darauf hingewiesen werden. Das Problem läßt sich in eine algebraische Form bringen, und es kommt dabei das Verschwinden der Determinanten einer gewissen Matrix in Betracht. Diese Gleichungen sind jedoch meist nicht von einander unabhängig, und es soll hier gezeigt werden, wie die Flächen durch die Raumcurve R_n^p die Abhängigkeit der genannten Gleichungen bedingen.

Auf der Raumcurve R_n^p schneiden die Ebenen eine ∞^3-Schar von Punktgruppen Γ_n aus; durch Projection auf eine Ebene erhält man eine ebene Curve C_n^p mit einer ∞^3-Schar von Punktgruppen G_n. Nun giebt es $N = p + n - 1$ linear unabhängige, zu C_n^p adjungierte Curven $(n-2)$. Ordnung, die wir mit $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_N$ bezeichnen wollen. Jede Curve ψ durch eine Gruppe G_n schneidet aus der C noch eine Restgruppe G' von $2p-2$ Punkten aus, die auf einer adjungirten Curve $(n-3)$. Ordnung liegen; denn zu den Gruppen G_n gehören auch die Gruppen, welche die Geraden der Ebene aus der C ausschneiden. Da die Gruppen G' aber eine ∞^{p-1}-Schar bilden, kann die Gruppe G_n für die Curven ψ nur $(n-1)$ Bedingungen involviren; jede Curve ψ, die durch $n-1$ Punkte von G_n geht, geht somit auch von selbst durch den letzten Punkt von G_n. Ist dieses der Fall, so ist auch umgekehrt die C_n^p die Projection einer Raumcurve R_n^p. Mit anderen Worten, es muß:

$$\left\|\begin{matrix} \psi_1^{(1)} & \psi_2^{(1)} & \cdots\cdots & \psi_N^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots\cdots & \cdot \\ \psi_1^{(n)} & \psi_2^{(n)} & \cdots\cdots & \psi_N^{(n)} \end{matrix}\right\| = 0$$

sein, wo $\psi_1^{(i)}, \psi_2^{(i)}, \ldots, \psi_N^{(i)}$ die linken Seiten der Curven ψ, geschrieben mit den Coordinaten x_i, y_i, z_i eines Punktes der Gruppe G_n, bedeuten. Das Verschwinden der Matrix liefert $N - (n-1) = p$ Gleichungen;

von diesen können $n - 3$ durch die Wahl der Gruppe G_n (die einer ∞^3-Schar angehört) befriedigt werden, während die übrigen $p - n + 3$ Gleichungen ebensoviele Relationen zwischen den Coefficienten der C_n^p darstellen. Sind die genannten p Gleichungen unabhängig, so besitzt die C_n^p $3n + p - 1 - (p - n + 3) = 4n - 4$ Constanten, und die Raumcurve R_n^p — deren Projection die C_n^p ist — weist $4n$ Constanten auf.

Jene p Gleichungen sind dagegen nicht mehr von einander unabhängig, wenn bei bestimmter Ordnung n der Curve ihr Geschlecht größer als eine gewisse Zahl ist. Es giebt nämlich dann stets adjungirte Curven von der Ordnung $n - 2 - \lambda$, wenn $\omega_\lambda = 0$ die Curve niedrigster Ordnung durch die Gruppe G_n bedeutet. Infolgedessen kann eine Anzahl der Curven ψ durch reducible Curven ersetzt werden, die ω_λ als Bestandteil enthalten. Dadurch fällt eine Anzahl Colonnen jener Matrix weg, und die Zahl der durch ihr Verschwinden dargestellten Bedingungen vermindert sich. Je nach dem Werte von λ ist also eine größere oder geringere Anzahl jener p Gleichungen eine Folge der übrigen.

Das soeben Gesagte wird durch das Folgende näher erläutert, doch kann in einem so engen Rahmen die Frage nicht eingehend behandelt werden, was demnächst in einer Arbeit über die Raumcurven geschehen soll.

Legt man durch $n - 3$ Punkte von G_n eine adjungirte Curve $(n - 3)$. Ordnung und durch irgend zwei der drei übrigen Punkte eine Gerade, so bilden sie eine Curve ψ, die folglich auch den letzten Punkt von G_n enthalten muſs. Die adjungirte Curve $(n - 3)$. Ordnung muſs demnach die G_n ganz enthalten, sobald sie durch $n - 3$ Punkte von G_n geht. Es giebt also $p - n + 3$ linear unabhängige adjungirte Curven $(n - 3)$. Ordnung durch G_n, oder es existiren $p - n + 3$ linear unabhängige adjungirte Curven $(n - 4)$. Ordnung.

Geht man von einer reduciblen Curve ψ aus, die aus einer adjungirten Curve $(n - 4)$. Ordnung durch $n - 6$ Punkte von G_n und aus einem Kegelschnitt durch 5 der übrigen sechs Punkte von G_n besteht, so muſs die adjungirte Curve $(n - 4)$. Ordnung alle Punkte von G_n enthalten. Es giebt also $p - 2n + 9$ linear unabhängige adjungirte Curven $(n - 4)$. Ordnung durch G_n, oder es existiren eben so viele adjungirte Curven $(n - 5)$. Ordnung. Analog gelangt man zu $p - 3n + 19$ adjungirten Curven $(n - 6)$. Ordnung, zu $p - 4n + 34$ adjungirten Curven $(n - 7)$. Ordnung u. s. w.

Anders gestalten sich diese Zahlen, wenn durch die G_n ein Kegelschnitt geht. Dann schlieſst man, daſs eine adjungirte Curve $(n - 4)$. Ordnung durch $n - 5$ Punkte von G_n gelegt werden muſs,

damit sie G_n ganz enthalte. Es giebt dann $p - 2n + 8$ adjungirte Curven $(n - 5)$. Ordnung, ferner $p - 3n + 15$ adjungirte Curven $(n - 6)$. Ordnung und $p - 4n + 24$ adjungirte Curven $(n - 7)$. Ordnung u. s. w.

Wenn dagegen die Gruppe G_n nicht auf einem Kegelschnitte, sondern auf einer Curve 3. Ordnung oder einer Curve 4. Ordnung liegt, so ergeben sich für die adjungirten Curven $(n - 5)$., resp. $(n - 6)$., resp. $(n - 7)$. Ordnung im ersten Falle die Zahlen $p - 2n + 9$, resp. $p - 3n + 18$, resp. $p - 4n + 30$, im letzten Falle die Zahlen $p - 2n + 9$, resp. $p - 3n + 19$, resp. $p - 4n + 33$, u. s. w.

Liegt die Gruppe G_n auf einem Kegelschnitt, so können die Curven ψ in $p - n + 3$ Colonnen der früheren Matrix durch reducible Curven ersetzt werden, die den Kegelschnitt als Bestandteil enthalten. Dadurch zieht das Verschwinden jener Matrix nur noch $n - 3$ unabhängige Bedingungsgleichungen nach sich; freilich lassen sich jetzt durch die Wahl der Gruppe G_n, da sie einer ∞^3-Schar angehört und auf einem Kegelschnitte liegt, nur noch zwei dieser Gleichungen erfüllen. Die C_n^p besitzt also $3n + p - 1 - (n - 5)$ Constanten; die R_n^p besitzt mindestens: $4n + (p - 2n + 8)$ Constanten und liegt auf einer Fläche 2. Grades.

Liegt die Gruppe G_n auf einer Curve 3. Ordnung, so erkennt man analog, dafs die R_n^p auf einer Fläche 3. Ordnung liegt und mindestens: $4n + (p - 3n + 18)$ Constanten aufweist. Ebenso besitzt eine R_n^p, die auf einer Fläche 4. Ordnung liegt, mindestens $4n + (p - 4n + 33)$ Constanten, u. s. w.

Die Gruppe G_n kann auch auf mehreren Curven liegen, welche auf die Zahl der unabhängigen Bedingungsgleichungen, die aus jener Matrix sich ergeben, erniedrigend, also auf die Zahl der Constanten der Curven C_n^p und R_n^p erhöhend einwirken; doch kann das hier nicht weiter verfolgt werden.

Als Beispiele mögen die Curven R_{20}^{81}, die auf einer Fläche 2. Gr. liegen, mit $80 + 49$ Constanten und die Curven R_{20}^{56} mit $80 + 24$, resp. mit $80 + 14$ Constanten, je nachdem sie auf einer Fläche 2. oder 3. Ordnung liegen, erwähnt werden.

Homogene lineare Congruenzen.

Von E. Steinitz (Berlin).

Liegt ein System homogener linearer Congruenzen mit n Unbekannten nach einer natürlichen Zahl m als Modul vor

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \equiv 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kn}x_n \equiv 0 \end{array}\right\} (\text{mod. } m),$$

so bilden die k Coefficientensysteme die Basis eines Moduls im Sinne von Dedekind. Sind

$$e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_n$$

die Invarianten dieses Moduls, wo für den Fall, daſs der Rang r kleiner als n ist, $e_{r+1} = e_{r+2} = \cdots = e_n = 0$ zu setzen ist, und wird mit (e_i, m) der gröſste gemeinsame Teiler der Zahlen e_i und m bezeichnet, so stellt die Gesamtheit der Lösungssysteme der gegebenen Congruenzen einen Modul dar, welcher die Invarianten

$$\frac{m}{(e_n, m)},\ \frac{m}{(e_{n-1}, m)},\ \ldots,\ \frac{m}{(e_1, m)}$$

besitzt.

Der im Vorstehenden gegebene Satz bildet das Fundament der Theorie der linearen homogenen Congruenzen, aus welchem alle Sätze dieser Theorie entweder unmittelbar als specielle Fälle sich ergeben oder doch mit Hülfe einfacher Betrachtungen abgeleitet werden können.

Dies darzulegen, war der Zweck des Vortrages. Eine ausführlichere Publication des Gegenstandes im Zusammenhange mit anderen Untersuchungen soll später an anderer Stelle erfolgen.

Über die analytische Darstellung der Rotationen bei Problemen der Mechanik.

Von F. Klein (Göttingen).

In Functionentheorie und Geometrie wird die Riemann'sche Deutung von $x + iy$ auf der Kugelfläche in mannigfachster Weise benutzt, insbesondere bei der Betrachtung der Drehungen um einen festen Punkt; man denke an die Theorie der regulären Körper. Vortragender hat diese Methode bei Problemen der Mechanik, insbesondere den Rotationsproblemen, in Anwendung gebracht und ge-

funden, daſs dieselbe die üblichen Entwickelungen in der That vereinfacht.*) Er fragt an, ob nicht von anderer Seite derselbe Ansatz bereits gegeben sei; nach dem Verlaufe der sich anschlieſsenden Discusion scheint dies nicht der Fall zu sein.

Über Kraftwirkungen bei Drillingsmaschinen.

Von **W. Franz Meyer** (Clausthal).

In einem kürzlich veröffentlichten Aufsatze von O. Hoppe („Über Zwillingswassersäulenpumpen etc.“, Zeitschrift für Berg-, Hütten- und Salinenwesen, Bd. XXVII) findet sich der Satz, daſs für eine „Drillingsmaschine“ die algebraische Summe der Geschwindigkeiten aller drei Kolben stets gleich Null sei, vorausgesetzt, daſs die Kurbeln um 120^0 gegen einander verstellt sind.

Hoppe beweist den Satz nicht theoretisch, sondern beschränkt sich darauf, zu zeigen, daſs er für eine Reihe von Beispielen gilt.

Der genaue Ausdruck für die Summe der Geschwindigkeiten der drei Kolben ist (abgesehen von einem Factor), wenn unter $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei Winkel α, $\alpha + 120^0$, $\alpha + 240^0$ verstanden werden:

$$U = \sum \sin \alpha_i + \tfrac{1}{2} \sum \frac{\sin 2\alpha_i}{\sqrt{c^2 - \sin^2 \alpha_i}},$$

wo $c = \dfrac{L}{r}$ das Verhältnis der Länge L der Schubstangen zur Länge r der Kurbeln bedeutet.

Der erste Teil von U, nämlich die Summe $\sum \sin \alpha_i$ ist bekanntlich an sich gleich Null. Um über den zweiten Teil Aufschluſs zu erhalten, entwickele man den reciproken Wert der Quadratwurzel in eine binomische Reihe, die man nach Potenzen von c (oder auch einfacher algebraischer Functionen von c) fortschreiten lassen kann. Vermöge der Waring'schen Formeln für Potenzsummen erkennt man dann, daſs die fragliche Reihe eine alternirende ist, deren drei erste Glieder verschwinden, und daſs infolge dessen der Ausdruck U, bis auf einen verschwindend kleinen Fehler zweiter Ordnung, die einfache Gestalt annimmt

$$U = k \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3.$$

---

*) Vergl. eine Notiz „Über die Bewegung des Kreisels“ in den Göttinger Nachrichten vom 11. Januar 1896; vergl. ferner die Vorlesungen, welche der Vortragende seitdem bei Gelegenheit des Princetoner Universitätsjubiläums gehalten hat (October 1896); dieselben werden als Teil der auf dieses Jubiläum bezüglichen Festschrift publicirt werden.

Hierbei ist k eine Constante, die — wenn c, wie stets in der Praxis, > 4 genommen wird — kleiner als $\frac{1}{10000}$ ist.

Somit ist die Null ein für die Praxis völlig ausreichender Näherungswert von U.

Der Inhalt des vorstehenden Satzes läfst sich auch in eine rein geometrische Form bringen.

Es liege ein einem Kreise einbeschriebenes reguläres n-Eck vor. Man trage n-mal eine Strecke von constanter Länge l so ein, dafs immer der eine Endpunkt ein Eckpunkt des n-Ecks ist, der andere auf einem beliebig, aber fest gewählten Durchmesser liegt. Dann ist die absolute Summe der Projectionen dieser n Strecken l auf den Durchmesser näherungsweise gleich einer Constanten C, wie man auch den Durchmesser um den Mittelpunkt des Kreises drehen möge. Ist der Radius des Kreises gleich 1, und $l > 4$, so beträgt die Abweichung der gemeinten Summe von der Constanten C weniger als $\frac{1}{10000}$. Geometrische Sätze dieser Art sind bisher wohl noch wenig aufgestellt. Für $l = \infty$ ergiebt sich ein Grenzfall, den man — einer Mitteilung meines Freundes R. Mehmke zufolge — schon früher mit Erfolg bei der Herstellung gewisser Modelle (Curvimeter) benutzt hat.

Über die Beschlüsse der internationalen Katalog-Conferenz zu London im Juli 1896.

Von **W. Dyck** (München).

Dem Wunsche, einen Bericht über die im Juli dieses Jahres stattgehabte internationale Katalog-Conferenz zu erstatten, sei durch das gegenwärtige kurze Referat entsprochen, welches die wesentlichsten Punkte der Londoner Beratungen zusammenfafst.

Es handelt sich um einen Katalog aller zur Mathematik und zu den Naturwissenschaften gehörenden Werke und Abhandlungen, der mit dem Beginne des nächsten Jahrhunderts einsetzen soll und in erster Linie sich in den Dienst der wissenschaftlichen Forschung zu stellen bestimmt ist.

Die Royal Society in London hat für das gegenwärtige Jahrhundert in dem Catalogue of scientific papers ein nach den Autoren geordnetes Verzeichnis aller Abhandlungen mathematischen und naturwissenschaftlichen Inhaltes geschaffen. Die Herstellung eines nach den Autoren und nach dem Inhalte geordneten Kataloges, für welchen noch weiter genauere Inhaltsangabe in kurzen Schlagworten geplant ist, übersteigt Mittel und Kräfte einer einzelnen Körperschaft, sie kann nur durch das Zusammenwirken der einzelnen Cultur-

staaten, wie durch die Beteiligung der Autoren selbst ermöglicht werden.

So hat die Conferenz ins Auge gefafst, dafs die Herbeischaffung des Materiales und dessen vorläufige Klassificirung Sache der einzelnen Länder sein soll, dafs die einzelnen Autoren durch die Aufstellung kurzer Inhaltsangaben ihrer Abhandlungen an dem Werke sich beteiligen sollen, dafs endlich ein Central-Bureau, unterstützt durch eine internationale Commission, auf Grund der so geschaffenen Unterlagen die Ausarbeitung und Veröffentlichung des Kataloges bewerkstelligen soll.

Für die Aufführung der Werke und Abhandlungen, deren Sprache nicht als allgemein bekannt angesehen werden kann, wie für die Aufstellung der alphabetischen Register ist die Zugrundelegung einer Hauptsprache des Kataloges unerläfslich. Als solche wurde einstimmig die englische Sprache gewählt. Dabei soll aber von einer Übersetzung aller als geläufig anzusehenden Sprachen abgesehen werden, und weiterhin sollen alle Anordnungen getroffen werden, welche den Gebrauch des Kataloges für die nichtenglischen Sprachen zu erleichtern geeignet sind.

Die Veröffentlichung des Kataloges soll zunächst in der Form von Karten für die einzelnen Abhandlungen erfolgen, so zwar, dafs dieselben nach den einzelnen Wissenschaften und Unterabteilungen derselben gesondert zur Ausgabe gelangen. Darüber hinaus ist die Zusammenfassung dieser Abteilungen in Buchform in gewissen Zeitabschnitten beabsichtigt.

Was die gesamte Anordnung des Kataloges und die Klassificirung der einzelnen Abhandlungen anlangt, so kam auf der Versammlung eine ganz entschiedene Ablehnung des sogenannten Dewey'schen Decimal-Systems, wie es in amerikanischen Bibliotheken und in den Plänen des belgischen internationalen bibliographischen Bureaus eingeführt ist, in seiner jetzigen Form zum Ausdruck. Die Conferenz konnte sich für keines der zur Zeit in Vorschlag gebrachten Systeme entscheiden, übertrug vielmehr der mit der weiteren Organisation betrauten Commission die Ausarbeitung geeigneter Klassificationen.

Als Sitz des Centralbureaus wurde London einstimmig gewählt; die Royal Society in London hatte die Initiative ergriffen und die bisherigen umfassenden Vorbereitungen getroffen; sie hat durch die bisherige Herausgabe des Catalogue of scientific papers reichste Erfahrung und einen Stock eingearbeiteten Personals auch für die geschäftliche Durchführung zur Verfügung.

Was die Aufbringung der Kosten für die Durchführung des Unternehmens anlangt, so erfordert eine Übersicht über dieselben noch weitere detaillirte Vorbereitung. Jedenfalls wird es Sache der

einzelnen Staaten sein müssen, für die im eigenen Lande zu schaffenden Einrichtungen, die der Herbeischaffung und vorläufigen Klassificirung des Materiales dienen, Sorge zu tragen. Dagegen steht in Aussicht, dafs das Centralbureau in London durch Aufbringung eines Garantiefonds in freiwilliger Zeichnung seine Stütze erhalte.

Möge das grofsartig gedachte und angelegte Unternehmen zur Durchführung gelangen und an seinem Teile der wissenschaftlichen Arbeit dienen, möge es ein neues Bindeglied werden, welches die geistigen Interessen aller Culturvölker vereinigt!

Über die mathematischen und mechanischen Principien in Anwendung auf technische Probleme.

Von **Heun** (Berlin).

Bei der raschen Entwickelung aller mathematischen Disciplinen, angesichts der in ihren Principien nahezu vollständig ausgebauten theoretischen Mechanik ist es eine auffallende Erscheinung, dafs zwischen den Methoden dieser abstracten Wissenschaften und denen der heutigen theoretischen Technik ein ausgeprägter Gegensatz besteht.

Die theoretische Mechanik hat bereits in dem grundlegenden Werke von Lagrange einen präcisen Abschlufs gefunden. Umfassenderen Anwendungen derselben — namentlich der Dynamik — auf den Maschinenbau begegnen wir erst in den Arbeiten von Navier, Coriolis und Poncelet. Hier ist es zunächst das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte, welches zum analytischen Ansatz der praktischen Bewegungsprobleme dient. Die Theorie der Schwungräder, der Regulatoren, den Einflufs oscillirender Massen finden wir in Poncelet's technischer Mechanik streng theoretisch entwickelt. Indes haben sich die Schriften der unmittelbar in der Praxis stehenden Techniker weniger mit diesen von allgemeinen mathematischen Anschauungen getragenen Ausführungen befafst. Sie begnügten sich mit einer elementaren Theorie einzelner Maschinenteile und verliefsen in der Methode der Untersuchung immer mehr die rein analytische Auffassung, indem sie die graphischen Durchführungsmittel bevorzugten. Aber während in der Statik die graphischen Methoden eine leitende Stütze an allgemeineren geometrischen Sätzen fanden, wurde für die praktischen dynamischen Probleme ein solcher Anschlufs an die Geometrie in befriedigender Weise nicht gefunden. Die Daten wurden vielmehr bei den meisten constructiven Aufgaben, soweit diese dynamischer Natur sind, in specieller Form gegeben und zeichnerisch bis zu dem Punkte durchgeführt, welcher für die Beurteilung des Einzelfalles ausschlaggebend ist.

Das d'Alembert'sche Princip hatte in den älteren technischen Arbeiten eine untergeordnete Stellung. Erst in Radinger's „Dampfmaschinen mit hoher Kolbengeschwindigkeit“ (1870) wird dieses Princip bei Betrachtung der oscillirenden Massen zum Ausgangspunkt gemacht, indem der Massendruck als wesentlicher Factor für die Beurteilung der praktischen Grenzen der Kolbengeschwindigkeit, der Wirkung des Schwungrades und dgl. berücksichtigt wird. Wenn auch Poncelet das Problem der Dampfmaschine schon in umfassender Form zum Ansatz gebracht und in gewissem Grade theoretisch gelöst hatte, so hat doch Radinger das Verdienst, die für die Praxis ausschlaggebenden Folgerungen aus den einfachsten Ansätzen gezogen zu haben. Der Technik mag hiermit vorläufig gedient sein. Vom Standpunkt der theoretischen Mechanik ist aber ein solches Problem erst dann als gelöst zu betrachten, wenn aus allgemeinen Daten eine allgemeine Lösung hervorgegangen ist. Eine solche Forderung ist nach dem gegenwärtigen Stand der Mathematik erfüllbar. Für den Mathematiker ist z. B. die Dampfmaschine ein Pendel, welches in einem Kraftfelde schwingt, dessen Intensitätsverhältnisse durch ein allgemeines Dampfverteilungsdiagramm gegeben sind. Die allgemeine analytische Behandlung eines solchen Problems verlangt die Darstellung des Kraftfeldes in bestimmter — im gegenwärtigen Falle am bequemsten als eine auf möglichst wenig Glieder beschränkte periodische Reihe. Das Princip der lebendigen Kräfte giebt nun für jeden gesetzmäſsigen Widerstand, so lange er Function einer Raumvariabeln ist, die Ansatzgleichung. Der analytische Ausdruck für die lebendige Kraft des Systems läſst sich ohne Schwierigkeit ganz allgemein aufstellen. Hieraus kann man die Massendrucke oder beliebige Componenten derselben durch Differentiation formal ableiten. Das Problem des Schwungrades ist ein einfaches Corollar der allgemeinen Bewegungsgleichungen. Insbesondere führt die Bestimmung der Periode für den Fall der stationären Bewegung bei constanter Belastung auf eine Quadratur, welche durch die Beschaffenheit des Kraftfeldes charakterisirt ist. Aber schon bei diesem verhältnismäſsig einfachen Problem macht sich die Notwendigkeit geltend, die vorhandenen Mittel der Analysis, soweit sie die annäherungsweise Darstellung bestimmter Integrale und der Lösungen von Differentialgleichungen betreffen, weiter auszubilden und in möglichst einfache Formen zu bringen. Die Ausgestaltung solcher analytischer Anschluſsmethoden, die vorwiegend auf die Riemann'sche Functionentheorie zu gründen sind, ist demnach als eine Aufgabe zu betrachten, die ohne Verzug in Angriff genommen werden muſs, wenn der Mathematiker praktisch brauchbare allgemeine Lösungen technischer Probleme von wesentlich dynamischem Charakter gewinnen will.

Die Unstetigkeiten der Flüssigkeitsbewegungen.

Von **Otto Rausenberger** (Frankfurt a. M.).

In seiner grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1858: „Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen", führte v. Helmholtz die Wirbelbewegungen in der Weise ein, daſs er von unendlich dünnen Wirbelfäden ausging, die sich rotatorisch bewegen, während die sich daran anschlieſsende übrige Flüssigkeitsbewegung rotationsfrei ist, also ein Geschwindigkeitspotential zuläſst. Nach des Vortragenden, in mehreren Abhandlungen bereits dargelegter Ansicht ist die Annahme der Wirbelfäden überflüssig. Die Wirbel sind eine Unstetigkeit der rotationslosen Flüssigkeitsbewegung. Ebenso wie analytische Functionen gewisse Unstetigkeitspunkte aufweisen, sind auch sonst stetige Bewegungen incompressibler Flüssigkeiten, das einfache geradlinige Strömen ausgenommen, ohne Unstetigkeiten, die meistens in Linien auftreten, nicht denkbar. Freilich zeigen sich diese Unstetigkeiten nur dann mit Notwendigkeit, wenn sich die Flüssigkeit allseitig ins Unendliche erstreckt, während sie durch die Umgrenzungen vielfach ausgeschlossen werden. Auch sind sie von den durch v. Helmholtz eingeführten Discontinuitätsflächen zu unterscheiden.

Die Theorie der Flüssigkeitsunstetigkeiten ist leicht für den Fall einer Bewegung durchzuführen, die parallel zu einer Ebene vor sich geht. Sie findet sich bereits, freilich zu einem ganz anderen Zweck aufgestellt, in der Klein'schen Arbeit: „Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale" und wurde vom Vortragenden in dessen Programmabhandlung: „hydrodynamische Untersuchungen und deren Anwendung auf die Bewegungen der Atmosphäre" (1895) eingehend behandelt. Auſser der Wirbelbewegung existiren noch gewisse Unstetigkeiten im Unendlichen, sowie die positive und negative Quellenbewegung und höhere Unstetigkeiten im Endlichen. Für unendlich ausgedehnte Flüssigkeiten kommen auſser einer höheren Unstetigkeit nur die Wirbel in Betracht. Die Untersuchung beliebiger Flüssigkeitsbewegungen im Raume ist vom Vortragenden begonnen, jedoch noch nicht durchgeführt; eine Quellenbewegung mit punktförmigem Centrum ist möglich. Im allgemeinen läſst sich sagen, daſs eine Flüssigkeitsbewegung (Incompressibilität, Reibungslosigkeit und Rotationslosigkeit vorausgesetzt), von einem gleichförmigen Strömen abgesehen, durch den Ort und die Art ihrer Unstetigkeiten völlig charakterisirt ist.

Die in der Umgebung der Wirbel vorhandene sehr groſse Geschwindigkeit erzeugt eine solche Druckverminderung, daſs sich bei incompressibeln Flüssigkeiten eine freie Oberfläche bilden muſs; so werden unendliche Geschwindigkeiten thatsächlich vermieden. Den

strengen Gesetzen der Hydrodynamik nach müfste diese freie Oberfläche, in der constanter Druck (etwa $p = 0$) herrscht, von Stromlinien gebildet werden; doch ist dies wahrscheinlich nur beim einfachen, stillstehenden Wirbel wirklich zu erreichen. Es finden also teilweise Unterbrechungen des Zusammenhanges der Flüssigkeit statt, wie sie in Wirklichkeit fortwährend beobachtet werden; allein es ist schwer, ihren Einflufs auf den Verlauf der Gesamtbewegung festzustellen.

Im Zusammenhang hiermit steht die Untersuchung sich fortbewegender Wirbel. Es mag hier genügen auszusprechen, dafs die v. Helmholtz'sche Theorie der Fortbewegung der Wirbel dem Vortragenden nicht richtig zu sein scheint, und dafs der Gegenstand einer gründlichen Revision bedarf.

Keller, Dr. phil. **H.**, in Münster i/W., über den Urstoff und seine Energie. I. Teil. Eine physikalisch-chemische Untersuchung über die theoretische Bedeutung der Gesetze von DULONG-PETIT und KOPP auf der Grundlage einer kinetischen Theorie des festen Aggregatzustandes. [58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.—

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik I. Band: Mechanik. 4. Aufl. herausg. von Prof. Dr. W. WIEN. Mit 18 Figuren im Text. [X u. 464 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 13.—

Koenigsberger, Dr. **Leo,** Professor der Mathematik an der Universität zu Heidelberg, Hermann von Helmholtz's Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik und Mechanik. Mit einem Bildnis Hermann von Helmholtz's von FRANZ VON LENBACH vom 30. April 1894. [IV u. 58 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.40.

Kohlrausch, Dr. **F.**, Präsident der physikalisch-technischen Reichsanstalt in Charlottenburg, Leitfaden der praktischen Physik, mit einem Anhange: das absolute Mafs-System. 8. vermehrte Aufl. [XVI u. 492 S. m. zahlr. Textfig.] gr. 8. 1896. Biegs. in Lwd. geb. n. ℳ 7.—

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von SOPHUS LIE und GEORG SCHEFFERS. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 24.—

v. Lilienthal, Dr. **R.**, a. o. Professor der Mathematik an der kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von THEOPHIL FRIESENDORFF und ERICH PRÜMM. Mit einem Vorworte von R. MEHMKE, o. Prof. an der k. technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Minkowski, Dr. **Hermann,** o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Neumann, Dr. **C.**, Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, allgemeine Untersuchungen über das Newton'sche Princip der Fernwirkungen m. besonderer Rücksicht auf die elektrischen Wirkungen. [XXI u. 292 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 10.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. SCHOENFLIES u. FR. POCKELS. In 2 Bänden. gr. 8. geh. n. ℳ 50.—

Einzeln:

I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. SCHOENFLIES. Mit einem Bildnis Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. ℳ 20.—

II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von FR. POCKELS. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. ℳ 30.—

Schlegel, Dr. **V.**, Professor an der Gewerbeschule in Hagen, die Grassmann'sche Ausdehnungslehre. Ein Beitrag zur Geschichte der Mathematik in den letzten fünfzig Jahren. [44 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdocent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.—

Schubert, Dr. **Herm.**, Fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. geb. n. *M.* 4.—

Schüller, Werner Jos., Seminarlehrer in Boppard am Rhein, ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare, besonders zum Selbstunterricht. In engster Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet. Mit 54 Figuren im Text. Zweite, um die Logarithmen vermehrte, wohlfeile Ausgabe. [XXVI u. 478 S.] gr. 8. 1897. Dauerhaft geb. n. *M.* 2.50.

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes Paris, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. Axel Harnack, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band. Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M.* 10.—

Stahl, Dr. **Hermann**, Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

Staude, Dr. **Otto**, ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 7.—

Stolz, Dr. **Otto**, ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf**, ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil. Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 18.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., Franz Neumann, * 11. September 1798, † 23. Mai 1895. Ein Beitrag zur Geschichte deutscher Wissenschaft. Dem Andenken an den Altmeister der mathematischen Physik gewidmete Blätter unter Benutzung einer Reihe von authentischen Quellen. Mit einem Bildniss Franz Neumann's. [VII u. 68 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.40.

——— erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 6.—

Weiler, Dr. **A.**, in Zürich, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. [VII u. 210 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 2.80.

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. Zweiter Band. Die Lehre von der Wärme. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 131 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XI u. 936 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M.* 12.—

[Band III, Magnetismus und Elektricität, ist unter der Presse, Band IV, Lehre vom Licht, in Vorbereitung.]

DIE ENTWICKELUNG
DER SYNTHETISCHEN GEOMETRIE
VON MONGE BIS AUF STAUDT (1847).

ERSTER BAND EINES BERICHTES,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

ERNST KÖTTER,

PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU AACHEN.

JAHRESBERICHT DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG.
FÜNFTER BAND. ZWEITES HEFT.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

Vorwort.

In den folgenden Blättern liegt der erste Band eines Berichtes über die Entwickelung der synthetischen Geometrie vor, mit dessen Ausarbeitung ich mich infolge eines ehrenvollen Auftrages der Deutschen Mathematiker-Vereinigung seit geraumer Zeit beschäftigt habe. Zunächst mögen einige Worte über den Plan Platz finden, welcher dem ganzen Unternehmen zu Grunde gelegt wurde. Der Bericht soll eine möglichst vollständige Darlegung aller derjenigen geometrischen Entwickelungen bieten, die sich mit rein geometrischen Mitteln auf den Fundamentalsatz der Geometrie der Lage zurückführen lassen. Es wird sich also wesentlich um algebraische Gebilde und um Beziehungen zwischen Mannigfaltigkeiten handeln, die sich aus solchen Gebilden aufbauen lassen. Grundsätzlich ausgeschlossen bleiben hierbei freilich diejenigen Untersuchungen, welche Aufgaben der Differentialgeometrie mit elementaren oder rein geometrischen Mitteln behandeln. Hierher gehören z. B. die schönen Arbeiten von Steiner über den Inhalt von Fufspunktcurven und Rollcurven, über isoperimetrische Probleme u. s. w. Eine solche Beschränkung erschien aber bei der Fülle des zu bewältigenden Stoffes um so mehr geboten, als bei einem Referat über die Entwickelung der synthetischen Geometrie eine gewisse Ausführlichkeit der Darstellung unerläfslich ist. Ganz allmählich verschiebt sich nämlich der Standpunkt, von dem aus die synthetische Geometrie an ihre Aufgaben herantritt. Griff sie zunächst nur gelegentlich und wenig methodisch ein, um Abkürzungen in der Herleitung von Resultaten zu erzielen, welche sich mit den noch wenig ausgebildeten Methoden der analytischen Geometrie nur nach beschwerlichen Rechnungen gewinnen liefsen, so forderte sie schliefslich immer entschiedener die völlige Aufdeckung eines rein geometrischen Weges, der von den ersten Voraussetzungen zum Resultate führt. Vielfach wird dieses Ziel nur nach mehreren Versuchen erreicht. So erweisen sich öfters gerade solche Arbeiten für die Entwickelung der synthetischen Geometrie als sehr bedeutungsvoll, die an sich neue Resultate nur in geringem Mafse bieten. Um solche Fortschritte in der Methode gehörig hervortreten zu lassen, mufste ich häufig zu einer sehr ausführlichen

Darstellung greifen. In vielen Fällen handelte es sich um die weitere Ausbildung oder die Ausdeutung von Resultaten, die ursprünglich mit den Methoden der analytischen Geometrie gewonnen waren. Es erschien mir naturgemäfs, die wichtigsten dieser Entwickelungen in mein Referat aufzunehmen. So erklärt sich seine äufsere Erscheinung, an der vielleicht die vielen auftretenden Formeln auffallen dürften.

Nach reiflicher Überlegung entschlofs ich mich, etwa ein Jahrhundert als die zu schildernde Zeitspanne zu wählen, ohne damit frühere Entwickelungen grundsätzlich auszuschliefsen; solchen Resultaten, auf welche auch im Referat selbst vielfach verwiesen wird, ist die Einleitung (Cap. I) gewidmet. Als naturgemäfser Anfangspunkt bot sich das Jahr des ersten Erscheinens von Monge's Géométrie descriptive, 1795, dar. Ist auch die Ausbeute an eigentlich der synthetischen Geometrie zuzuweisenden Entwickelungen bei Monge nicht eben grofs, so ist er doch wegen des auf ihn zurückzuführenden gewaltigen Aufschwungs in dem gesamten geometrischen Anschauungsvermögen als einer der Hauptförderer, ja der Begründer unserer Wissenschaft zu betrachten. Die in dem Referat geschilderten Schriften sind, soweit angängig, nach ihrem Inhalte zusammengefasst worden. Um jedoch auch ein chronologisches Gerüst nicht vollständig zu entbehren, habe ich den ganzen Zeitraum mit Hülfe einiger Hauptwerke in fünf freilich sehr ungleiche Epochen zerlegt. Es boten sich hier dar: Poncelet's Traité des propriétés projectives des figures, Steiner's Systematische Entwickelung und Staudt's Geometrie der Lage. Demgemäfs zerfällt der vorliegende erste Band in drei Teile mit den Überschriften: Von Monge bis auf Poncelet (1822), Von Poncelet bis auf Steiner (1822—1832), Von Steiner bis auf Staudt (1832—1847). In dem zweiten Bande des Referates wird noch eine Epoche gesondert behandelt werden, deren Endpunkt durch das Erscheinen des dritten Heftes der Beiträge zur Geometrie der Lage gegeben ist (1860). Von da ab gedenke ich die einzelnen Gebiete ohne Unterbrechung bis zur Gegenwert hin zu verfolgen.

Es könnte zunächst befremden, dafs bei dieser Einteilung keines der Hauptwerke von Chasles mit in Betracht gezogen ist. Doch wird ein Blick auf das Inhaltsverzeichnis dieses Bandes zeigen, dafs ich in ausgiebigster Weise bemüht gewesen bin, seiner Bedeutung gerecht zu werden. Die wissenschaftliche Thätigkeit Chasles' läfst sich ohne grofsen Zwang innerhalb des eben angegebenen Rahmens behandeln. In die erste meiner Epochen fallen nur einige kleine, aber recht wichtige Notizen von Chasles. Aus inneren Gründen wurden im ersten Teile noch Entwickelungen über Oberflächen zweiter Ordnung behandelt, die zeitlich in den zweiten Teil gehört hätten. In demselben werden mehrere Abhandlungen besprochen, die durchaus auf dem Boden von Poncelet's Traité stehen, und in denen wesentlich mit collinearen und reciproken Transformationen

operirt wird. Nach langjähriger, durch die Herausgabe des Aperçu historique verursachter Pause erscheinen dann Schriften Chasles', in denen das Doppelverhältnis in seiner ganzen Bedeutung hervortritt. Demgemäfs sind im dritten Teile die Abhandlung des Aperçu, einige von seinen so wichtigen Noten und mehrere an sie sich anschliefsende Arbeiten zu behandeln. In den späteren Teilen des Referates ist die stetige Fortentwickelung dieser Methoden zu schildern. Ein ganz neuer Gesichtspunkt tritt aber in der vierten meiner Epochen bei Chasles' Arbeiten über die projectivische Erzeugung algebraischer Curven hervor; füglich kann man die letzte Phase seiner wissenschaftlichen Thätigkeit mit seinen Arbeiten über das Correspondenzprincip einleiten, von denen allerdings nur die ersten Ansätze in den Rahmen meines Referates fallen. Manche wichtige Frage hat Chasles in langen Zwischenräumen wiederholt behandelt. Solche vereinzelte, vom Standpunkte meiner Einteilung aus versprengte Arbeiten habe ich ohne Rücksicht auf den Zeitpunkt ihrer Entstehung an geeigneter Stelle berücksichtigt. So sind z. B. im dritten Teile eine Abhandlung über Raumcurven dritter Ordnung aus dem Jahre 1857 und die abschliefsenden Arbeiten über das Déplacement fini aus den Jahren 1860 und 1861 besprochen worden. Überhaupt habe ich mich sorgfältig gehütet, die Fäden zu zerreifsen, welche von der einen zur anderen Epoche vielfach hinüberführen. Ich habe häufig, wenn eine Zerlegung auf mehrere Teile nicht angängig erschien, eine ganze Entwickelung da geschildert, wo vom Standpunkte der synthetischen Geometrie aus ihr Schwerpunkt zu suchen war.

Es möge hier eine kurze Übersicht über den Inhalt des ersten Bandes Platz finden. Drei Abschnitte des ersten Teiles behandeln der Reihe nach Entwickelnngen über Kegelschnitte, über Oberflächen zweiter Ordnung, endlich über Kreis- und Kugelsysteme. Von einem stetigen Fortschreiten der synthetischen Geometrie konnte hier noch keine Rede sein; es galt mehr nur Keime für spätere Entwickelungen aufzuzeigen, wobei vielfach auf ältere Schriften hinzuweisen war. Eine nähere Inhaltsübersicht ist im Capitel I gegeben worden.

Der zweite Teil bringt in seinem ersten Abschnitt eine ausführliche Besprechung von Poncelet's Traité. Auf Schriften, die mit demselben in Zusammenhang stehen, wird vielfach verwiesen. Ausführlicher wird insbesondere die Litteratur der verallgemeinerten Aufgabe des Pappus und des Poncelet'schen Schliefsungstheorems berücksichtigt (Cap. XVI—XIX). Im zweiten Abschnitte behandle ich zunächst das Dualitätsprincip und den Gergonne-Poncelet'schen Streit (Cap. XX) und bespreche dann im Cap. XXI eine Reihe von Abhandlungen, insbesondere von Chasles und Bobillier, die mit Poncelet's „théorie des polaires réciproques“ in Beziehung stehen, mit dieser wichtigen Abhandlung zusammen. In dem Cap. XXII

über die collineare Transformation beschäftige ich mich zunächst eingehend mit der 1831 verfafsten Arbeit Staudt's, welche mit den im Traité von Poncelet geschaffenen Anschauungen operirt. Ich wende mich dann an der Hand einer 1830 verfafsten Schrift Chasles' zu den Beziehungen zwischen congruenten und ähnlichen Figuren. Hierauf bin ich an verschiedenen späteren Stellen zurückgekommen. Einige analytisch-geometrische Entwickelungen werden zum Schlusse behandelt. Cap. XXIII bespricht vorzugsweise Möbius' Barycentrischen Calcül, giebt aber andererseits über Plücker's und Bobillier's erste Einführungen der trimetrischen Coordinaten Auskunft.

Untersuchungen über algebraische Curven und Flächen sind die drei Capitel (XXIV—XXVI) des dritten Abschnittes gewidmet. Anwendungen der Transversalen-Theorie, wobei besonders Arbeiten von Poncelet, Chasles, Sturm, aber auch solche von Maclaurin und Newton Berücksichtigung finden, werden im Cap. XXIV besprochen. Cap. XXV bringt zunächst Sätze über eine bestimmte circulare Curve dritter Ordnung, die Quetelet'sche — bezw. van Rees'sche — Focale, sodann einen sehr interessanten Briefwechsel zwischen Quetelet und Chasles über die Raumcurve vierter Ordnung erster Art. Im Cap. XXVI gehe ich zuerst auf Schnittpunkttheoreme von Gergonne und Plücker genauer ein und bespreche sodann Arbeiten von Bobillier und Plücker zur Polarentheorie.

Der dritte Teil des vorliegenden Bandes ist ebenfalls in drei Abschnitte gegliedert, deren erster Kegelschnitte und einschalige Hyperboloide als Erzeugnisse projectivischer Gebilde behandelt. Cap. XXVII und XXVIII besprechen die Systematische Entwickelung und daran sich anschliefsende Abhandlungen Steiner's. Cap. XXIX ist fast völlig, Cap. XXX zum grofsen Teile Schriften Chasles' gewidmet. Es werden vor allem mehrere Noten des Aperçu besprochen, in denen die ersten grundlegenden Entwickelungen Chasles' über die projectivische Erzeugung der Kegelschnitte und einschaligen Hyperboloide vorliegen. Mehrere Abhandlungen über die letzteren Gebilde schliefsen sich an (Cap. XXIX). Schriften zur Theorie der Involution, über Büschel und Scharen von Kegelschnitten werden im Cap. XXX behandelt, wobei besonders eine umfangreiche, aus dem Jahre 1838 stammende Arbeit zu berücksichtigen war. In der zweiten Hälfte des Capitels werden sodann sehr ausführlich die für die synthetische Geometrie grundlegenden Aufsätze von Seydewitz über die bezeichneten Fragen besprochen.

Sehr wichtige Entwickelungen von Seydewitz bietet auch Cap. XXXI, welches den Abschnitt über Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter und dritter Stufe einleitet. Es wird die Herstellung quadratischer, collinearer und reciproker Verwandtschaften mit Hülfe zweier projectivischen Beziehungen erörtert, sodann wird die zeitlich vorangehende Behandlung solcher Fragen von Plücker und Magnus

besprochen. Cap. XXXII bringt hauptsächlich die schönen Entwickelungen von Magnus über die collineare und reciproke Beziehung im Raume und über die aus drei reciproken Beziehungen entstehende Verwandtschaft dritter Ordnung. Ferner wird hier ausführlich die Abhandlung des Aperçu historique besprochen, während der reiche Inhalt seiner Noten an verschiedenen Stellen des Referates verwertet wird. Das Capitel über das Nullsystem (XXXIII) beschäftigt sich mit den Arbeiten von Möbius und Giorgini, sowie mit den kurzen, aber inhaltreichen Notizen im Aperçu historique. Im Interesse eines guten Abschlusses wurden auch die Folgerungen, welche Sylvester im Jahre 1861 aus Möbius' statischen Betrachtungen gezogen hat, mit den zugehörigen Bemerkungen Chasles' aufgeführt. Hier haben auch Chasles' letzte Arbeiten über das Déplacement fini Platz gefunden.

Der dritte Abschnitt des dritten Teils enthält vier den Oberflächen zweiter Ordnung und den algebraischen Curven gewidmete Capitel. Cap. XXXIV behandelt an der Hand von Seydewitz' Abhandlungen aus den Jahren 1847 und 1851 die Erzeugung der Oberflächen zweiter Ordnung durch reciproke Strahlenbündel und ihre Construction, wenn neun ihrer Punkte vorliegen. Für jetzt werden nur noch die von Lamé und Hesse herrührenden Lösungen dieser Aufgabe besprochen. Die von Bögehold 1898 veröffentlichte Monographie über die Litteratur dieser Frage war bei der Ausarbeitung der betreffenden Nummern mir noch nicht bekannt. Im zweiten Bande dieses Berichtes wird sie natürlich berücksichtigt werden. Im Cap. XXXIV werden dann weiter Sätze besprochen, die zu dem Pascal'schen Satze analog sind. Endlich wird genauer auf Hesse's Entwickelungen über Gruppen associirter Punkte eingegangen. Eine erste Reihe von Ergebnissen über Focaleigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung habe ich im Cap. XXXV zusammengestellt. Mit den schönen Darlegungen der Note 31 des Aperçu historique werden vorbereitende Arbeiten von Dupin, Binet, Ampère, Steiner, Bobillier in Verbindnng gebracht. Sodann folgen die Arbeiten von Mac Cullagh, Salmon, Amiot, Chasles u. A. über die modulare und umbilicare Erzeugung der Oberflächen zweiter Ordnung. Abgeschlossen habe ich hier mit Jacobi's Erzeugung der Oberflächen zweiter Ordnung und Townsend's eleganter Begründung derselben.

Cap. XXXVI behandelt zunächst Arbeiten von Seydewitz und Chasles, Notizen von Hesse über die Raumcurve dritter Ordnung. Chasles' Arbeit von 1857 ist hier, wie schon erwähnt, berücksichtigt worden, obwohl es auf der anderen Seite mifslich war, sie von den Arbeiten von Cremona und Schröter zu trennen. Sodann wird die Classification der ebenen Curven dritter Ordnung sehr ausführlich besprochen. Ich beschäftige mich schliefslich mit der Darstellung

der Curve dritter Ordnung als Tripelcurve. Hier sind die Resultate von Hesse im Zusammenhange dargestellt und noch die ersten Arbeiten von Cayley mit herangezogen worden. Die synthetische Behandlung dieser Fragen, auf die ich natürlich in voller Ausführlichkeit zurückkomme, wurde für jetzt nur eben angedeutet. Cap. XXXVII bringt zunächst Plücker's Classification der Curven vierter Ordnung und giebt dann Entwickelungen über die Plücker'schen Gleichungen und die Brennpunkte algebraischer Curven. Nach Besprechung von Grafsmann's Theorie der Centralen schliefse ich mit Arbeiten von Jacobi, Plücker, Cayley u. A. über Schnittpunkttheoreme in der Ebene und im Raume ab.

Viel später, als ursprünglich erwartet werden durfte, kann ich das Buch nun endlich der Öffentlichkeit übergeben. Als der Druck des Bandes 1897 begann, lag der erste Teil des Manuscriptes vollständig vor. Obwohl die übrigen Teile des Manuscriptes noch einer durchgreifenden Überarbeitung bedurften, hoffte ich doch, die Drucklegung schnell fördern zu können. Verschiedene Umstände haben meine Absicht vereitelt. Die Hauptursache der Verzögerung war eine für mich sehr erfreuliche Thatsache, meine Berufung auf den Lehrstuhl für darstellende Geometrie in Aachen. Die überaus starken Ansprüche, welche in der neuen Thätigkeit an meine Zeit gestellt wurden, brachten die Drucklegung sehr bald ins Stocken und verhinderten mich längere Zeit hindurch, an dem Referat zu arbeiten. Nachdem im Herbste 1898 die erste Lieferung des Bandes (Bogen 1—8) erschienen war, wurde meine feste Absicht, die Schlufslieferung baldigst folgen zu lassen, durch länger andauernde Kränklichkeit verhindert. Als ich endlich die Arbeit an dem Referat wieder aufnehmen konnte, erwiesen sich sehr umfangreiche und demnach auch sehr zeitraubende Umarbeitungen der zweiten Hälfte des ersten Entwurfes als notwendig. Auch in den älteren, bereits abgesetzten Partien wurden leider sehr grofse Änderungen bei der Correctur unvermeidlich, durch welche die Drucklegung natürlich aufserordentlich verzögert und die Geduld der Redaction wie der Druckerei auf harte Proben gestellt wurden. Es ist mir ein tiefgefühltes Bedürfnis, der Verlagsbuchhandlung für ihr stetes Entgegenkommen, den Herren Gutzmer und Wangerin für die grofsen Opfer an Zeit und Mühe und für die bedeutende Förderung, welche sie meinem Werke zuteil werden liefsen, meinen wärmsten Dank auszusprechen. Auch Herrn Denizot, der vom 11. Bogen ab mich bei der Correctur unterstützt hat, bin ich zu Danke verpflichtet.

Aachen, im April 1901.

Ernst Kötter.

Erster Teil.

Von Monge bis auf Poncelet (1822).

I. Einleitung.

Erster Abschnitt.

Untersuchungen zur Lehre von den Kegelschnitten.

II. Geschichte des Pascal'schen Satzes.

III. Construction des Kegelschnittes aus fünf Punkten und Tangenten.

IV. Büschel und Schar; einfach unendliche Mannigfaltigkeiten; die Involution.

V. Polareigenschaften.

IX. Kreisschnitte und Geradenscharen.

X. Flächenbüschel, Raumcurve vierter Ordnung.

XI. Polarentheorie. Die Oberflächen, welche zwei Kegelschnitte gemein haben.

XII. Die Aufgabe, zu drei Schnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung einen berührenden Kegelschnitt zu finden. Die stereographische Projection bei Oberflächen zweiter Ordnung.

Dritter Abschnitt.

Kreis- und Kugel-Lehre.

XIII. Die stereographische Projection.

XIV. Kreis- und Kugelverwandtschaft.

XV. Die Aufgabe des Apollonius.

Zweiter Teil.

Von Poncelet bis auf Steiner (1822—1832).

Erster Abschnitt.

Der Traité und Entwickelungen, welche sich unmittelbar an ihn knüpfen.

XVI. Traité, Section I.

XVII. Poncelet's Traité, Section II und III.

XVIII. Poncelet's Traité, Section IV.

XIX. Poncelet's Traité, Supplément.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Transformationen.

XX. Das Dualitätsgesetz.

Dritter Teil.

Von Steiner bis auf Staudt (1832—1847).

Erster Abschnitt.

Kegelschnitte und einschalige Hyperboloide.

XXIX. Die projectivische Beziehung bei Chasles. Historische Übersicht.

1—3. Ältere Arbeiten, welche das Doppelverhältnis bei der Erzeugung von Kegelschnitten verwerten.

4—5. Chasles, Noten 9, 15, 16 des Aperçu historique etc. (1837).

7—12. Arbeiten von Chasles über einschalige Hyperboloide.

XXX. Die Involution zweiter Ordnung. Büschel und Schar von Kegelschnitten.

1—2. Chasles, Note 10 des Aperçu historique etc. (1837).

3—8. Chasles, Mémoire sur les lignes conjointes etc. (1838).

XXXIII. Das Nullsystem.

Dritter Abschnitt.

Oberflächen zweiter Ordnung. Algebraische Curven.

XXXIV. Erzeugung und Construction der Oberflächen zweiter Ordnung; Büschel und Bündel aus Oberflächen zweiter Ordnung.

XXXV. Focaleigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Fünfter Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die Entwickelung der synthetischen Geometrie.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von

Dr. Ernst Kötter,

Professor an der technischen Hochschule zu Aachen.

1. Lieferung.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

A. Wangerin in Halle a. S.

A. Gutzmer in Halle a. S.

Leipzig,

Druck und Verlag von B. G. Teubner.

1898.

Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Heften bestehenden Bandes. Die Schluß-Lieferung erscheint demnächst.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Bianchi, Luigi, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Autorisierte deutsche Übersetzung von Max Lukat, Oberlehrer in Hamburg. 2 Lieferungen. I. Lieferung. [IV u. 336 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 12.— [II. Lieferung unter der Presse.]

Cantor, Moritz, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. In 3 Bänden. III. Band: Vom Jahre 1668 bis zum Jahre 1758. In 3 Abteilungen. [XIV u. 893 S.] gr. 8. 1894—98. geh. n. *M* 24.—

I. Abteilung: 1668—1699. Mit 45 Figuren im Text. [251 S.] 1894. n. *M* 6.—
II. Abteilung: 1700—1726. Mit 30 Figuren im Text. [S. 253—472.] 1896. n. *M* 6.—
III. Abteilung: 1727—1758. Mit 70 Figuren im Text. [XIV u. S. 473—893.] 1898. n. *M* 12.—

Cranz, Prof. Dr. Carl, Lehrer für Physik an der Kgl. Oberrealschule und Docent an der Kgl. Technischen Hochschule in Stuttgart, Compendium der theoretischen äusseren Ballistik. Zum Gebrauch von Lehrern der Mechanik und Physik an Hochschulen; von Artillerieofficieren; Instructoren an Schiessschulen, Artillerieschulen und Kriegsacademieen; Mitgliedern von Artillerie- und Gewehr-Prüfungscommissionen; Gewehrtechnikern. Mit 110 Figuren im Text. [XII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 20.—

Czuber, E., Vorlesungen über Differential- und Integral-Rechnung. 2 Bde. gr. 8. 1898. In Leinwand geb. n. *M* 22.—

I. Band: [XIII u. 526 S.] n. *M* 12.—
II. Band: [X u. 428 S.] n. *M* 10.—

Föppl, Dr. A., Professor an der Technischen Hochschule zu München, Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bde. gr. 8. In Leinwand geb.

I. Band: Einleitung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. [XV u. 412 S.] 1898. n. *M* 10.—
III. Band: Festigkeitslehre. Mit 70 Figuren im Text. [XVI u. 472 S.] 1897. n. *M* 12.—
II. u. IV. Band befinden sich in Vorbereitung.

Fricke, Robert, und Felix Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. I. Band: Die gruppentheoretischen Grundlagen. Mit 192 in den Text gedruckten Figuren. [XIV u. 634 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 22.—

Frischauf, Dr. Johannes, Professor an der Universität Graz, Vorlesungen über Kreis- und Kugel-Functionen-Reihen. [VI u. 60 S.] gr. 8. 1897. geh. n. *M* 2.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physischen Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren: Jakob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. In 3 Bänden. I. Band. II. Theil: Die Ausdehnungslehre von 1862. Mit 37 Figuren im Text. [VIII u. 511 S.] gr. 8. 1896. geh. n. *M* 16.—

Gundelfinger, Dr. Sigmund, Prof. an der Technischen Hochschule zu Darmstadt, Tafeln zur Berechnung der reellen Wurzeln sämtlicher trinomischer Gleichungen. Hinzugefügt sind vierstellige Additions-, Subtraktions- und Briggische Logarithmen sowie eine Interpolationstafel für alle Differenzen unter Hundert. [IV u. 15 S.] 4. 1897. Steif geh. n. *M* 1.40.

Holzmüller, Prof. Dr. Gustav, Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen, Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie, die Ingenieur-Mathematik in elementarer Behandlung. 2 Tle. II. Teil, enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorien der Gravitation, des Magnetismus, der Elektricität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlreichen Übungsbeispielen und einem Anhange über die Maſseinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Lnw. geb. n. *M* 6.—

Erster Teil.

Von Monge bis auf Poncelet (1822).

I. Einleitung.

1. Die synthetische Geometrie als Wissenschaft datirt seit dem Erscheinen von Poncelet's „traité des propriétés projectives des figures" im Jahre 1822. Dies fundamentale Werk bildet aber den Abschlufs einer Bewegung, die etwa am Beginn unseres Jahrhunderts durch die vielseitigen Anregungen hervorgerufen wurde, die Monge*) in seinen Vorträgen an der École polytechnique auf einen grofsen Kreis von Zuhörern ausübte. Nach dem Zeugnis seiner Schüler liebte er es ganz besonders, auf die Beziehungen hinzuweisen, welche die Geometrie des Raumes mit der der Ebene verbinden, und so aus sinnfälligen räumlichen Beziehungen überraschende Folgerungen abzuleiten. Beispiele hierfür sind uns in der Herleitung des Satzes von der Ähnlichkeitsaxe, in der Behandlung der Polareigenschaften des Kreises erhalten. Sicherlich ist auch unter Monge's Einflufs die Anschauung zur allgemeinen Geltung gelangt, welche für unsere erste Epoche gewissermafsen als Leitmotiv gelten kann, nach der zwei beliebige Kegelschnitte einer Ebene als Projectionen zweier Kreise angesehen werden können oder, was dasselbe ist, gleichzeitig ein Kegelschnitt in einen Kreis und eine beliebige Gerade seiner Ebene ins Unendliche hinaus projicirt werden kann. Wenn man so gewonnene Resultate ohne weiteres auf den Fall überträgt, in dem die gegebenen Kegelschnitte vier reelle Punkte gemein haben, so liegt das durchaus in Monge's Sinne, der nach Hankel**) „das Imaginäre als eine zufällige Folge der zufälligen Lageverhältnisse ansieht, welche auf die wesentlichen Eigenschaften solcher Gebilde, die durch eine permanente Eigenschaft definirt sind, keinen Ein-

*) Monge's Géométrie descriptive ist in Buchform zuerst (an VII) 1799 herausgekommen. Die ersten Veröffentlichungen geschahen aber bereits 1795. Vgl. Séances des écoles normales, recueillies par des sténographes etc. Paris (an III) 1795, Bd. 1—4.

**) Hermann Hankel, Die Elemente der projectivischen Geometrie in synthetischer Behandlung, Leipzig 1875, S. 7.

flufs haben kann." Wir sehen stillschweigend ein Princip gebraucht, das Poncelet später als Continuitätsprincip unumwunden ausgesprochen hat.

In der geometrischen Litteratur der ersten Epoche ist der starke Einflufs Carnot's unverkennbar. Er äufsert sich vorzugsweise in der Vorliebe, mit welcher Transversalenbetrachtungen als Beweismittel herangezogen werden. Solchen Beziehungen war einmal ein Abschnitt seines vielcitirten Hauptwerkes*), andererseits eine selbständige Schrift**) gewidmet. Es handelt sich hier vor allen Dingen um Anwendungen des Hauptsatzes, dafs

$$\prod_{\alpha=1}^{n} AB_\alpha \cdot BC_\alpha \cdot CA_\alpha = \prod_{\alpha=1}^{n} AC_\alpha \cdot BA_\alpha \cdot CB_\alpha$$

ist, sobald $A_1, \cdots, A_n, B_1, \cdots, B_n, C_1, \cdots, C_n$ die Schnittpunkte einer Curve $n$ter Ordnung mit den Seiten eines Dreiecks ABC sind. Nachdem er diese Relation zunächst aus dem Newton'schen Potenzsatze (S. 436) entwickelt und daraus Folgerungen gezogen, denen wir begegnen werden, giebt er in der zweiten Schrift eine specielle Begründung für den Kreis aus dessen Potenzeigenschaft und leitet erst aus den gewonnenen Ergebnissen durch projectivische Verallgemeinerung Eigenschaften der Kegelschnitte ab. Diesen Weg sehen wir vielfach, z. B. in Schriften von Chasles und Brianchon, eingeschlagen. Alle diese Betrachtungen konnten freilich die Unterstützung durch die unmittelbare Anschauung nicht entbehren. Jedes Ergebnis war ja, solange man bei den Strecken nicht auch das Vorzeichen in Betracht zog, an und für sich vieldeutig, es konnte z. B. die Beziehung

$$AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1,$$

wenn A_1, B_1, C_1 den Seiten BC, CA, AB angehören, sowohl ausdrücken, dafs A_1, B_1, C_1 in einer Geraden liegen, als auch, dafs AA_1, BB_1, CC_1 in einem Punkt zusammenlaufen. Um hierüber in dem Einzelfalle die Entscheidung zu treffen, war es erforderlich, eine geeignete, jedoch völlig allgemeine Lage der Figur nachzuweisen, bei der die Beziehung thatsächlich die erwartete Bedeutung hat. Alsdann konnte man aus dem Stetigkeitsgefühl heraus sich der Allgemeingültigkeit versichert halten. Meist wird dieses „Correlationsprincip", so haben wir es mit Carnot zu bezeichnen, stillschweigend vorausgesetzt. Freilich der Hauptnutzen seines Princips trat für Carnot dann hervor, wenn ein an einer Figur gewonnenes Ergebnis

*) L. N. M. Carnot, Géométrie de position, Paris 1803, Section 5.

**) L. N. M. Carnot, Mémoire sur la relation qui existe entre les distances respectives de cinq points quelconques pris dans l'espace; suivi d'un essai sur la théorie des transversales, Paris 1806.

auf eine andere Figur von derselben Allgemeinheit, aber anderen Lageverhältnissen, also z. B. eine trigonometrische Formel für das spitzwinklige Dreieck auf das stumpfwinklige Dreieck, übertragen werden sollte. Die Formel konnte ohne weiteres auf die zweite Figur übertragen werden, wenn man sich über die „Correlation der Vorzeichen" klar geworden war, das heifst sich überzeugt hatte, welche Bestimmungsstücke negativ geworden sind beim Übergange von der einen Figur zur anderen. Auf diese Weise konnte er alle möglichen Fälle in einer einzigen Formel zusammenfassen. Es ist zu bekannt, als dafs ich länger dabei verweilen müfste, dafs erst Möbius diesem Princip eine mathematisch strenge Begründung zu teil werden liefs.

2. Die Untersuchungen, über die ich im ersten Teile berichte, sind auf drei Abschnitte verteilt, die der Theorie der Kegelschnitte, der Oberflächen zweiter Ordnung, endlich der Kreis- und Kugellehre gewidmet sind. In der Kegelschnittlehre werden zwei Capitel (II, III) sich mit der Construction aus fünf Bestimmungsstücken, Punkten und Tangenten, beschäftigen; und zwar werde ich zunächst mit einer Übersicht über die Geschichte des Pascal'schen Satzes und seines dualen Gegenstücks, des Satzes von Brianchon, beginnen. Ein anderes Capitel (IV) wird sich mit den einfach unendlichen Mannigfaltigkeiten, im Anschlufs daran mit der Involution beschäftigen. Die Capitel V und VI sind den Polar-, Mittelpunkt- und Brennpunkteigenschaften gewidmet. Endlich werde ich in einem Schlufscapitel (VII) die Entstehung des Kegelschnittes aus dem geraden Kegel ins Auge fassen.

Mit ganz besonderer Vorliebe haben sich bekanntlich Monge und seine Schüler mit den Oberflächen zweiter Ordnung beschäftigt. In dem Vordergrund steht hierbei die Reduction auf die Hauptaxen, im Anschlufs daran die Ermittelung von Beziehungen unter den Tripeln conjugirter oder orthogonaler Durchmesser (VIII). Hieran schliefst sich zunächst die Ermittelung der Kreis- und Geradenscharen (IX), die Entwickelung der Polareigenschaften. Von verschiedenen Gesichtspunkten her gelangt man zu dem System der confocalen Oberflächen und erkennt in ihren Schnittcurven die von Monge entdeckten Krümmungslinien. Endlich wird von Lamé der Begriff des Flächenbüschels geschaffen (X). Freilich herrscht hier fast absolut die analytische Geometrie; einer nicht rechnenden Behandlung erweisen sich zunächst nur die Polareigenschaften als zugänglich (XI). Dieselben geben einen Schlüssel für die Eigenschaften des Flächenbüschels, dessen Grundcurve in zwei Kegelschnitte zerfällt, und führen später zu einer Verallgemeinerung und freieren Auffassung der Gesetze der stereographischen Projection (XII).

Der dritte Abschnitt ist endlich der Kreis- und Kugellehre gewidmet. Im ersten Capitel (XIII) beschäftige ich mich mit der stereographischen Projection im engeren Sinne, im zweiten (XIV) mit der

Kreis- und Kugelverwandtschaft, im dritten endlich mit der Aufgabe des Apollonius und seinem räumlichen Analogon (XV). Es versteht sich von selbst, dafs ich die Fäden überall mit Sorgfalt verfolgt habe, die in frühere Jahrhunderte zurückführen. In dem Folgenden soll nur auf einiges Hauptsächlichste kurz hingewiesen werden. Andererseits habe ich mich, besonders im dritten Abschnitt, nicht zu ängstlich an die von mir selbst gewählte Einteilung angeschlossen. Ich habe z. B. die Kreisverwandtschaft bis zu den Arbeiten von Möbius verfolgt, durch welche dieselbe einen gewissen Abschlufs erfährt. Bei der Aufgabe des Apollonius habe ich ferner erst bei der Darlegung des Zusammenhangs mit der Theorie der bicircularen Curven und Flächen zweiter Ordnung die Behandlung abgebrochen.

3. Definirt man eine Curve geradezu als die Schnittlinie, welche eine Ebene mit einem geraden oder schiefen Kreiskegel gemein hat, so ist es nach modernen Begriffen beinahe unvermeidlich, ganze Reihen von Eigenschaften vom Kreise auf den Kegelschnitt durch Projection zu übertragen. In der That bietet uns auch die Theorie der Kegelschnitte die ersten Beiträge zu einer Vorgeschichte der synthetischen Geometrie. Auch den Alten sind solche Erwägungen nicht fremd geblieben, wenn sie auch in ihrem Hauptwerk, den acht Büchern über Kegelschnitte des Apollonius, vollständig unterdrückt sind. Apollonius entnimmt in der That aus räumlichen Beziehungen fast nur eine planimetrische, schon Archimedes bekannte Definition, welche den Gleichungsformen

$$y^2 = \pm \frac{b^2}{a^2}(x+a)(a-x) \quad \text{bez.} \quad y^2 = 2px$$

entspricht.*) Das Hauptmittel für seine Untersuchungen bilden identische Beziehungen zwischen Flächenstücken, die mit Hülfe eines Curvenpunktes in gesetzmäfsiger Weise sich bilden lassen; man hat mit Zeuthen**) in dem Werk des Apollonius eine Behandlung im Sinne einer antiken analytischen Geometrie zu erblicken.

4. Als Beweismittel in ausgiebigem Gebrauch sehen wir die

---

*) Apollonii Pergaei conicorum libri octo, et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo, Ed. Halley, Oxford 1710. Die vier ersten Bücher sind im griechischen Text, die drei folgenden in arabischer Übersetzung erhalten, das achte hat Halley ergänzt (lib. I, Propp. 11 ff., S. 31 ff.).

Archimedes kennt schon den Potenzsatz des Apollonius, nach dem für zwei in M sich schneidende Sehnen A_1A_2 und B_1B_2 eines Kegelschnittes $\frac{MA_1 \cdot MA_2}{MB_1 \cdot MB_2}$ nur von den Richtungen der beiden Sehnen abhängt (liber III, Prop. 17, S. 172 ff.). Jedoch kann er den Wert der Constanten nur als Quadrat des Verhältnisses der zugehörigen Tangenten definiren und war deshalb bei der Hyperbel auf die Betrachtung eines Astes beschränkt.

**) Zeuthen, Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsch von Fischer-Benzon. Kopenhagen 1886.

Methode der Projection bei Desargues*), Pascal**) und de la Hire.***) Pascal hat z. B. seinen berühmten Satz zuerst am Kreise bewiesen und ihn sodann durch Projection auf den Kegelschnitt übertragen. Charakteristisch ist für alle drei, daſs sie die Erhaltung des Doppelverhältnisses benutzen, um metrische Eigenschaften durch Projection vom Kreise auf den Kegelschnitt zu übertragen. Auf diese Weise hat z. B. Desargues den Satz gewonnen, daſs ein Kegelschnitt und zwei Paare gegenüberliegender Seiten eines eingeschriebenen Vierecks von einer Geraden in einer Involution aus sechs Punkten getroffen werden. Ebenso überträgt de la Hire die Theorie der Polaren vom Kreise auf den Kegelschnitt unter Benutzung des Umstandes, daſs eine harmonische Punktgruppe wieder in eine harmonische Punktgruppe projicirt wird. Die beiden geläufige Anschauung der Fluchtlinie gestattet, aus den Polareigenschaften die der conjugirten Durchmesser abzuleiten. Bereits Aguilonius†) hat übrigens entwickelt, daſs bei der Projection eines Kreises in eine andere Ebene der Pol der Fluchtlinie in den Mittelpunkt des Kegelschnittes übergeht. Aus einer Anmerkung zu Euklid's Optik muſs man schlieſsen, daſs Pappus††) nicht unbekannt mit diesem Zusammenhang gewesen sein kann.

5. Ein berühmtes Beispiel für die Anwendung der Centralprojection ist Newton's Satz, daſs jede Curve dritter Ordnung als Schatten einer semicubischen Parabel betrachtet werden kann. Newton führt den Satz bekanntlich mit zwei anderen am Schluſs seiner „Enumeratio linearum tertii ordinis“ ohne Beweis an.†††) Während diese anderen

---

*) Desargues, Brouillon project d'une atteinte aux éuénemens des rencontres d'un cone auec un plan, Paris 1639. Oeuvres de Desargues réunies et analysées par Poudra, Bd. 1, Paris 1864, S. 97ff.

**) Pascal, Essai pour les coniques, 1640; Oeuvres de Blaise Pascal, Bd. 4, La Haye 1779, S. 1—7.

***) Von den drei selbständigen Werken de la Hire's beruhen zwei auf der Anwendung des Projicirens.

1) Ph. de la Hire, Nouvelle méthode en géométrie pour les sections des superficies coniques et cylindriques etc., Paris 1673.
2) Ph. de la Hire, Sectiones conicae in novem libros distributae, Paris 1685.
In seinem dritten Werk
3) Ph. de la Hire, Nouveaux élémens des sections coniques, les lieux géométriques etc., Paris 1679

geht er von den Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte aus.

†) Francisci Aguilonii Opticorum libri sex, Antwerpen 1613, S. 289.

††) Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit Fridericus Hultsch, Bd. 1—3, Berlin 1876—1878 (Bd. 2, S. 593, liber 6, Prop. 54).

†††) Opticks: or, a treatise of the reflections, refractions, inflexions and colours of Light. Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures, London 1704. (Das Titelblatt nennt Newton's Namen nicht, die Vorrede ist mit J. N. unterzeichnet): Enumeratio linearum tertii ordinis (Bd. 2, S. 137—169) Prop. 29, S. 157.

Sätze, durch welche der Potenzsatz des Apollonius auf Curven dritter Ordnung ausgedehnt und zu dem Durchmesser-Satz der Kegelschnitte ein Analogon geschaffen wird, schon von Stirling*) bewiesen wurden, scheint Clairaut**) den eigentlichen Grund des Satzes von der semicubischen Parabel zuerst erkannt zu haben. Newton's enumeratio hat vielfach zu Einteilungen der Curven dritter Ordnung geführt. Neben den schon genannten Arbeiten von Stirling und Clairaut sind solche von Nicole***), Cramer†), Euler††), Murdoch†††) anzuführen. Zu dem, was wir jetzt Geometrie auf der Curve dritter Ordnung nennen, finden sich die Anfänge bei Maclaurin.*†) Er folgert eine grofse Reihe der uns bekannten Sätze aus dem Theorem von Cotes.**†) Ich komme hierauf im zweiten und dritten Teile zurück.

6. Desargues spricht in seinem „Brouillon project"***†) bekanntlich den Satz aus, dafs alle zu einander parallelen Geraden als die Strahlen eines Bündels mit unendlich fernem Centrum anzusehen sind. Offenbar ist diese Regel aus den Gesetzen des perspectivischen Zeichnens erwachsen. Es hatte aber eines Zeitraums von beinahe 40 Jahren bedurft, um diese, nach unseren Begriffen beinahe selbst-

---

*) Jacob Stirling, Isaaci Newtoni Enumeratio linearum tertii ordinis; sequitur illustratio eiusdem tractatus, Paris 1797 (in erster Auflage: Oxoniae 1717); (Prop. 10, S. 117).

**) Clairaut, Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position [datirt vom 12. December 1731], Hist. de l'Ac., Année 1731, Paris 1733, T. II, Mém., S. 483—494 (S. 491).

***) Nicole, Traité des lignes du troisième ordre ou des courbes du second genre. Hist. de l'Ac. Année 1729, Paris 1731, T. I, Hist., S. 37—43, T. II, Mém., S. 194—224. Nicole, Manière d'engendrer dans un Corps solide toutes les lignes du troisième ordre. Hist. de l'Ac., Année 1731, Paris 1733, Mém., S. 494—510.

†) G. Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750, Cap. 9.

††) L. Euler, Introductio in analysin infinitorum, Bd. 2, Lausanne 1748, Cap. 9 u. 10.

†††) Murdoch, Newtonis Genesis Curvarum per umbras, Leyden 1740, London 1746. Dieses Werk ist mir unzugänglich geblieben.

*†) Colin Maclaurin, Appendix: De linearum geometricarum proprietatibus generalibus Tractatus, London 1748. Erschienen als Anhang mit selbständiger Paginirung zu: A Treatise of Algebra, in three parts, to which is added an appendix concerning the general properties of Geometrical Lines, London 1748. (Nach Maclaurin's Tode erschienen.)

**†) Maclaurin giebt an dem angeführten Ort aufser dem üblichen analytischen Beweise noch einen zweiten Beweis (S. 25—29). Das Theorem wird bezeichnet als „hucusque ineditum" (S. 2). Es ist ihm von Smith aus den Papieren von Cotes ohne Beweis mitgeteilt worden. Smith spricht offenbar in der Vorrede (S. 6) der von ihm herausgegebenen Harmonia mensurarum Rogeri Cotesii, Cambridge 1722, von diesem Theorem, in dem Buche selbst habe ich es nicht auffinden können.

***†) Oeuvres, Bd. 1, S. 105.

verständliche Folgerung aus dem Gesetz des Fluchtpunktes zu ziehen, das Ubaldo*) bereits 1600 allgemein ausgesprochen hatte. Er begründet (S. 43), dafs unter sich parallele Strahlen als Gerade, die in einem Punkt zusammenlaufen, abgebildet werden. Dieser Punkt wird von dem durch das Auge gelegten Parallelstrahl ausgeschnitten. Um für die Richtungen einer horizontalen Ebene die Fluchtpunkte zu erhalten, schlägt er dieselbe in die Bildebene herunter und zieht aus dem Punkt, in welchen der Fufspunkt des aus dem Auge gefällten Lotes sich umlegt, eine Gerade der gewünschten Richtung. Von ihrem Spurpunkt aus hat man alsdann die Augenhöhe senkrecht aufzutragen. Von einer Geraden des Grundrisses erhält man als Abbildung die Verbindungslinie von Spurpunkt und Fluchtpunkt; die Abbildung eines Punktes erfolgt, indem man zwei beliebige ihn enthaltende Gerade abbildet. Sind also m', n', a' die Bilder der Punkte m, n, a, so schneiden sich mn und $m'n'$, ma und $m'a'$, na und $n'a'$ auf der Spurlinie, und man kann so aufs leichteste, wenn zwei Paare entsprechender Punkte m, m' und n, n' vorliegen, zu jedem anderen den zugehörigen finden. Mit Recht erblickt Chr. Wiener**) in diesen Regeln die Keime für die perspectivisch-collineare Umformung der Ebene.

Legt man die Hauptebene in die Bildebene herunter, so ergiebt sich ohne weiteres folgende, von Chasles de la Hire zugeschriebene Methode der Umformung. Neben zwei parallelen Geraden, der Formatrix und Directrix, sei ein fester Pol gegeben. Einer beliebigen Geraden ordne man die Verbindungslinie der Punkte zu, in denen sie selbst und eine durch den Pol gelegte Parallele Formatrix und Directrix treffen, alsdann wird auch jedem Punkte der einen ein bestimmter Punkt der anderen Ebene zugeordnet, und es gehen, wie de la Hire durch umständliche trigonometrische Entwickelungen dargethan hat, Verbindungslinien entsprechender Punkte durch den Pol hindurch. Nach Chasles' Angabe bestand hierin die von de la Hire in seinen „Planiconiques"***) benutzte Umformung,

---

*) Guidi Ubaldi e Marchionibus montis Perspectivae libri sex, Pisauri 1600.

**) Chr. Wiener, Lehrbuch der darstellenden Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1884. Erster Abschnitt: Geschichte der darstellenden Geometrie, S. 16. Wesentlich mit Rücksicht auf diese vortreffliche Darstellung glauben wir uns ein näheres Eingehen auf die Geschichte der Perspective versagen zu können.

***) De la Hire spricht von seinen „Planiconiques" in der Vorrede der Nouveaux Élemens etc. (S. 1). Nach Chasles' Angabe (Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, Paris 1837, 2. Auflage 1875, S. 127—129) bildete die Untersuchung unter dem Titel Planiconiques einen zweiten Teil der Nouvelle méthode etc. Das mir zugängliche Exemplar, ein Band von 73 Seiten, enthält diesen zweiten Teil indessen nicht.

mit deren Hülfe er, ohne aus der Ebene hinauszugehen, einen Kreis in einen Kegelschnitt umformte.

Bereits Newton benutzt eine allgemeinere, nicht perspectivische collineare Umformung der Ebene.*) Auf zwei Geraden mögen sich d und D so bewegen, daſs ihre Verbindungslinie durch einen festen Punkt O hindurchgeht. Von d und D aus mögen in festen Richtungen Strecken dg und DG aufgetragen werden, die zu Od und OD proportional sind, alsdann beschreiben g und G collineare Figuren. Der Hauptzweck seiner Transformation, die in die allgemeinste collineare übergeht, wenn man etwas allgemeiner

$$\frac{OD}{Od} = c\frac{DG}{dg}$$

setzt, ist für Newton, einzelne Punkte einer Figur ins Unendliche entfernen zu können.

7. Bosse**) hat Desargues' Beweise für seinen berühmten Satz von den perspectivischen Dreiecken erhalten. Für den Raum hat er genau die Schluſsweise angewendet, die uns jetzt so geläufig ist; zu dem Specialfall, daſs beide Dreiecke einer Ebene angehören, ist er mit Hülfe der Parallelprojection übergegangen. In Form eines Bewegungsgesetzes war dieser letztere bereits den Alten bekannt. Die beiden Beispiele, die Pappus***) am Beginn seines siebenten Buches als Beispiele aus den drei Büchern Porismen

---

Daſs es de la Hire liebte, die ihm geläufigen Gesetze der Perspective bei der Behandlung mathematischer Aufgaben zu benutzen, wird an seiner Behandlung der Aufgabe klar, den Ort des Scheitels eines Winkels zu finden, der an einem Kegelschnitte gleitet. Projicirt man den Kegelschnitt in einen Kreis und schlägt die durch die Spitze des Kegels gelegte Parallelebene zu der des Kegelschnitts in die Kreisebene herunter, so entsteht folgende Fassung der Aufgabe: Man suche die Kreuzungspunkte der Tangentenpaare eines Kreises, deren Schnittpunkte A, A_1; B, B_1; C, C_1; ... mit einer festen Geraden einen und denselben Winkel an einem bestimmten Punkte der Ebene bestimmen. De la Hire ermittelt nun die Fluchtpunktbeziehung unter den projectivischen Punktreihen ABC ... und $A_1 B_1 C_1$ ... und gelangt durch eine ziemlich schwerfällige Rechnung zu einer Curve vierter Ordnung für den allgemeinen Fall, zu einem Kegelschnitt für den Fall eines rechten Winkels. Daſs der letztere sich in einen Kreis zurückprojicirt, wird aus Symmetrie-Betrachtungen geschlossen. Vgl. Construction générale des lieux où sont les sommets de tous les angles égaux droits, aigus ou obtus qui sont formés par les Touchantes des Sections coniques. Hist. de l'Ac. Année 1704, Paris 1706, T. 2, Mém., S. 220—232.

*) Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, liber 1, Lemma 22, S. 85. Wir kommen hierauf und auf die allgemeineren Entwickelungen Waring's im zweiten Teile zurück.

**) Bosse, Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective etc., Paris 1648. Poudra giebt eine Inhaltsübersicht dieses Werkes: Oeuvres de Desargues, Bd. 2, S 17ff. und teilt die betreffenden Entwickelungen mit: ibidem Bd. 1, S. 416ff.

***) Pappi Collectanea ed. Hultsch, S. 653—655.

Euklid's mitteilt, lauten nach Simson's*) scharfsinniger Interpretation etwa folgendermaſsen:

„Drehen sich die Seiten eines Dreiecks um drei feste, in einer Geraden liegende Punkte, und schreiten zwei Ecken auf festen Geraden fort, so bewegt sich auch die dritte Ecke auf einer Geraden, welche durch den Schnittpunkt der beiden ersten hindurchgeht." Ganz Analoges gilt für den Fall des vollständigen n-Seits. An diese Sätze knüpfen nun die Entwickelungen an, welche für die Vorgeschichte der synthetischen Geometrie die wichtigsten sind. Läſst man die Beschränkung fallen, daſs die gegebenen Drehpunkte einer Geraden angehören, so werden alle übrigen Punkte Kegelschnitte beschreiben. Dieses allgemeine Theorem: Drehen sich n Gerade um feste Punkte, und werden $n - 1$ von einander unabhängige Schnittpunkte über feste Gerade geführt, so beschreiben alle übrigen Schnittpunkte Kegelschnitte oder gerade Linien, bildet den Abschluſs von Braikenridge's „Exercitatio geometrica" (S. 60)**); aus dem Specialfalle dreier Pole ergiebt sich ihm der Pascal'sche Satz. Indessen hängt der Satz aufs innigste mit der „descriptio organica" Newton's***) zusammen. Für den Lehrsatz, daſs die freien Schenkel zweier festen, um ihre Scheitel gedrehten Winkel einen Kegelschnitt erzeugen, wenn der Schnittpunkt der beiden anderen auf einer Geraden fortschreitet, bildet den Durchgangspunkt ein Lemma, das sich als Specialfall des Braikenridge'schen Satzes für drei Drehpunkte auffassen läſst, nämlich der schon von Cavalerius†) aufgestellte Satz: Bleibt eine Seite eines Dreiecks zu sich selbst parallel, während ihre Ecken auf Geraden fortschreiten, und drehen sich die beiden anderen Seiten um feste Punkte, so durchläuft die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welchem auch die beiden Drehpunkte angehören. Als Specialfälle der descriptio organica lassen sich die beiden Erzeugungen auffassen, die de Witt††) für Parabel und Hyperbel mitteilt (liber I, Cap. 1 u. 2). Im ersteren Fall ist der eine Winkel in einen Strahl ausgeartet, der sich parallel zur Axe der Parabel

*) Pappi Alexandrini Propositiones duae ... Restitutae a ... Roberto Simson, Phil. Trans. f. 1723, Bd. 32, 1724, S. 330—339.

**) Braikenridge, Exercitatio geometrica de descriptione linearum curvarum, London 1733.

***) Die Bezeichnung descriptio organica gebraucht Newton in der Enumeratio (§ 31), der im Text angedeutete Beweis findet sich in den Principia (liber 1, Lemma 21). Auch in der Arithmetica universalis ist Newton auf diesen seinen Lieblingssatz zurückgekommen (Cap. 14, Probl. 57).

†) Cavalerius, Exercitationes geometricae sex, Bononiae 1647. Exercitatio sexta (Aperçu historique, S. 100).

††) Johannis de Witt Elementa curvarum linearum. Edita opera Francisci a Schooten, Amsterdam 1683 (die Vorrede de Witt's ist 1658 unterzeichnet) enthalten in: Bartholinus, Principia Matheseos universalis seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes, Amsterdam 1683, S. 153—340.

oder einer Asymptote der Hyperbel bewegt, im zweiten Fall ist der eine Winkel in einen Strahl ausgeartet, der sich um einen festen Punkt dreht, der andere Winkel in ein Paar paralleler Strahlen, welches unter festem Abstand parallel zu einer Asymptote bewegt wird, während die andere Asymptote die Bewegung der unfreien Schenkel regelt. Ellipsen werden durch alle Punkte einer Geraden beschrieben, von der sich zwei feste Punkte auf gegebenen Geraden bewegen (liber I, Cap. 3). Dieses Theorem, das für den Fall zweier senkrechter Strahlen schon von Stevin*) ausgesprochen und auf Ubaldo**) zurückgeführt war, wird von de Witt auf schiefwinklige Axen erweitert. Überdies giebt er für die Ellipse die schon von Stevin (a. a. O. S. 18) und Mydorgius***) angegebene Ableitung aus dem Kreise durch Vergrößerung der Abscissen in constantem Verhältnis. Auf der anderen Seite kann man die descriptio organica Newton's durch Einführung beliebig vieler Winkel erweitern. Dreht man n feste Winkel um ihre Scheitel, während man zugleich $n - 1$ unabhängige Schnittpunkte über feste Geraden bewegt, so durchlaufen die übrigen Schnittpunkte Kegelschnitte. Man kann nun die Winkel in Strahlen ausarten lassen, die sich um feste Punkte drehen, und erhält alsdann die Braikenridge'sche Erzeugungsweise. Maclaurin hat diese Bemerkung bei Gelegenheit seiner Fehde mit Braikenridge gemacht. Die Erweiterung auf n Winkel ist ihm nach dieser Äußerung schon 1720 bei Abfassung seiner „Geometria organica" bekannt gewesen, er habe, eben, weil sie doch nur wieder auf Kegelschnitte führt, sie nicht ausdrücklich aufgeführt.

8. Noch aus einem anderen Grunde müssen wir bei diesen Entwickelungen verweilen. Sie bieten uns neben der uralten Kreisverwandtschaft die ersten Beispiele für eine quadratische Verwandtschaft. Bereits Newton hat am Schluß der enumeratio die Erzeugung mit Hülfe zweier Winkel auf Curven dritter und vierter Ordnung ausgedehnt. Wird der eine Durchschnitt P der Schenkel zweier Winkel PAD, PBD über einen Kegelschnitt geführt, so beschreibt der andere, D, eine Curve vierter Ordnung mit Doppelpunkten in A und B und der besonderen Lage E von D, für welche die Schenkel AP und BP in AB zusammenfallen. Diese Curve ist von der dritten Ordnung, wenn AD und BD gleichzeitig in die Lage AB geraten, oder der Kegelschnitt durch A oder B hindurchgeht. Man kann deshalb eine Curve dritter Ordnung durch

---

*) Simon Stevin, Tomus secundus Mathematicorum hypomnematum de Geometriae Praxi, Leyden 1605, S. 16.

**) Guidi Ubaldi Planisphäriorum universalium theorica, Pisauri 1579, S. 118 ff.

***) Claudii Mydorgii Prodromi catoptricorum et dioptricorum etc., Paris 1631, S. 110. Auf derselben Seite findet sich die in der Praxis noch heute übliche Ableitung aus zwei Kreisen.

sieben einfache und einen Doppelpunkt bestimmen. Die Curve dritter Ordnung artet in einen Kegelschnitt aus, wenn noch aufserdem AD und BD gleichzeitig in die Lage AB gelangen [§§ 31 bis 33]. Die thatsächliche Einführung des Gedankens der quadratischen Verwandtschaft erblicke ich in den Entwickelungen von Maclaurin.*) Den Geraden der D-Ebene werden Kegelschnitte zugeordnet, die durch A, B und einen dritten festen Punkt hindurchgehen. Sie haben also mit einer Curve, die D beschreibt, genau so viele Punkte gemeinsam, als die gegebene, von P beschriebene Curve mit den Kegelschnitten gemein hat. Es entspricht also einer Curve n^{ter} Ordnung eine solche von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung. Dieselbe hat A, B und E zu n-fachen Punkten, die Ordnung sinkt auf $2n - r$ herab, wenn die gegebene Curve A oder B r-fach enthält, die Asymptoten der neuen Curve correspondiren den Schnittpunkten mit einem festen Kegelschnitt, den P beschreibt, wenn AD und BD parallel bleiben. Deutlicher läfst er alles dies bei der Transformation eines Kegelschnittes hervortreten (S. 79—86). Am Schlufs seines Werkes kommt Maclaurin nochmals hierauf zurück, um eine Curve n^{ter} Ordnung durch einen $(n-1)$-fachen Punkt und $2n$ einfache Punkte zu construiren. Die Curve kann organisch aus einer anderen erzeugt werden, die den ausgezeichneten Punkt $(n-2)$-fach enthält und durch $2n-1$ gegebene Punkte hindurchgeht, und wird schliefslich durch eine Folge organischer Erzeugungen aus einem durch fünf Punkte gegebenen Kegelschnitt hervorgehen. Um die Eindeutigkeit seiner Lösung zu sichern, stellt er den für die Theorie der algebraischen Curven epochemachenden Satz auf, dafs eine Curve m^{ter} mit einer anderen n^{ter} Ordnung mn Schnittpunkte gemein hat, nachdem er die Fälle $m = 1, 2, 3$ bewiesen hat. Im Anschlufs daran wirft er die Frage auf, ohne sie beantworten zu können, wie es komme, dafs zwei Curven n^{ter} Ordnung mehr Schnittpunkte mit einander gemein haben, als zu ihrer Bestimmung hinreichen, giebt er ferner die noch jetzt übliche Bestimmung der Maximalzahl der Doppelpunkte einer Curve n^{ter} Ordnung. Auch im übrigen ist die Methode, die Maclaurin zur Bestimmung seiner Curven benutzt, die Betrachtung gewisser, grofsenteils mehrdeutiger Verwandtschaften. Er verallgemeinert z. B. die Newton'sche organische Erzeugung, indem er auch die Scheitel der auftretenden Winkel veränderlich macht. Wenn beispielsweise von einem offenen Polygon $C_0 C_1 C_2 \ldots C_{n+1} C_{n+2}$ die Winkel bei C_1, $C_2, \ldots, C_{n+1}$ gegeben sind, C_0 und C_{n+2} festgehalten und

*) Colin Mac Laurin, Geometria organica sive descriptio linearum curvarum universalis, London 1720. Eine Art Selbstanzeige des Buches bietet Maclaurin in der Abhandlung: Nova Methodus Universalis Curvas omnes cujuscunque Ordinis mechanicae describendi sola datorum Angulorum ac Rectarum Ope, Phil. Trans. f. 1718, Bd. 30, 1720, S. 939—945.

irgend n der Ecken C_1, C_2, . . ., C_{n+1} auf festen Geraden bewegt werden, so beschreibt die übrige Ecke eine Curve von der Ordnung $(n+2)$. Maclaurin beweist dies zunächst analytisch für die von C_{n+1} beschriebene Curve (C_{n+1}), überträgt es aber auf (C_r) etwa durch folgende Überlegung. (C_r) schneidet eine beliebige Gerade l ebenso oft, als die für C_{n+1} gegebene Gerade der Curve (C_{n+1}) begegnet, welche l und den übrigen für $C_1, \ldots, C_{r-1}, C_{r+1}, \ldots, C_n$ gegebenen Geraden entspricht, d. h. $(n+2)$-mal. Ebenso setzt er an Stelle der n gegebenen Geraden Curven beliebig hoher Ordnung ein. Eine der Erzeugungen für rationale Curven dritter Ordnung, die Maclaurin am Anfang seines Buches giebt, charakterisirt sie als Erzeugnis eines Strahlbüschels erster und eines dazu projectivischen Strahlbüschels zweiter Ordnung. Ich komme hierauf später zurück.

Auch Braikenridge's Buch bietet die Keime einer quadratischen Verwandtschaft. Drehen sich die Geraden A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 um feste Punkte B_1, B_2, B_3, schreitet A_3 über eine ein für allemal feste Gerade, A_1 über eine Curve n^{ter} Ordnung, so bewegt sich A_2 über eine Curve $2n^{ter}$ Ordnung. Wird A_2 über eine beliebige Gerade geführt, so beschreibt A_1 stets einen Kegelschnitt, dessen $2n$ Schnitttpunkten mit der gegebenen Curve die Punkte entsprechen, welche die von A_2 beschriebene Curve mit einer Geraden gemein hat (S. 26). Braikenridge beobachtet ferner, dafs die transformirte Curve B_1, B_3 und den Schnittpunkt D_3 von B_1B_2 mit der für A_3 gegebenen Geraden a_3 n-fach enthält, dafs ihre Ordnung um eine Einheit sinkt, wenn die gegebene Curve durch B_1 oder B_2 hindurchgeht, und dafs sie im letzteren Fall D_3 nur noch $(n-1)$-fach enthält. Aus ganz ähnlichen Schlüssen folgt, dafs A_1 eine Curve $(2mn)^{ter}$ Ordnung beschreibt, wenn A_2 über eine Curve m^{ter}, A_3 über eine Curve n^{ter} Ordnung geführt wird.

Für die Beschreibung einer Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$-fachem Punkt giebt er folgende Regel.*) Es mögen die Seiten eines n-Ecks $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ abwechselnd auf zwei Geraden liegen; werden nun diese selbst und A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ um feste Punkte P, P', B_1, B_2, ..., B_{n-1} gedreht, werden A_1 und der Schnittpunkt der ersteren Geraden über feste Gerade geführt, so beschreibt A_n eine Curve n^{ter} Ordnung, welche einen der Punkte P, P' zum $(n-1)$-fachen Punkt hat.

9. Bereits Pappus**) kennt den Satz, dafs vier von einem Punkte

*) Braikenridge, A general Method of describing Curves by the Intersection of Right-Lines; moving about Points in a given Plane, Phil. Trans. f. 1735. Bd. 39, 1738, S. 25—36.

**) lib. VII, Prop. 129; Umkehrung: Prop. 142; Ed. Hultsch, S. 871, 891.

ausgehende Geraden einer Ebene von allen anderen Geraden in Punktgruppen $ABCD$ von constantem Doppelverhältnis getroffen werden. Von dem Satz, nach welchem die Tangenten eines Kegelschnittes projectivische Punktreihen auf zwei festen Tangenten ausschneiden, begegnet man verschiedenen Specialfällen bereits bei Apollonius. Von Prop. 41, liber III ist die Erzeugung der Parabel durch ähnliche Punktreihen eine unmittelbare Folge. Für den Fall zweier paralleler Tangenten und der Asymptoten der Hyperbel (liber III, Propp. 42 u. 43) giebt er die Fluchtpunktrelation unter den auf ihnen entstehenden Punktreihen, deren allgemeinste Form bei zwei beliebigen Punktreihen von Newton mitgeteilt wurde. Auch die Erzeugung durch projectivische Strahlbüschel spricht sich auf mancherlei Art in solchen Fluchtpunktrelationen aus, so bei Apollonius (liber III, Propp. 54 ff.), in anderer Form z. B. bei Simson*), l'Hospital**) etc. Ich komme auf diese Relationen am Anfang des dritten Teiles in aller Ausführlichkeit zurück. Der Satz von der Erhaltung des Doppelverhältnisses, vornehmlich aber der specielle Fall der harmonischen Punktgruppe, war von besonderer Wichtigkeit und daher vielfach in Gebrauch in der Geometrie der geraden Linie. Von jeher hat es auf die Geometer grofsen Reiz ausgeübt, eine Beschränkung im Gebrauch der beiden von Alters her gegebenen Constructionsmittel, des Zirkels und des Lineals, eintreten zu lassen. Wir haben in dieser Beziehung das eine Extrem in der vielfach übersetzten und neu herausgegebenen Schrift Mascheroni's***), das andere Extrem in solchen Arbeiten, die sich lediglich auf das Lineal beschränken. Hierhin gehört unter anderem die Aufgabe, welche für die Perspective von grofser Bedeutung war, von einem gegebenen Punkte aus einen Strahl nach einem unzugänglichen Punkte zu ziehen, eine Strecke in eine Anzahl gleicher Teile zu zerlegen, wenn eine Parallele zu ihr gegeben ist, u. s. w.†) Fragen dieser Art sind vielfach von Lambert††) in seiner freien Perspective,

---

*) Simson, Sectionum conicarum libri V, Edinburg 1735, S. 189.

**) l'Hospital, Traité analytique des sections coniques, Paris 1707, (Ouvrage posthume), S. 103 Nr. 163. l'Hospital zeigt, dafs der Kegelschnitt erzeugt werden kann, indem man von den Endpunkten der Axe aus zwei congruente Punktreihen projicirt. Sein Satz schliefst sich also dem oben angeführten Theorem von Cavalerius an. Eine noch jetzt viel gebrauchte Construction der Parabel mittelst ähnlicher Punktreihen, deren eine vom unendlich fernen, die andere, welche auf einem Durchmesser liegt, von einem gewöhnlichen Parabelpunkt aus projicirt wird, gab schon Mydorgius (a. a. O. S. 105).

***) Mascheroni, La Geometria del compasso, Pavia 1797.

†) Verwandte Fragen, z. B. die Ermittelung der Länge einer unzugänglichen Strecke, behandelte bereits Schooten. Vergl. Francisci a Schooten exercitationum mathematicarum libri V, Leyden 1657 (liber II).

††) J. H. Lambert's freye Perspective oder Anweisung, jeden per-

von Servois*) und Brianchon**) behandelt worden. Ihren Abschlufs finden sie, wie ausführlich zu erörtern sein wird, in den Schriften von Poncelet und Steiner.

Erster Abschnitt.

Untersuchungen zur Lehre von den Kegelschnitten.

II. Geschichte des Pascal'schen Satzes.

1. Im siebenten Buche seiner Collectanea teilt Pappus als Prop. 143 folgendes Theorem mit.***) Liegen A_1, B_1, C_1 auf einer, A_2, B_2, C_2 auf einer zweiten Geraden, so liegen auch die Schnittpunkte $A = (B_1C_2, B_2C_1)$; $B = (C_1A_2, C_2A_1)$; $C = (A_1B_2, B_2A_1)$ in einer Geraden.

Pappus' Beweis beruht auf dem vorangegangenen Lemma, nach dem vier von einem Punkte ausgehende Gerade von anderen Geraden unter demselben Doppelverhältnis geschnitten werden. Bezeichnet man mit D den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden, mit C' und B' die Schnittpunkte (B_1C_2, A_1B_2) und (A_1C_2, C_1B_2), so ergiebt sich unmittelbar die Gleichheit folgender Doppelverhältnisse:

$$(A_1CB_2C') = (DA_2B_2C_2) = (A_1BB'C_1).$$

Vergleicht man das erste und das dritte Glied, so ergiebt sich aus der Umkehrung des erwähnten Lemma's, dafs BC durch den Schnittpunkt B von B_2B' und C_2C' hindurchgeht.

2. Man sieht, der Beweis könnte in jedes Lehrbuch der synthetischen Geometrie aufgenommen werden. Vielleicht hat Pappus seinen Satz nur als ein Corollar zu einem allgemeineren Satze aus der Lehre von den Kegelschnitten angeführt; Chasles†) glaubt jedenfalls schon Euklid für den Kreis die Kenntnis des Bewegungsgesetzes zuschreiben zu müssen, aus welchem der Satz unmittelbar folgt. Ist es der Fall gewesen, so haben wir immerhin über ein Jahrtausend gebraucht, den allgemeineren Satz wiederzufinden. Erst

---

spectivischen Aufrifs von freyen Stücken und ohne Grundrifs zu verfertigen, zweyte Auflage, Zürich 1774 (Anmerkungen und Zusätze S. 151 ff.).

*) Servois, Solutions peu connues de différens problèmes de géométrie-pratique, Metz 1804.

**) C. J. Brianchon, Application de la théorie des transversales, Paris 1818.

***) Ed. Hultsch, Bd. 2, S. 893.

†) Chasles, les trois livres de Porismes d'Euclide, Paris 1860, S. 284 (Nr. 181).

1640 stellt Pascal den Satz auf*): „Die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines Sechsecks, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, haben ihre Schnittpunkte auf einer Geraden" (S. 3). Er stellt seinen Satz zunächst für den Kreis auf und überträgt ihn alsdann durch Projection auf den Kegelschnitt. Seinen Beweis hat er zwar nicht beigefügt, aber aus seinen Hülfssätzen geht unzweifelhaft hervor, daſs derselbe auf Transversalensätzen beruhte. In einem Briefe an Pascal's Neffen Périer**) giebt Leibniz Notizen über mehrere Hefte Pascal's, aus denen hervorgeht, daſs Pascal die Bedeutung seines Satzes voll erkannt und zu constructiven Zwecken ausgenutzt hat.

3. Diese Hefte sind leider verloren gegangen, wie auch der Lehrsatz selbst bald in Vergessenheit geriet; wir finden seine Spur erst wieder 1707 in folgender von L'Hospital***) mitgeteilten Tangenteneigenschaft. Weist ein einem Kegelschnitt eingeschriebenes Fünfeck zwei Paare paralleler Seiten auf, so ist die letzte Seite der Tangente in dem gegenüberliegenden Punkt parallel. Der Beweis beruht auf folgendem Hülfssatz: In jedem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Trapez begrenzen die nicht parallelen Seiten mit den zugehörigen Bogen zwei flächengleiche Stücke. Etwa 20 Jahre später gab der Lehrsatz zu einer Controverse zwischen Braikenridge und Maclaurin Veranlassung. Letzterer hat ihn 1727 zuerst mitgeteilt.†) Braikenridge††) behauptet aber, den Satz schon 1726 gefunden und verschiedenen Gelehrten mitgeteilt zu haben. Maclaurin, dem er durch Craig's Vermittelung bekannt geworden sei, habe zwar versichert, ähnliche Sätze seit längerer Zeit zu kennen, aber ihm eine Durchsicht seiner Papiere nicht gestattet. Braikenridge geht von folgendem Bewegungsgesetz aus: Drehen sich die Seiten eines Dreiecks um feste Punkte, während zwei Ecken gegebene Gerade durchlaufen, so beschreibt die dritte Ecke einen Kegelschnitt, welcher die Drehpunkte der beiden anstoſsenden Seiten, den Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden, auſserdem zwei weitere Punkte enthält, in deren jedem sich eine der gegebenen Geraden mit der Verbindungslinie zweier Drehpunkte schneidet [Prop. 1, S. 1]. Aus diesem auf analytischem Wege aufgestellten Satz leitet er dann eine Construction für einen Kegelschnitt her, der durch fünf Punkte gegeben ist. Dieselbe drückt aus, daſs ein sechster Punkt mit dem

*) Essai pour les coniques, Oeuvres de Blaise-Pascal, la Haye 1779, Bd. 4, S. 1—7. Die Arbeit ist ein Programm für eine groſse, von Pascal beabsichtigte Arbeit über Kegelschnitte.

**) Oeuvres de Pascal, Bd. 5, S. 459—462. In diesem Brief findet sich der Ausdruck „Hexagrammum mysticum" als eine Bezeichnung, die Pascal für eine seiner Figuren gebrauchte.

***) L'Hospital, Sections coniques, Paris 1707, S. 140.

†) In der 1727 erschienenen ersten Auflage seiner Algebra. Dieselbe ist mir nicht zugänglich geworden.

††) Vorrede zur Exercitatio geometrica, 1733.

gegebenen ein Pascal'sches Sechseck bildet [Prop. 3, S. 21]. Er fügt noch die Specialfälle bei, in denen vier Punkte und in einem die Tangente, oder drei Punkte und in zweien die Tangenten gegeben sind. Braikenridge ist später nochmals auf seine Anklage zurückgekommen.*) Zur Erwiderung läfst Maclaurin einen an Machin gerichteten, vom 21. December 1732 datirten Brief abdrucken.**) Er behauptet mit Entschiedenheit, lange vor Braikenridge im Besitz der Erzeugung eines Kegelschnitts durch drei Pole gewesen zu sein. Zum Beweise veröffentlicht er**) aus seinen Papieren eine vom 31. July 1722 at sea datirte Notiz, in der (S. 152) der Satz von Pascal mitgeteilt wird. Ein Fingerzeig sei ihm die Erklärung Simson's für das Porisma von Pappus gewesen (vgl. I, 7). Er habe in dem Theorem einen Specialfall einer ihm lange bekannten Erweiterung der Newton'schen organischen Erzeugung auf mehr als zwei sich drehende Winkel erkannt. Es ergebe sich aus ihr, wenn man die Pole in gerader Linie annimmt, aufserdem gestreckte Winkel ins Auge fafst. Im allgemeinen Fall ergab sich bei gestreckten Winkeln die Erzeugung, welche Braikenridge für sich in Anspruch nimmt.

4. Wenig später gab [1735] Simson***) einen Beweis des Satzes in seiner ursprünglichen Form. Er leitet zuerst den Fall ab, wo zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Dafs die beiden anderen Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten eine Parallele bestimmen, kann nunmehr aus einer Proportion erschlossen werden (S. 192). Aus diesem Specialfall kann der allgemeine unter Benutzung einer neuen Proportion abgeleitet werden. Er fügt besonders Beweise für den Specialfall bei, dafs unter den sechs Punkten ein oder zwei Paare unendlich naher sich befinden, stellt den Satz vom umgeschriebenen Vierseit auf und giebt schliefslich eine Construction für den Kegelschnitt aus fünf Tangenten.

Mit der Beschränkung, dafs eine Seite durch den Mittelpunkt geht, wird der Satz beiläufig von Lexell für den Kreis entwickelt.†)

5. Im Anfang unseres Jahrhunderts brachte Brianchon die Braikenridge-Maclaurin'sche Entwickelung aufs neue in Erinnerung und hob hervor, wie einfach aus ihrem Bewegungsgesetz ein Beweis für den Pascal'schen Satz sich ergebe.††) Den Beweis für das Bewegungsgesetz sucht er aus der Erkenntnis heraus zu verein-

*) Braikenridge, A general method etc., Phil. Trans., Bd. 39, 1738, S. 25—36.

**) A Letter from Mr. Colin Maclaurin to Mr. John Machin, Phil. Trans., Bd. 39, London 1738, S. 143—148, 148—165.

***) Robert Simson, Sectionum Conicarum libri V, Edinburg 1735.

†) Andr. Joh. Lexell, Solutio problematis geometrici etc., Acta Ac. sc. imp. Petropolitanae pro Anno 1780, Petersburg 1784, S. 70—90.

††) Brianchon, Solution de plusieurs problèmes de géométrie. Journ. de l'éc. pol., Heft 10, 1810, S. 1—13.

fachen, dafs es projectivischer Natur ist. Haben sich zwei von den drei Drehpunkten ins Unendliche entfernt, so bestehen zwischen den sechs Coordinaten der drei Dreieckspunkte eine quadratische und vier lineare Gleichungen, so dafs für die dritte Ecke eine quadratische Gleichung sich ergiebt. Sind H, I, K von dem einem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechseck $ABCDEF$ die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten, so gehen die Polaren von H, I, K alle drei durch den Pol der Geraden HIK. Die Polare von H z. B. enthält aber die Pole von AB und DE, d. h. die Schnittpunkte der Tangenten in A und B, bez. D und E. In der eben angedeuteten Art gelangt Brianchon (in No. XV) zu dem hinfort nach ihm benannten Theorem: „In jedem aus sechs Tangenten eines Kegelschnittes gebildeten Polygon gehen die Verbindungslinien der drei Paare gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt". Beiläufig hat Brianchon seinen neuen Satz schon in einer früheren Abhandlung ausgesprochen.*)

6. Der Gedankengang des Braikenridge'schen Beweises ist augenscheinlich derselbe, den wir in der synthetischen Geometrie noch heute anwenden. Dieser mufste sich Steiner sofort aufdrängen, nachdem die fundamentale Eigenschaft projectivischer Gebilde, durch drei Paare homologer Elemente bestimmt zu sein, erkannt war. Schneidet man nämlich zwei projectivische Strahlbüschel mit Geraden, die den Durchschnitt zweier homologen Strahlen enthalten, so entstehen perspectivische Punktreihen, die Schnitte eines und desselben Strahlbüschels sind. Man hat also wieder Braikenridge's bewegliches Dreieck, dessen Seiten sich um feste Punkte drehen, während zwei Ecken gegebene Gerade, die dritte das Erzeugnis durchläuft. Fafst man eine beliebige Lage des Dreiecks mit den beiden speciellen zusammen, wo der bewegliche Punkt auf die beiden gegebenen Geraden gelangt, so erhält man, genau wie bei Braikenridge, die Gewifsheit, dafs für die beiden Scheitel und vier beliebige andere Punkte des Erzeugnisses der Pascal'sche Satz gilt. Die entsprechende Überlegung gilt für den Satz von Brianchon. Die Träger zweier projectivischer Punktreihen lassen sich mit irgend vier der Strahlen, welche homologe Punkte derselben verbinden, zu einem Sechsseit verbinden, bei dem die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken durch einen Punkt gehen.**)

*) Brianchon, Sur les surfaces courbes du second degré, Journ. de l'éc. pol., Heft 13, Bd. 6, 1806, S. 297—311. Vgl. auch: Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 5, (Frimaire an XIV) 1806, S. 151 und Nr. 8 (Mai 1807) S. 307—311. Bd. 1 der Corr. ist mir in zweiter Auflage, Paris 1813 datirt, zugänglich geworden.

**) J. Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Berlin 1832; Jacob Steiner's gesammelte Werke [Ges. W.], herausgegeben von Weierstrafs, Bd. 1, Berlin 1881, S. 229—458, (§ 24, I, § 42, I, 2: Ges. W., Bd. 1, S. 300 u. 340).

7. Derart entspricht dieser Steiner'sche Weg der Natur der Sache, dafs die Lehrbücher der projectivischen Geometrie nur darin differiren, wie die unendlich vielfache Erzeugung auf beiderlei Art zu erweisen ist. Steiner hat in der systematischen Entwickelung aus wohlbekannten elementaren Sätzen die projectivische Erzeugung des Kreises auf doppelte Art geschlossen und dies durch Projection auf den Kegelschnitt übertragen.*) Chasles schliefst die erstere aus dem Involutionssatz von Desargues. In der That ist ja der Satz, dafs vier Punkte A, B, C, D eines Kegelschnittes an zwei festen S und S_1 dasselbe Doppelverhältnis bestimmen, eine sofortige Folge des Satzes, dafs SA, S_1B; SB, S_1A die Gerade CD in Paaren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}_1$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}_1$ treffen, die mit C, D selbst in Involution liegen; die hierfür charakteristische Gleichung drückt aus, dafs $(\mathfrak{A}\mathfrak{B}\ CD)$ und $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\ CD)$ gleiches Doppelverhältnis haben. Auf welche Art jedoch sich Chasles seinen Involutionssatz erwiesen denkt, wird aus dem Zusammenhang nicht genügend klar.**) Staudt kann die obige Betrachtung anstellen, nachdem er die Curve zweiter Ordnung als Ordnungscurve eines Polarsystems definirt hat. Zwei Seiten eines eingeschriebenen Dreiecks treffen nämlich jede Gerade, die zur dritten Seite conjugirt ist, in einem Paare conjugirter Punkte und beschreiben deshalb projectivische Strahlbüschel, wenn man die dritte Ecke über die Curve führt. Aus dem analogen Grunde kann die Curve als Erzeugnis projectivischer Punktreihen auf zwei beliebigen Tangenten aufgefafst werden.***) Wie aus einem 1833/34 datirten Schriftstück hervorgeht†), hat Steiner schon früh die Unzulänglichkeit des Verfahrens empfunden, das er in der systematischen Entwickelung einschlug; es sei nur „dem Althergebrachten zu Liebe" der Kegelschnitt als Projection des Kreises definirt worden. Der Weg, der ihm in seinen Vorlesungen vorgeschwebt hat, läfst sich in folgender Weise darstellen. Als Definition zu Grunde gelegt wird die Erzeugung durch zwei Strahlbüschel. Das Gebilde ist durch ihre Scheitel S und S_1 und drei weitere Punkte A, B, C eindeutig festgelegt, ein sechster Punkt D genügt der Beschränkung, dafs $SCABS_1D$ ein Pascal'sches Sechseck ist; da jedoch bei einer cyklischen Vertauschung der sechs Punkte eine Änderung des Satzes nicht eintritt, also auch $CSDS_1BA$ ein Pascal'sches Sechseck ist, so drückt der Satz zugleich

*) §§ 37 u. 38: Ges. W., S. 331—333.

**) Chasles, Aperçu historique (Notes 15, S. 334ff.; 9, S. 302ff.; 10, S. 308ff.). Doch weist er andererseits auf die Möglichkeit hin, die Erzeugung durch Strahlbüschel vom Kreise auf den Kegelschnitt zu übertragen. Ich komme selbstverständlich hierauf genauer zurück.

***) Chr. v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847 (Nr. 255—257).

†) Jacob Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie, Zweiter Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften, Leipzig 1866 und 1876: Vorrede zur ersten Auflage, S. VI [Steiner-Schröter, Vorl.].

aus, dafs A auf dem durch die Scheitel C und B und die drei Peripheriepunkte S, S_1 und D festgelegten Erzeugnis projectivischer Strahlbüschel liegt. Demzufolge können wir unsere Curve durch zwei projectivische Strahlbüschel erzeugen, deren Scheitel zwei ganz beliebige Punkte derselben sind. Zwischen irgend sechs Punkten besteht der Pascal'sche Satz. Verlegt man einen Scheitel nach S, so ergiebt sich, wie auch der zweite Scheitel S_1 auf der Curve gewählt wird, dieselbe von S ausgehende Gerade zu S_1S homolog, welche nur den Punkt S mit der Curve gemein hat. Fügt man in den Beweisgang des Pascal'schen Satzes die beiden Paare s, S_1S und SS_1, s_1 homologer Strahlen ein, so folgt der schon von Braikenridge bemerkte Specialfall, dafs SA, S_1B; SB, S_1A; s, s_1 auf einer Geraden liegen. Dieser Geraden gehört auch der Schnittpunkt der Tangenten in A und B an. Es folgt so der schon von Simson benutzte Satz: „Die Paare gegenüberliegender Ecken eines umgeschriebenen Vierseits bestimmen die Seiten des Dreiecks, in dessen Ecken sich je zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks aus den zugehörigen Berührungspunkten begegnen". Nach diesem Theorem bewegt sich der Schnittpunkt zweier Tangenten zur Verbindungslinie der Berührungspunkte projectivisch, wenn man die eine Tangente festhält, die andere an der Curve gleiten läfst. Auf zwei festen Tangenten unserer Curve schneiden also die übrigen projectivische Punktreihen aus; es sind sechs beliebige Punkte durch den Pascal'schen, sechs Tangenten durch den Brianchon'schen Satz verbunden. Der soeben dargestellte Lehrgang ist aus Reye's Geometrie der Lage entnommen. Dafs er der Natur der Sache entspricht, geht wohl daraus hervor, dafs ein Meister der Darstellung, wie Reye, ihn umgeändert in die späteren Auflagen seines Lehrbuchs übernommen hat.*) Die ähnliche Entwickelung liegt den Vorträgen von Steiner zu Grunde, der § 20 der von Schröter besorgten Ausgabe bietet den allerdings nicht ohne Umweg geführten Nachweis, dafs, sobald eine Gerade mit fünf gegebenen durch das Brianchon'sche Bewegungsgesetz verbunden bleibt, sie auf zwei verschiedenen Geraden-Paaren projectivische Punktreihen ausschneidet, in den §§ 21—23 wird dann die Identität der beiden Erzeugungen auf entsprechende Art nachgewiesen.**)

8. Auf Gergonne ist einer der gangbarsten Beweise des Pascal'schen Satzes zurückzuführen. Einem Kegelschnitt sei das Sechseck $ABCDEF$ eingeschrieben. AB und DE mögen sich in G, BC und EF in H schneiden. Man projicire nun die Figur in eine andere Ebene derart, dafs der Kegelschnitt in einen Kreis übergeht, G und H sich ins Unendliche entfernen. Bezeichnet man das

*) Reye, Geometrie der Lage, Bd. 1, Erste Auflage, Hannover 1866, sechster Vortrag.

**) Steiner-Schröter, Vorl., S. 86—107.

Kreis-Sechseck mit $A'B'C'D'E'F'$, so sind die Bogen $A'C'$ und $D'F'$ einander gleich, und deshalb müssen auch $C'D'$ und $A'F'$ parallel sein; dies hat zur Folge, dafs der Schnittpunkt I von CD und AF auf einer Geraden mit G und H liegt. Ist $abcdef$ ein umgeschriebenes Sechseck, so kann man den Kegelschnitt so in einen Kreis projiciren, dafs der Schnittpunkt der Geraden $g = (a, b; d, e)$ und $h = (b, c; e, f)$ in den Mittelpunkt des Kreises übergeht. Aus elementaren Gründen folgt dann, dafs auch die letzte Diagonale des so entstandenen Sechsseits durch den Mittelpunkt hindurchgeht und dafs also $(a, b; d, e)$; $(b, c; e, f)$; $(c, d; f, a)$ durch einen Punkt hindurchgehen. Freilich kann der erste Beweis nur auf den Fall angewendet werden, wo GH den Kegelschnitt nicht trifft, im zweiten Fall mufs ähnlich (g, h) innerhalb des Kegelschnittes liegen. Aber Gergonne erläutert, dafs der Satz an und für sich davon unabhängig ist, ob die beiden Schnittpunkte von GH reell sind oder nicht; die wirklichen analytischen Ursachen sind in dem einen Fall genau dieselben, wie im anderen Fall, demnach ist der Satz allgemein richtig. Es ist, soweit ich gesehen habe, zum ersten Mal, dafs dieses Princip unverhohlen ausgesprochen wird, das Poncelet später als Continuitätsprincip allgemeiner formulirt; stillschweigend angewendet war es schon häufiger von Monge, Brianchon, Carnot.*)

In seinem Traité stützt sich Poncelet für den Pascal'schen Satz auf die eben geschilderte Gergonne'sche Art und erschliefst Brianchon's Satz aus den Polareigenschaften.**)

9. An einer späteren Stelle***) beobachtet Poncelet, dafs drei gegebene Kreise c, c', c'' von unendlich vielen Kreisen in gegenüberliegenden Ecken von Sechsecken geschnitten werden, deren Paare gegenüberliegender Seiten sich in drei auf einer Axe liegenden Ähnlichkeitspunkten treffen. Es entging ihm, dafs man umgekehrt ein solches Kreissechseck $ABCDEF$ willkürlich annehmen und als Kreise c, c', c'' z. B. diejenigen wählen kann, die in A und D, B und E, C und F orthogonal schneiden. Der so gewonnene Beweis des

*) Gergonne, Application de la doctrine des projections à la démonstration des propriétés des hexagones inscrits et circonscrits aux sections coniques, Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 78—84. Derselbe Band enthält einen allerdings wenig eleganten analytischen Beweis des Satzes: Gergonne, Démonstration de la propriété des hexagones inscrits et circonscrits à une section conique, Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 381—384. Es mag hier angemerkt werden, dafs Bessel 1820 einen analytischen Beweis des Pascal'schen Satzes nach elementarer Methode zunächst am Kreise gegeben hat; doch erkennt er, dafs er sich durch Projection auf Kegelschnitte übertragen läfst. Vgl. Briefwechsel zwischen W. Olbers und F. W. Bessel, herausgegeben von Ad. Erman, Leipzig 1852, S. 134—139. Bessel an Olbers, Königsberg, den 4. Febr. 1820.

**) Poncelet, traité des propriétés projectives des figures, (Erste Auflage, Paris 1822), Zweite Auflage, Paris 1864, Nr. 201.

***) Ibidem, Nr. 273.

Pascal'schen Satzes wurde zuerst von Durrande*) mitgeteilt; man findet ihn ferner im ersten Bande von Steiner's Vorlesungen.**)

Eine nahe verwandte Begründung gab Chasles 1814.***) Aus Transversalen-Betrachtungen wird der Satz abgeleitet, daſs zwei Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung auf zwei Kegeln zweiter Ordnung liegen. Drei Schnitte ergeben, paarweise genommen, sechs derartige Kegel, deren Spitzen die Ecken eines vollständigen Vierseits sind. Legt man bei einer Rotationsfläche die drei Schnitte senkrecht zu einer Ebene durch die Axe, so sind die sechs Spitzen die Schnittpunkte der Geradenpaare, welche die Endpunkte dreier Sehnen des Meridiankegelschnitts verbinden. Jede Seite des Vierseits ist die Pascal'sche Gerade eines Sechsecks, welches die Endpunkte der drei Sehnen zu Paaren gegenüberliegender Ecken hat.

10. Servois†) hat zuerst die Bemerkung gemacht, daſs man aus der Anordnung der beiden Geradenscharen des einschaligen Hyperboloids die Beziehung des Pascal'schen Satzes zwischen sechs Punkten eines seiner Schnitte ableiten kann. Dandelin††) hat diese Betrachtungsweise ergänzt und durch Benutzung eines Rotationshyperboloids einen Beweis des Pascal'schen Satzes gewonnen. Wählt man aus den beiden Geradenscharen eines einschaligen Hyperboloids je drei Gerade a, b, c bez. a_1, b_1, c_1 willkürlich aus, so bilden a, c_1, b, a_1, c, b_1 die Seiten eines auf dem Hyperboloid liegenden einfachen Sechsseits, die Paare gegenüberliegender Ebenen, nämlich ac_1 und a_1c, c_1b und cb_1, ba_1 und b_1a, schneiden sich in Geraden, welche die Punkte a, a_1; b, b_1; c, c_1 verbinden, also in einer Ebene liegen. Andererseits gehen die Verbindungslinien der Ecken a, c_1 und a_1, c; c_1, b und c, b_1; b, a_1 und b_1, a durch den Schnittpunkt der Ebenen aa_1, bb_1, cc_1. Eine beliebige Ebene trifft a, c_1, b, a_1, c, b_1 in 6 Punkten eines Kegelschnitts, die Ebenen ac_1, c_1b, ba_1, a_1c, cb_1, b_1a in den Seiten eines aus ihnen gebildeten einfachen Sechsecks, die Ebene, welche a, a_1; b, b_1; c, c_1 enthält, in der Pascal'schen Geraden dieses Sechsecks. Projicirt man andererseits die sechs Geraden a, c_1, b, a_1, c, b_1 von einem beliebigen Punkte aus auf seine Polarebene, so erhält man sechs Tangenten

*) Durrande, Démonstration élementaire etc., Gerg. Ann., Bd. 14, 1823 u. 1824, S. 29—64, § 1.

**) Jacob Steiner, Vorlesungen über synthetische Geometrie. Erster Teil: Die Theorie der Kegelschnitte in elementarer Behandlung, (Erste Auflage, Leipzig 1867), Dritte Auflage, Leipzig 1887, § 4, S. 16 [Steiner-Geiser, Vorl.].

***) Chasles, Propositions relatives aux Courbes et aux Surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 11—17.

†) Servois, Solution avec la règle seulement etc., Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 332—335 (Nr. 7).

††) Dandelin, Mémoire sur l'hyperboloide de révolution et sur les hexagones de Pascal et de Brianchon, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 3, 1826, S. 1—14. Auch separat: Brüssel, 1825.

des Kegelschnittes, den das Hyperboloid mit derselben gemein hat. Der Schnittpunkt der Ebenen aa_1, bb_1, cc_1 wird in einen Punkt projicirt, durch welchen die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken dieses Sechsseits hindurchlaufen.

Kann man also auf einem durch den Kegelschnitt gelegten Hyperboloid die beiden Geradenscharen nachweisen, so sind beide Sätze bewiesen. Läſst man nun eine Gerade um eine zu ihr windschiefe Axe rotiren, so entsteht eine Rotationsfläche mit einer Schar windschiefer Geraden. Da jede Ebene durch die Axe eine Symmetrie-Ebene ist, so muſs sie notwendig noch eine zweite Schar windschiefer Geraden enthalten, und es muſs jede Gerade der einen jede Gerade der andern Schar treffen. In Erweiterung eines Satzes, den er schon früher*) beim Rotationskegel erwiesen hatte, zeigt nun Dandelin (§ 10), daſs ein Schnitt der Fläche zu Brennpunkten diejenigen Punkte hat, in denen er zwei eingeschriebene Kugeln der Fläche berührt. Zieht man durch den Endpunkt der groſsen Axe einen beliebigen Strahl, construirt zwei Kugeln, welche die Kegelschnittebene in ihren Brennpunkten, auſserdem die gegebene Gerade berühren, so entsteht durch Rotation der Geraden um die Centrale ein Rotationshyperboloid, welches den gegebenen, durch Brennpunkte und Scheitel eindeutig bestimmten Kegelschnitt enthält. Es kann nun der oben angedeutete Beweis für den Pascal'schen und Brianchon'schen Satz Platz greifen. Gergonne hat einen ziemlich willkürlichen Auszug dieser Abhandlung in seinen Annalen publicirt.**) Er ersetzt den Kegelschnitt durch einen Kreis. Dieser ist dann selbstverständlich der Schnitt eines Rotationshyperboloids, und es findet die obige Entwickelung ohne weiteres Anwendung.

Im Jahre 1842 ist Hesse***) auf diese Untersuchung zurückgekommen, hat sie aber weitergehend benutzt, um beim Hexagrammum mysticum die Paare Steiner'scher Punkte als conjugirt hinsichtlich des Kegelschnittes nachzuweisen. Einen Beweis analog dem oben angeführten von Gergonne giebt Dandelin für den Kreis, indem er mit Hülfe der stereographischen Projection lehrt, einen Kreis in einen Kreis und zugleich eine ihn nicht treffende Gerade in die unendlich ferne Gerade zu projiciren. Ich komme an anderer Stelle auf diese Entwickelung zurück.†)

11. Ich gelange nunmehr zu den Beweisen aus der Transversalen-

---

*) Ich komme hierauf an anderer Stelle zurück.

**) Dandelin, Recherches nouvelles sur les sections du cône et sur les hexagones inscrits et circonscrits à ses sections (Extrait; par M. Gergonne), Gerg. Ann., Bd. 15, 1824 u. 1825, S. 387—396.

***) Hesse, Über das geradlinige Sechseck auf dem Hyperboloid. Crelle's Journ., Bd. 24, S. 40—43.

†) Dandelin, Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie, Nouv. Mém. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 11—47 (S. 23ff.).

theorie. Schneidet ein Kegelschnitt die Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks in den Punktepaaren A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2, so ist

$$(1.)\qquad \frac{AB_1 \cdot AB_2 \cdot BC_1 \cdot BC_2 \cdot CA_1 \cdot CA_2}{AC_1 \cdot AC_2 \cdot BA_1 \cdot BA_2 \cdot CB_1 \cdot CB_2} = 1.$$

Carnot hat die Bemerkung gemacht, dafs der Satz beim Kreise der Relationen

$$AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2 \text{ etc.}$$

wegen evident ist, durch Parallelprojection auf die Ellipse übertragen werden kann und deshalb für Kegelschnitte im allgemeinen richtig ist.*) Beiläufig wollen wir bemerken, dafs Carnot den analogen Satz für die Schnittpunkte eines Kegelschnitts mit einem n-Eck und einer Oberfläche zweiter Ordnung mit einem windschiefen n-Eck durch Zerlegung des n-Ecks in Dreiecke gewinnt. Man kann den Satz (1.) aber auch für Kegelschnitte direct aus dem Potenzsatze des Apollonius ableiten. Zieht man nämlich durch einen Hülfspunkt 0 Parallelen zu den Seiten des Dreiecks, die den Kegelschnitt in A_1', A_2'; B_1', B_2'; C_1', C_2' treffen, so ist**)

$$\frac{AB_1 \cdot AB_2}{AC_1 \cdot AC_2} = \frac{OB_1' \cdot OB_2'}{OC_1' \cdot OC_2'}, \text{ etc.}$$

Aus der Multiplication gewinnt man offenbar den obigen Satz, den man, wie es Carnot und später Poncelet gethan haben, mit Hülfe der Newton'schen Verallgemeinerung des Potenzsatzes auf Curven $n$ter Ordnung übertragen kann.

Die Geraden B_1C_2, C_1A_2, A_1B_2 mögen nun die Geraden BC, CA, AB in den Punkten A_0, B_0, C_0 treffen, so folgt nach dreimaliger Anwendung des Ptolemäus'schen Lehrsatzes

$$(2.)\qquad \prod \frac{AB_0 \cdot AB_1 \cdot AB_2}{AC_0 \cdot AC_1 \cdot AC_2} = 1.$$

Man erhält alsdann durch Division

$$(3.)\qquad \frac{AB_0 \cdot BC_0 \cdot CA_0}{AC_0 \cdot BA_0 \cdot CB_0} = 1,$$

und A_0, B_0, C_0 liegen in einer Geraden. Diese Schlufsweise liegt verschiedenen Beweisen zu Grunde. Es ist anzunehmen, dafs Pascal's ursprünglicher Beweis von analoger Art gewesen ist, denn er teilt a. a. O., S. 5 die der Relation (1.) entsprechende Beziehung zu einem einfachen Viereck mit.***) Schon Carnot hat, freilich auf sehr un-

*) L. N. M. Carnot, Mémoire sur la relation qui existe etc., Paris 1806, S. 72.

**) Sectiones conicae, liber III, Prop. 17, Ed. Halley, S. 172.

***) Vgl. II, 2.

symmetrische Weise, den Pascal'schen Satz aus der Relation (1.) entwickelt (a. a. O., S. 93).

Die obige einfache Form des Beweises hat Gergonne gegeben, und zwar beschränkt er sich wegen der besonders einfachen Herleitung des Hülfssatzes (1.) auf den Kreis und überträgt den Satz alsdann auf den Kegelschnitt.*) Brianchon giebt ebenfalls den angeführten Beweis. Nachdem er aus der Potenzeigenschaft des Kreises abgeleitet hat, dafs eine Sehne den Kreis und zwei Paare gegenüberliegender Seiten eines eingeschriebenen Vierecks in einer Involution aus sechs Punkten trifft, überträgt er diese Eigenschaft als eine projectivische auf das Kegelschnittbüschel, leitet hieraus mit Hülfe des Ptolemäus'schen Satzes die Relation (1.) her, und schliefst alsdann, wie wir angegeben haben.**) Poncelet hat wiederholt hervorgehoben, dafs er schon sehr früh im Besitz dieses Beweises gewesen ist; seine ursprüngliche Redaction stammt aus den Jahren 1815 bis 1816.***) Die Relation (1.) wird als projectivisch erkannt und durch Centralprojection auf den Kegelschnitt übertragen.

12. Bezieht man den Kegelschnitt mit trimetrischen Coordinaten auf die erste, dritte und fünfte Seite des Sechsecks, und bestätigt man rechnend, dafs die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten einer Geraden angehören, so entsteht ein mit dem eben gegebenen identisches Beweisverfahren. In der That entwickelt Möbius aus dem barycentrischen Ausdruck

$$(x-a)(x-a')A+(y-b)(y-b')B+(z-c)(z-c')C$$

eines Punktes, der über einen Kegelschnitt geführt wird, sofort die Relation (1.) und schliefst hieraus, dafs die beiden aus je drei nichtanstofsenden Seiten des Sechsecks gebildeten Dreiecke perspectivisch sind.†) Wir müssen nochmals hervorheben, dafs erst bei Möbius eine Unsicherheit schwindet, die allen früheren Transversalenbetrachtungen anhaftet. Nach den früheren Anschauungen konnte das Resultat

$$\frac{AB_0\cdot BC_0\cdot CA_0}{AC_0\cdot BA_0\cdot CB_0}=1$$

*) Gergonne, Noten zu Abhandlungen von Ferriot und Sturm, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 143 u. 189. Der Beweis wird auch von Steiner aufgeführt. Vgl. Steiner-Geiser, Vorl., § 4, S. 18.

**) C. J. Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre; faisant suite aux recherches publiées dans les journaux de l'école royale polytechnique, Paris 1817, S. 16 und 17.

***) Poncelet hat dieselbe 1864 veröffentlicht: Applications d'analyse et de géométrie etc., Bd. 2, Paris 1864, S. 71.

†) Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827; August Ferdinand Möbius' gesammelte Werke, Bd. 1, herausgegeben von R. Baltzer, Leipzig 1885 [Ges W.] (§§ 277—280, Ges. W., Bd. 1, S. 361—365).

ebensowohl ausdrücken, daſs A_0, B_0, C_0 in einer Geraden liegen, als daſs AA_0, BB_0, CC_0 durch einen Punkt gehen. Bei Möbius hingegen sind zwei Strecken derselben Geraden mit gleichen oder ungleichen Vorzeichen zu denken, je nachdem sie gleich oder entgegengesetzt gerichtet sind, und es drückt also (3.) unabhängig von der Anschauung aus, daſs A_0, B_0, C_0 in einer Geraden liegen.*)

13. Carnot hat noch einen zweiten Beweis aus der Transversalentheorie gegeben. Schneidet man zwei Gruppen von n Strahlen durch Transversalen einer bestimmten Richtung in den Punktgruppen $A_1, A_2, \cdots, A_n$, $B_1, B_2, \cdots, B_n$, so ist

$$\frac{PA_1 \cdot PA_2 \cdots PA_n}{PB_1 \cdot PB_2 \ldots PB_n} = \text{const.}$$

die Bedingung für eine durch die n^2 Schnittpunkte gehende Curve $n$ter Ordnung, und, worauf Carnot sich beschränkt, für alle Punkte eines Kegelschnitts erfüllt, wenn sich aus den Geraden ein ihm eingeschriebenes $2n$-Eck bilden läſst. Setzt man nun $n = 3$, läſst A_2 und B_2, A_3 und B_3 zusammenfallen, so besteht für die beiden Schnittpunkte P', P'' des Kegelschnitts mit dieser Geraden die Gleichung

$$\frac{P'A_1}{P'B_1} = \frac{P''A_1}{P''B_1},$$

aus der geschlossen werden kann, daſs A_1 und B_1 zusammenfallen. Liegen bei dem $2n$-Eck $n-1$ Schnittpunkte gegenüberliegender

---

*) Weddle giebt dem Beweise folgende einfache Fassung. Man kann den Kegelschnitt auf die Gleichungsform bringen:

$$u^2 + v^2 + w^2 - (\lambda + \lambda^{-1})\,vw - (\mu + \mu^{-1})\,wu - (\nu + \nu^{-1})\,uv = 0.$$

Alsdann haben die drei Paare gegenüberliegender Seiten die Gleichungen

$$u = 0, \quad u = \mu w + \nu v \quad \text{etc.},$$

und die Gleichung der Pascal'schen Geraden wird

$$\frac{u}{\lambda} + \frac{v}{\mu} + \frac{w}{\nu} = 0.$$

Vgl.: Demonstration of Pascal's Hexagramme, Camb. Dubl. Journ., Bd. 3 (7), 1848, S. 285—286. Weddle giebt übrigens in dieser Abhandlung und in einem Zusatz (On the different published Demonstrations of Pascal's hexagramm, Camb. Dubl. Journ., Bd. 4 (8), S. 284—285) Angaben über ältere englische Beweise des Satzes von Pascal und Brianchon. Zum gröſsten Teil bieten sie nur geringes Interesse, da sie ganz elementare Rechnung benutzen. Der Vollständigkeit halber führe ich die Arbeiten auf, die mir zugänglich geworden sind. Für den Satz von Brianchon: Abhandlungen von Lubbock, Phil. Mag., Bd. 13, 1838, S. 83—86; R. L. E., Camb. Journ., Bd. 1, 1839, S. 204—208; Fenwick, Phil. Mag., Bd. 25, 1843, S. 167—168; Frost, Camb. Journ., Bd. 4, 1845, S. 277—279; Walton, ibidem S. 163—167. Für den Pascal'schen Satz: Abhandlungen von Davies, Phil. Mag., Bd. 68, 1826, S. 333—339 und Phil. Mag., Bd. 21, 1842, S. 37—42; Lubbock, Phil. Mag., Bd. 6, 1829, S. 249—252; Rutherford, Phil. Mag., Bd. 22, 1843, S. 168—170. Andere Beweise von Gill, Finley, Kirkmann, Davies und Weddle selbst befinden sich an mir unzugänglichen Stellen.

Seiten auf einer Geraden, so würde ganz ähnlich folgen, dafs auch die beiden letzten Seiten sich auf derselben schneiden.*)

14. Aus dem Begriff des Curvenbüschels, den Lamé geschaffen hatte, folgerte Gergonne den Satz**): „Haben zwei Curven n^{ter} Ordnung mn ihrer Schnittpunkte auf einer Curve m^{ter} Ordnung, so liegen die übrigen auf einer Curve $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung". Er hat sofort erkannt, dafs ein specieller Fall hiervon der Pascal'sche Lehrsatz ist. Fafst man die erste, dritte, fünfte Seite eines eingeschriebenen Sechsecks zu einer, die zweite, vierte und sechste Seite zu einer zweiten Curve dritter Ordnung zusammen, so gehören 6 Schnittpunkte dem gegebenen Kegelschnitt, die übrigen drei, wie es der Pascal'sche Satz verlangt, einer Geraden an. Gergonne stellt in der zweiten Colonne den entsprechenden Beweis für den Satz von Brianchon auf und giebt eine Verallgemeinerung auf ein eingeschriebenes $2n$-Eck.

15. Auf einer beliebigen Geraden schneiden nach Desargues' Lehrsatz ein Kegelschnitt und zwei Seitenpaare eines eingeschriebenen Vierecks sechs Punkte in Involution aus. Poncelet***) hat hieraus ein Schliefsungstheorem gefolgert, von dem ein specieller Fall, wie sich zeigen wird, bereits Pappus bekannt war, nämlich folgenden Satz: „Sämtliche Ecken eines einfachen Vierecks mögen auf einen Kegelschnitt fortschreiten, während drei Seiten um gegebene, auf einer Geraden liegende Punkte gedreht werden, alsdann dreht sich die vierte Seite ebenfalls um einen Punkt dieser Geraden". Für Poncelet ist dieser Satz von einschneidender Bedeutung; er erkennt, dafs man ihn sofort auf $2n$-Ecke verallgemeinern kann, indem man eine genügende Anzahl von Diagonalen in die Betrachtung einführt. Gleichwohl ist ihm entgangen, wie einfach sich aus seinem Theorem der Pascal'sche Satz schliefsen läfst. Es sei nämlich $ABCDEF$ ein eingeschriebenes Sechseck, ferner seien G und H die Schnittpunkte von AC und BC mit DE und EF. Alsdann treffen sich drei Seitenpaare der Vierecke $ABCD$ und $DEFA$, weil zwei entsprechende Seiten zusammenfallen, auf GH, es mufs sich auch das letzte Seitenpaar CD und FA, wie es der Pascal'sche Satz verlangt, in einem Punkte I von GH schneiden. Die hier dargelegte Entwickelung rührt von Sturm†) her; eine ganz analoge Her-

*) Géométrie de position, 1803, S. 451.

**) Gergonne, Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 214—252 (S. 222). Die Abhandlung ist eine der drei, in welchen Gergonne sein Dualitätsgesetz an Beispielen erläutert; die Resultate werden in zwei neben einander stehenden Spalten aufgeführt.

***) Poncelet, traité, Bd. 1, Nr. 180, S. 92.

†) Ch. Sturm, Mémoire sur les lignes du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 173—198 (§ VIII).

leitung giebt Plücker*). Diesen Sturm'schen Beweis hat Salmon**) als den besten ihm bekannten bezeichnet, und in der That schließt er sich am nächsten dem eleganten Beweise an, den Salmon mit Hülfe einer abgekürzten Bezeichnung für Geraden giebt***). Der älteste Beweis des Pascal'schen Satzes im Sinne der modernen analytischen Geometrie rührt von Bobillier her†); eine ganz analoge Entwickelung hat Magnus gegeben.††) Eine symmetrische Form des Beweises erhält man bei Anwendung trimetrischer Coordinaten, wenn man das Fundamentaldreieck aus der ersten, dritten und fünften Ecke des Sechsecks zusammensetzt.†††) Die Frage, wie aus der allgemeinen Determinanten-Gleichung

$$|x_i^2,\ y_i^2,\ z_i^2,\ y_i z_i,\ z_i x_i,\ x_i y_i\,| = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

welche sechs Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung verbindet, der Pascal'sche Satz abzuleiten ist, hat Cayley behandelt.*†)

16. Der eleganteste analytische Beweis für den Satz von Brianchon ergiebt sich, wie Salmon hervorgehoben hat*††), aus einem zuerst

---

*) Jul. Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. I, Essen 1828, Nr. 292, S. 184.

**) G. Salmon, On the properties of Surfaces of the Second Degree, which correspond to the theorems of Pascal and Brianchon on Conic Sections, Phil. Mag., Bd. 24, 1844, S. 49ff.

***) G. Salmon, A Treatise on Conic Sections, First edition, Dublin 1848, Art. 266, S. 211. Der Beweis ist bekanntlich folgender: Sind $A = 0, \ldots,$ $F = 0$ die Gleichungen der Seiten, ist $G = 0$ die Gleichung der Geraden, welche die Ecken $A = 0$, $F = 0$ und $C = 0$, $D = 0$ verbindet, so sind

$$AC - BG = 0, \quad FD - EG = 0$$

verschiedene Formen der Gleichung des Kegelschnittes, demnach ist

$$AC - FD \equiv G(B - E),$$

aus welcher Gleichung der Satz abgelesen werden kann.

†) Bobillier, Démonstration nouvelle de quelques propriétés des lignes du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 359—367 (Nr. 12). Der Beweis hat bei ihm folgende Form: Ist

$$aAA' - bBB' = 0$$

der Kegelschnitt, so kann man die sechs Seiten des Kegelschnittes auf folgende Form bringen:

$$A = 0,\ \gamma A + bB = 0,\ \gamma B' + aA' = 0,\ A' = 0,\ aA' + \gamma' B = 0,\ \gamma' A + bB' = 0.$$

Die Pascal'sche Gerade wird dann

$$\gamma\gamma' A - abA' = 0.$$

††) Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Bd. 1, Berlin 1833, S. 152—153.

†††) Vgl. z. B.: Miscellanea, Demonstrations of two geometrical theorems. Quart. J., Vol 1, 1857, S. 77—78. O. Hermes, Die Verhältniscoordination in der Ebene, Programm-Abh., Berlin 1860, S. 12.

*†) A. Cayley, Demonstration of Pascal's Theorem, Camb. Journ., Bd. 4, 1845, S. 18—20.

*††) On the properties etc.; Conic Sections, S. 210.

von Plücker aufgestellten allgemeineren Satz*). Berühren zwei Kegelschnitte einen dritten in je zwei Punkten, so trennt nach einem Satze von Chasles eines der Geradenpaare, das ihre Schnittpunkte enthält, die beiden Berührungssehnen harmonisch. Die drei Geradenpaare, welche so aus drei doppelt berührenden Kegelschnitten entstehen, sind nach Plücker die Seitenpaare eines vollständigen Vierecks. Wenn man dies auf die Seitenpaare eines umgeschriebenen Sechsecks anwendet, so ergiebt sich der Satz von Brianchon.

Ich breche hier meine Aufzählung, die ich vom Standpunkt eines Referates über die synthetische Geometrie für vollzählig halte, ab. Die Geschichte des Hexagrammum mysticum gebe ich natürlich an anderer Stelle.

III. Construction des Kegelschnittes aus fünf Punkten und Tangenten.

1. Die Frage, wie ein Kegelschnitt aus fünf Punkten gefunden werden kann, hat bereits Pappus**) mit Hülfe eines speciellen Falles des Desargues'schen Involutionssatzes gelöst. Sind AB, A_1B_1 parallele Sehnen eines Kegelschnitts, trifft A_1B_1 eine andere Sehne CD in M, die Geraden AC und BD in C_1 und D_1, so ist

$$MA_1 \cdot MB_1 = MC_1 \cdot MD_1;$$

hat man sich mit Hülfe des Potenzsatzes zwei parallele Sehnen verschafft, so gestattet der Satz unmittelbar die Auffindung des zweiten Schnittpunktes auf einer beliebigen von C aus gelegten Geraden und hiermit die punktweise Construction des Kegelschnitts. Pappus benutzt denselben nur, um durch C eine Sehne in der zu AB conjugirten Richtung zu legen. Auf dem Durchmesser, welcher die Mitten M und M_1 von AB und A_1B_1 enthält, sind dann die Endpunkte G und H durch die Producte $MG \cdot MH$ und $M_1G \cdot M_1H$

---

*) Analytisch-geom. Entw., Bd. 1, Art. 385. Plücker's Entwickelung ist diese. Die vier Kegelschnitte seien

$$A = 0, \quad A' = 0, \quad A'' = 0, \quad A''' = 0,$$

so sind

$$A + \mu' A' = p^2 = 0, \quad A + \mu'' A'' = q^2 = 0, \quad A + \mu''' A''' = r^2 = 0$$

die Gleichungen der Berührungssehnen;

$$\mu'' A'' - \mu''' A''' = p^2 - q^2 = 0, \quad \mu''' A''' - \mu' A' = r^2 - p^2 = 0,$$
$$\mu' A' - \mu'' A'' = p^2 - q^2$$

drei Geradenpaare, welche die Schnittpunkte der Kegelschnittpaare enthalten und die ihrer Gleichungsform nach zu demselben Büschel gehören.

**) Pappi collectanea etc., liber VIII, Propp. 14—17, Ed. Hultsch, Bd. 3, S. 1077 ff.

gegeben. Mit Hülfe des Potenzsatzes ist nun der zu GH conjugirte Durchmesser bestimmt. In höchst eleganter Weise construirt nun Pappus aus den conjugirten Durchmessern die Axen.

2. Wir müssen nahezu ein Jahrtausend überspringen, um das Problem erneut in Angriff genommen zu sehen. Unter dem pompösen Titel „l'Apollonius François des tactions"*) beschäftigt sich Blondel mit der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, der drei Gerade berührt, zwei unter ihnen in gegebenen Punkten. Er unterscheidet zahlreiche Einzelfälle, die eine nach unseren Begriffen höchst complicirte Behandlung erfahren. Newton hat die Frage sehr eingehend behandelt, zuerst nach der Methode der Alten,**) sodann mit Hülfe der analytischen Geometrie.***) Besonders die erstere Entwickelung ist eine der Hauptquellen der synthetischen Geometrie. Die ersten Aufgaben beziehen sich auf Kegelschnitte mit gegebener numerischer Excentricität, die durch einen Brennpunkt und zwei Punkte oder Tangenten zu bestimmen sind. Sodann folgt der Fall, wo ein Brennpunkt S_1, n Punkte und $3 - n$ Tangenten gegeben sind. Sind A, B, C, ... beliebige Punkte und A_1, B_1, C_1 ... die Spiegelbilder des gegebenen Brennpunktes hinsichtlich ihrer Tangenten, so hat der zweite Brennpunkt von A_1, B_1, C_1, ... die Entfernung $2a$, von A, B, C die Entfernungen $2a - SA$, $2a - SB$, $2a - SC$, ..., wenn wir den Fall der Ellipse festhalten. Die Aufgabe kommt daher in allen Fällen auf das Problem zurück, einen Punkt zu suchen, dessen Entfernungen von drei gegebenen sich um vorgeschriebene Gröfsen unterscheiden [Prop. 21, Prob. 13]. Diese Hülfsaufgabe wird in äufserst eleganter Weise gelöst [Lemma 16]. Newton macht ausdrücklich darauf aufmerksam, dafs seine Entwickelung eine Lösung der Aufgabe des Apollonius bietet, in diesem Zusammenhange komme ich auf dieselbe zurück. Besondere Behandlung erfährt der Fall, wo ein Brennpunkt und drei Peripheriepunkte B, C, D vorliegen. Man bestimme auf den Geraden CD und BC Punkte F und E derart, dafs

$$\frac{FC}{FD} = \frac{SC}{SD}, \qquad \frac{EB}{EC} = \frac{SB}{SC},$$

so ist EF die Directrix des Brennpunktes, durch die der Kegelschnitt eindeutig bestimmt ist. Newton spricht nur von einer Lösung, da

*) François Blondel, Résolution des quatre principaux problèmes d'architecture, Paris 1673 (Second problème). Die Abhandlung ist auch erschienen in den Mém. de l'Ac. depuis 1666—1699, Bd. 5, Paris 1729, S. 365 ff.

**) Newton, Philosophiae naturalis principia mathematica, London 1687, liber I, Sectio IV u. V, S. 61—103.

***) Newton, Arithmetica universalis, Cambridge 1707, Caput XIV, Problemata 57—61 (Ed. Gravesande, Leyden 1732, S. 169—179).

für ihn nur der Fall der Ellipse oder der eines einzigen, B, C, D enthaltenden und S umschliefsenden Hyperbelastes in Betracht kommt.

Newton citirt hier eine Lösung, welche de la Hire von derselben Aufgabe gegeben hat, und die von der seinigen nicht sehr verschieden sei; ich komme auf dieselbe in dem Abschnitt über die Brennpunkteigenschaften zurück.*)

Eine höchst complicirte Lösung dieser Aufgabe hatte bereits Halley gegeben. Er erhält für die Entfernung des zweiten unbekannten Brennpunktes von einem der drei Peripheriepunkte eine höchst complicirte Gleichung zweiten Grades**); andere Lösungen der Aufgabe haben l'Hospital***) und Nicolle†) gegeben.

3. Die Sectio V leitet Newton mit der Ableitung des Theorema ad quatuor lineas ein. Ist $ABCD$ ein eingeschriebenes Trapez, und begegnen zwei Gerade von bestimmten Richtungen, die sich stets in einem Punkte P des Kegelschnittes treffen, den parallelen Seiten in S und T, den beiden anderen in R und Q, so ist eine unmittelbare Folge des Potenzsatzes von Apollonius, dafs $\frac{PR \cdot PQ}{PS \cdot PT}$ constant bleibt. Dieser Satz wird nun in eleganter Weise auf beliebige Vierecke ausgedehnt, endlich auf die Form gebracht, dafs PR, PQ, PS, PT jedes für sich eine bestimmte Richtung behält. (Lemma 17). Hieraus zieht Newton (Lemma 18) den wichtigen Schlufs, dafs ein Kegelschnitt durch fünf Punkte eindeutig bestimmt ist; zu seiner wirklichen Construction dienen zwei Hülfssätze. Der eine kann folgendermafsen ausgesprochen werden (Lemma 20): „Drehen sich zwei Seiten eines Dreiecks um feste Punkte, bleibt die dritte Seite sich selbst parallel, während ihre Endpunkte auf zwei Geraden gleiten, so durchläuft die gegenüberliegende Ecke einen Kegelschnitt“ [vgl. I, 7]. Er kann die Bestimmungsstücke leicht derart festlegen, dafs der dritte Dreieckspunkt fünf gegebene Lagen annimmt. Aus dieser ersten leitet er die zweite Erzeugungsweise ab, seine berühmte organische Erzeugung (Lemma 21). Drehen sich zwei constante Winkel derart um ihre Scheitel, dafs der Schnittpunkt zweier Schenkel eine Gerade durchläuft, so beschreibt der der beiden anderen einen Kegelschnitt. Dieser neue Satz löst das Problem mit grofser Einfachheit, da man von fünf gegebenen Punkten zwei zu Scheiteln der Winkel machen, sowie ihre Gröfse so bestimmen kann, dafs bei der

---

*) de la Hire, Sectiones conicae etc., Paris 1685, Buch 8, Prop. 25, S. 191. Vgl. auch Mém. de l'Ac. depuis 1666—1699, Bd. 10, Paris 1730, S. 588—589.

**) Edmund Halley, Methodus directa, cuius ope investigantur Aphelia etc., Phil. Trans., 1676, Bd. 11, S. 683—686.

***) l'Hospital, Sections coniques etc., 1707, S. 380.

†) Nicolle, Mémoire sur la détermination des orbites planétaires etc., Hist. de l'Ac. Année 1746, Paris 1751, S. 291—318.

dritten Lage die Hülfsschenkel in die Verbindungslinie der Scheitel fallen, endlich die beiden anderen Punkte zur Fixirung der Hülfsgeraden benutzen kann. Sieht man die Verbindungslinie der Scheitel als eine Lage des einen beschreibenden Schenkels an, so wird der entsprechende Schenkel zur Tangente in dem anderen Scheitel. Dies ergiebt (Propp. 23 und 24) die Möglichkeit, den Kegelschnitt zu construiren, wenn vier Punkte und die Tangente in einem, oder drei Punkte und die Tangenten in zweien gegeben sind.

4. Die Aufgaben, durch vier Punkte und eine Tangente und durch drei Punkte und zwei Tangenten einen Kegelschnitt zu bestimmen, führt Newton auf die Transversalenbeziehung zwischen den sechs Schnittpunkten eines Kegelschnitts mit den Seiten eines Dreiecks zurück, die er, freilich nur für die speciellen von ihm gebrauchten Fälle, aus dem Potenzsatz des Apollonius ableitet. Mit etwas veränderter Bezeichnung lauten nun seine Constructionen folgendermaſsen: Auf den Seiten CA und AB eines Dreiecks seien die Punkte B_1, B_2 und C_1, C_2 gegeben; bestimmt man auf der dritten A_0 aus der Bedingung

$$\frac{BA_0^2}{CA_0^2}\cdot\frac{CB_1\cdot CB_2\cdot AC_1\cdot AC_2}{AB_1\cdot AB_2\cdot BC_1\cdot BC_2}=1,$$

so ist A_0 der Berührungspunkt eines Kegelschnitts, der B_1, B_2, C_1, C_2 enthält, mit BC (Prop. 25). Wenn andererseits drei Punkte A, B, C gegeben sind und BC, CA, AB die beiden gegebenen Tangenten in A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 treffen, so bestimme man auf denselben Geraden Punkte A_0, B_0, C_0 derart, daſs

$$\frac{\sqrt{A_1B\cdot A_1C}}{\sqrt{A_2B\cdot A_2C}}=\frac{A_1A_0}{A_2A_0},\quad \frac{\sqrt{B_1C\cdot B_1A}}{\sqrt{B_2C\cdot B_2A}}=\frac{B_1B_0}{B_2B_0}.$$

Die Verbindungslinie dieser Punkte A_0, B_0 ist die Berührungssehne des gesuchten Kegelschnittes mit den beiden gegebenen Tangenten. Man erkennt hierin sofort die uns jetzt geläufige Construction der Aufgabe. Freilich die uns so selbstverständliche Folgerung, daſs die Aufgabe vier Lösungen besitzt, die vier Berührungssehnen ein Vierseit bilden, dessen Paare gegenüberliegender Ecken die beiden Tangenten und je eines der Punktepaare B, C; C, A; A, B harmonisch trennen, diese Folgerung zieht Newton nicht.

Es folgt nun das bereits in der Einleitung [vgl. I, 6] angeführte Lemma 22, „das dazu dient, Figuren in andere gleicher Art umzuformen". Sind von einem Kegelschnitt vier Tangenten und ein Punkt gegeben, so kann man die Figur so transformiren, daſs die Tangenten die Seiten eines Parallelogramms werden. Da somit der Mittelpunkt des Kegelschnittes vorliegt, ergiebt sich sofort aus dem einen

gegebenen noch ein zweiter Punkt (Prop. 26). Liegen aber zwei Punkte und drei Tangenten vor, so kann man nach Anwendung der Transformation die Verbindungslinie zu einer Tangente, die beiden anderen unter sich parallel machen. Diese specielle Aufgabe löst Newton mit Hülfe des Potenzsatzes durch Bestimmung der Berührungspunkte (Prop. 25).

5. Die Aufgabe, einen Kegelschnitt zu zeichnen, der fünf Geraden berührt, führt ihn zu höchst fundamentalen Entwickelungen. Berührt ein Kegelschnitt zwei parallele Gerade l und l_1 in den Punkten A und $\mathfrak{A}$, versteht man unter B, B_1; C, C_1; ... die Schnittpunkte anderer Tangenten mit l und l_1, so ist

$$AB \cdot \mathfrak{A}B_1 = AC \cdot \mathfrak{A}C_1 = AD \cdot \mathfrak{A}D_1 = \cdots,$$

wie schon Apollonius aus den Polareigenschaften des Kegelschnitts ableitet.*) Newton hat (Lemma 24) den Beweis etwas vereinfacht. Aus der Proportion

$$\frac{AB}{\mathfrak{A}C_1} = \frac{AC}{\mathfrak{A}B_1}$$

folgt beiläufig, dafs $A\mathfrak{A}$, BC_1, B_1C durch einen Punkt laufen. Dies giebt Gelegenheit, die Berührungspunkte zweier paralleler Tangenten zu construiren, sobald der Mittelpunkt des Kegelschnittes gegeben ist. Schneiden sich BB_1 und CC_1 in B_2, so ist offenbar

$$\frac{CB_2}{B_2C_1} = \frac{AB}{\mathfrak{A}C_1}, \qquad \frac{CB_2 + B_2C_1}{B_2C_1} = \frac{\mathfrak{A}C_1 + AB}{\mathfrak{A}C_1}.$$

Wenn l die zu CC_1 parallele Tangente in $\mathfrak{C}$ schneidet, so ist

$$\mathfrak{C}A = \mathfrak{A}C_1,$$

und wir haben den Satz:

$$B_2C_1 \cdot \mathfrak{C}B = CC_1 \cdot \mathfrak{A}C_1.$$

Dieser kann (Lemma 25) folgendermafsen gefafst werden: Ist $IKLN$ ein beliebiges einem Kegelschnitt umschriebenes Parallelogramm, und schneiden andere Tangenten die Geraden IN und IK in E und Q, e und q, ..., so ist

$$NE \cdot KQ = Ne \cdot Kq = \cdots$$

Wenn nun auf zwei Geraden die Strecken AU und BV sich in einem festen Verhältnisse verändern, so beschreibt ein Punkt W, der UV in bestimmtem Verhältnis teilt, eine Gerade, die auch den Teilpunkt von AB enthält (Lemma 23). Da

$$\frac{NE}{Kq} = \frac{Ke}{KQ},$$

*) Sectiones conicae, Ed. Halley, S. 203 (liber III, Prop. 42). Ich komme auf den Beweis des Apollonius später zurück.

so liegen die Mittelpunkte der drei Strecken NK, Eq, eQ auf einer Geraden. Der erste dieser drei Punkte ist aber der Mittelpunkt des Kegelschnitts. Dies giebt die Lösung des letzten Problems. Bildet man aus irgend vier der fünf Tangenten ein Vierseit, halbirt den Abstand zwischen zwei Paaren gegenüberliegender Ecken, so ist die Verbindungslinie ein Ort für den Mittelpunkt des Kegelschnitts. Wird dies zweimal wiederholt, so ist der Mittelpunkt des Kegelschnitts gefunden, dessen Berührungspunkte mit den fünf Tangenten nach dem oben angeführten Hülfssatz sich auffinden lassen.

6. In seiner „Arithmetica universalis" ist Newton auf einige der Hauptfragen zurückgekommen. Auf analytischem Wege zeigt er, daſs fünf Punkte einen Kegelschnitt eindeutig bestimmen; die organische Erzeugung wird angeführt und in sehr complicirter Weise die Aufgabe gelöst, durch vier Punkte eine Parabel zu legen. Welche groſse Bedeutung er seiner descriptio organica beilegte, geht wohl daraus hervor, daſs er sie in seiner Enumeratio nochmals, ohne Beweis, aufführte. Hier wendet er auch die Bezeichnung der „descriptio organica" an. Ich habe schon oben darauf aufmerksam gemacht, daſs Newton auch auf Curven höherer Ordnung seine Erzeugung angewendet hat.*)

7. In dem Abschnitt über den Pascal'schen Satz habe ich bereits bemerkt, daſs Braikenridge und Maclaurin die Bedeutung des Satzes zur Construction von Kegelschnitten aus fünf Punkten voll erkannt haben [II, 3], daſs ferner beide die Specialfälle kannten, wo ein oder zwei Tangenten als Seiten des Sechsecks auftreten. Von dieser Seite her kann man nun bekanntlich mit Leichtigkeit zu dem Satze vom eingeschriebenen Viereck und dem zugehörigen umgeschriebenen Vierseit gelangen, Simson scheint diesen Schritt zuerst gethan zu haben.**) Er benutzt den Umstand, daſs gegenüberliegende Seitenpaare des eingeschriebenen Vierecks sich in Punkten treffen, deren Verbindungslinien zugleich die der gegenüberliegenden Ecken des umgeschriebenen Vierseits sind, zu einer einfacheren Construction des Kegelschnitts aus fünf Tangenten.

8. Maclaurin hat sich ebenfalls mit dieser Gruppe von Aufgaben beschäftigt.***) Von Interesse ist die Bemerkung, daſs vier Tangenten gestatten, aus einem gegebenen Curvenpunkt drei andere zu ermitteln, welche mit ihm zusammen die Ecken des durch die vier Tangenten bestimmten Polardreiecks von den gegenüberliegenden Seiten harmonisch trennen (§ 43). Beiläufig bemerkt er auch (§ 42), daſs, wenn drei Tangenten BC, CA, AB bez. in A_1, B_1, C_1 berühren, die Geraden AA_1, BB_1, CC_1 sich in einem Punkt schneiden.

*) Newton, Enumeratio etc., 1704, §§ 31—33. [Vgl. I, 7.]
**) Simson, Sectionum conicarum libri V, Edinburg 1735, S. 197
***) Maclaurin, A Treatise of Algebra etc., 1748, Appendix.

Diesen Specialfall des Pascal'schen Satzes hat später Carnot aus seinem allgemeinen Transversalensatz abgeleitet.*)

9. Eine wesentliche Förderung erfuhr diese Gruppe von Aufgaben durch Brianchon, indem er, wie S. 20 gezeigt wurde, zum Pascal'schen Satz den dualen hinzufügte. Nachdem er die constructive Bedeutung seines Satzes wiederholt hervorgehoben**) und sich mehrfach mit der Aufgabe beschäftigt hatte, aus fünf Punkten oder Tangenten, die einander unendlich nahe rücken können, einen Kegelschnitt zu construiren, widmete er 1817 dieser Frage eine zusammenfassende Darstellung, welche diese Reihe von Entwickelungen zu einem Allgemeingut der Geometer machte. Ich habe das schon oben citirte Mémoire im Sinn.***)

Er steht durchaus auf dem Boden der durch Carnot's „géométrie de position" geschaffenen Transversalentheorie, entwickelt zuerst am Kreise den Involutionssatz von Desargues und überträgt ihn sodann unter Benutzung der Erhaltung des Doppelverhältnisses bei Projection einer geraden Punktgruppe auf den Kegelschnitt. Aus dieser Quelle leitet er, wie sich schon oben ergab, den Pascal'schen Satz ab; zur Construction des Kegelschnitts aus fünf Punkten aber bedient er sich merkwürdiger Weise des Involutionssatzes, wobei die Transversale sich um einen der fünf Punkte drehen soll. Für den Fall von fünf Tangenten beruft er sich auf seinen ohne Beweis aufgestellten Satz (Nr. 36). Bei vier Punkten und einer Tangente ergeben sich zwei Lagen für den Berührungspunkt der letzteren ohne weiteres aus dem Satze von der Involution (Nr. 45). Sind vier Tangenten und ein Punkt gegeben, so ergiebt das mit den Tangenten zugleich gegebene Polardreieck sofort drei weitere Punkte, und die Aufgabe ist auf die frühere zurückgeführt (Nr. 51). Für den Fall von drei Punkten und zwei Tangenten giebt Brianchon die Newton'sche Lösung, construirt aber die Schnittpunkte der gesuchten Berührungssehnen mit den Verbindungslinien der drei Punkte in eleganter Weise mit Hülfe des sie enthaltenden Kreises (Nr. 45). Liegen endlich drei Tangenten und zwei Punkte vor, so ergeben sich einmal die Einschnitte der Berührungssehnen in die Verbindungslinie der beiden Punkte als Doppelpunkte bestimmter Involutionen, andererseits kann man benutzen, daſs irgend zwei dieser Berührungssehnen conjugirte Punkte mit jeder Geraden gemein haben, die von einer Ecke des Tangentendreiecks ausgeht (Nr. 49 und 20). Hieraus ergeben sich vier verschiedene Lösungen des Problems. Man sieht, daſs Brianchon, obwohl er seinen Satz vom umschriebenen Sechsseit mit Hülfe der Polareigenschaften abgeleitet hatte, doch von der Dualität, welche diese

*) Carnot, Géométrie de position, S. 293.
**) Vgl. die oben [II, 5] angeführten Aufsätze.
***) Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

Gruppe von Aufgaben durchzieht, keinen Gebrauch macht. Es ist dies für den leidigen Gergonne-Poncelet'schen Streit von Bedeutung.

10. Newton hat, wie oben [III, 6] bemerkt wurde, eine umständliche Construction der Parabel aus vier Punkten gegeben. Eine andere Lösung gab Lamé aus dem Büschelbegriff.*) Die Axen der Parabeln, welche vier Punkte A, B, C, D enthalten, sind parallel zu solchen Geraden, die, als Durchmesser der Geradenpaare AB, CD und BC, AD betrachtet, zu einer und derselben Richtung conjugirt sind. Am natürlichsten schloſs sich die Parabel an das Obige insofern an, als eine ihrer Tangenten sich ins Unendliche entfernt. Eine ungemein weitschweifige Behandlung nach dieser Seite hin gab Coste im engsten Anschluſs an Brianchon's Mémoire. Alle seine Constructionen reducirt er schlieſslich auf eine rein metrische Gestalt.**)

11. Neben der Parabel und dem Kreis hatte von jeher besonders die gleichseitige Hyperbel die Aufmerksamkeit der Geometer angelockt, zugleich wegen der groſsen Analogie ihrer Gleichung zu der des Kreises, und wegen ihrer zahlreichen schönen Eigenschaften. Die, welche den modernen Geometer am meisten interessirt, daſs sie nach unserer jetzigen Ausdrucksweise das Erzeugnis entgegengesetzt gerichteter congruenter Strahlbüschel ist, wurde von Newton gelegentlich einer Constructionsaufgabe bemerkt.***) Merkwürdigerweise geriet diese Eigenschaft gänzlich in Vergessenheit; Steiner führt sie indes wieder auf.†) Zu schönen Resultaten führt eine Arbeit von Brianchon und Poncelet, welche speciell die Construction der gleichseitigen Hyperbel aus n Punkten und $4-n$ Tangenten sich zur Aufgabe stellt.††) Zunächst leiten sie aus dem Pascal'schen Satz in etwas unsymmetrischer Weise ab, daſs eine gleichseitige Hyperbel die Höhenpunkte aller eingeschriebenen Dreiecke enthält (Theorem 1). Zieht man durch einen Hyperbelpunkt zwei senk-

---

*) Lamé, Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie, Paris 1818 (S. 51) und: Sur les intersections des lignes et des surfaces, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 229—240 (S. 234). Soll durch fünf Punkte A, B, C, D, E ein Kegelschnitt gelegt werden, so sucht man zu der Richtung DE die conjugirten Durchmesser für die Geradenpaare AB, CD und AC, BD; verbindet man den Kreuzungspunkt mit der Mitte von DE, so liegt ein Durchmesser der Curve vor etc. (S. 233).

**) L. M. P. Coste, Propriétés peu connues de la parabole etc., Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 261—284.

***) Newton, Arithmetica universalis, Caput XIV, Problema 41 (Ed. Gravesande, Leyden 1732, S. 138).

†) Steiner, Systematische Entwickelung, Anhang, Aufg. 18 (Ges. W., Bd. 1, S. 442).

††) Brianchon et Poncelet, Recherches sur la détermination de l'hyperbole équilatère, au moyen de quatre conditions, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 205—220; wieder abgedruckt in: Applications d'analyse etc., Bd. 2, Paris 1864, S. 504—516.

rechte Strahlen, so steht die Tangente senkrecht zu der Verbindungslinie ihrer zweiten Schnittpunkte. Mit Hülfe dieses Satzes kann man durch vier Punkte, auch wenn sie einander unendlich nahe rücken, eine gleichseitige Hyperbel legen. Man überzeugt sich ferner sofort, dafs durch drei Punkte und eine Tangente zwei gleichseitige Hyperbeln bestimmt sind. Auf nicht uninteressante elementare Weise gelangen sie nun zu folgendem Satz: „Man lege durch jeden von zwei Punkten eine Gerade parallel zur Polare des anderen, oder, was dasselbe ist, zu der von ihm halbirten Hyperbelsehne. Der Kreuzungspunkt dieser Parallelen liegt mit dem Mittelpunkt der Hyperbel und den beiden Punkten selbst auf einem Kreise“ (Th. 3). Eine unmittelbare Folge davon ist der Satz: „Jeder einem Polardreieck umschriebene Kreis enthält den Mittelpunkt der Hyperbel“ (Th. 4). Wir haben hier das erste Beispiel einer sehr bekannten Beziehung im Polarsystem. Offenbar bilden nämlich die beiden unendlich fernen Kreispunkte mit dem Mittelpunkt der Hyperbel ein Polardreieck; also würde, da man einen Kegelschnitt „im allgemeinen“ in eine gleichseitige Hyperbel projiciren kann, bewiesen sein, dafs zwei beliebige Polardreiecke eines Kegelschnittes wiederum einem Kegelschnitt angehören, ein Satz, der freilich erst viel später aufgestellt wurde. Für alle durch drei Punkte hindurchgehenden gleichseitigen Hyperbeln bilden die Höhen-Fufspunkte des Dreiecks ein Polardreieck. Der letzterem umschriebene Kreis ist daher der Mittelpunkt-Ort des Büschels gleichseitiger Hyperbeln und enthält als solcher die Mitten der sechs Seiten des Vierecks, das aus den drei gegebenen Punkten und dem Schnittpunkt der Höhen sich bilden läfst (Th. 7 und 9). Man erhält so den berühmten, ein Jahr später von Feuerbach gefundenen und nach ihm benannten Kreis.*) Auf sehr indirecte Weise

*) Feuerbach, Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkte des geradlinigen Dreiecks etc., Nürnberg 1822, S. 38. Die Geschichte des merkwürdigen Theorems reicht in England bis 1807 zurück. Vgl.: Julius Lange, Die Geschichte des Feuerbach'schen Kreises, Programmabhdl., Berlin 1894. In dieser Schrift finden sich die elementaren Beweise des Satzes mit grofser Genauigkeit aufgeführt. Am elegantesten ist ohne Zweifel der von Steiner gegebene Beweis, welcher zugleich als die einfachste Form des Feuerbach'schen anzusehen ist: Steiner, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, Berlin 1833, Ges. Werke, Bd. 1, S. 491. Für meine Zwecke kommen nur die Arbeiten in Betracht, bei denen der Kreis als Mittelpunkt-Ort eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln erscheint. Die eleganteste Behandlung in dieser Hinsicht ist wohl eine Arbeit von Fiedler (Über die Büschel gleichseitiger Hyperbeln etc., Vierteljahrsschr. d. Naturf.-Ges. zu Zürich, Jahrg. 30, 1885, S. 390—402). Indem man drei Punkte A, B, C einer gleichseitigen Hyperbel zu zwei und zwei mit den beiden Asymptoten zusammenstellt, erhält man aus dem Pascal'schen Satz die Folgerung: Bildet man über BC, CA, AB als Diagonalen Rechtecke, deren Seiten den Asymptoten parallel sind, so laufen die drei anderen Diagonalen im Mittelpunkt der Hyperbel zu-

folgt hieraus nochmals, dafs vier Punkte A, B, C, D eine gleichseitige Hyperbel eindeutig bestimmen. Ihr Mittelpunkt gehört acht verschiedenen Kreisen an, den Feuerbach'schen Kreisen der vier Dreiecke, die sich aus den vier Punkten bilden lassen, dem Kreise, welcher die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten enthält, endlich nach Theorem 3 noch drei weiteren Kreisen, von denen jeder die Mitten zweier gegenüberliegender Seiten des Vierecks enthält. Da diese Kreise teilweise einen fremden Punkt gemein haben, so bleibt für die Aufgabe selbst nur eine Lösung.

12. Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, die vier Gerade berühren, liegen nach einem Satze von Newton auf einer Geraden. Sie schneidet den Kreis um das Diagonaldreieck des Vierseits in den Mittelpunkten der gleichseitigen Hyperbeln, welche die vier Geraden berühren. Irriger Weise wird für den Fall von zwei Punkten und zwei Tangenten von einem Kreise gesprochen (Th. 10), auf welchem die Mittelpunkte dieser Hyperbeln liegen sollen. Poncelet hat jedoch

---

sammen. Da sie sich mit der doppelten Geschwindigkeit drehen wie die Asymptoten selbst, so erzeugen sie offenbar einen Kreis, und es wird auch evident, dafs die Asymptoten eine Hypocycloide mit drei Spitzen umhüllen. Bekanntlich hat Feuerbach auch erkannt, dafs sein Kreis von den ein- und angeschriebenen Kreisen des Grund-Dreiecks berührt wird. Lange hat zahlreiche Beweise hierfür zusammengetragen. Den wirklichen geometrischen Grund dieser Thatsache hat, so scheint mir, Salmon erkannt: Geometrical Theorems, Quart. Journ., Bd. 4, 1861, S. 152—154. Drei Gerade a, b, c mögen in den Punkten A_1, B_1, C_1 von einem Kegelschnitt K_1 berührt werden, durch A_1, B_1, C_1 lege man einen beliebigen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$, wähle eine gemeinsame Tangente von K_1 und $\mathfrak{K}$ aus, die in D_1 und D_2 berühre. Alsdann geht z. B. $B_1 C_1$ durch eine Ecke des Poltripels der Schar (a, b, c, d); alle Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, ... derselben treffen deshalb $B_1 C_1$ in Paaren einer Involution, von der auch a, d ein Paar ausschneidet, dieselbe Involution schneiden alle Büschel $\mathfrak{K}$, K_2; $\mathfrak{K}$, K_3; ... aus; wählt man den Kegelschnitt K_2, der d in D_2, a, b, c in A_2, B_2, C_2 berührt, so ist d eine gemeinschaftliche Sehne von $\mathfrak{K}$ und K_2, die gegenüberliegende gemeinschaftliche Sehne geht daher durch den Schnittpunkt von a und $B_1 C_1$, ebenso durch die Schnittpunkte von b und c mit $C_1 A_1$ und $A_1 B_1$. Sind A_1, B_1, C_1 die Mitten der Seiten des Dreiecks abc, so rückt diese neue Gerade ins Unendliche hinaus. Ist $\mathfrak{K}$ der Feuerbach'sche Kreis, so wird K_2 einer der vier Kreise, die a, b, c berühren. Da die Vierecke $A_1 B_1 C_1 D_1$ und $A_2 B_2 C_2 D_2$ dasselbe Diagonalendreieck ergeben müssen, so ist der Berührungspunkt D_2 der gemeinsame Punkt der drei Geraden, die A_2; B_2; C_2 mit den Schnittpunkten $A' = B_1 C_1, B_2 C_2$; $B' = C_1 A_1, C_2 A_2$; $C' = A_1 B_1, A_2 B_2$ verbinden. Die eben angeführte Construction des Berührungspunktes teilt Salmon als von Hamilton herrührend mit. Über diese und verwandte Constructionen vergleiche man noch die Arbeit: Schröter, Erweiterung einiger bekannten Eigenschaften des ebenen Dreiecks, Crelle's Journ., Bd. 68, 1868, S. 208—234. Von besonderer Bedeutung sind besonders zwei Arbeiten von Beltrami, Intorno alle coniche di nove punti etc., Mem. di Bologna, Serie II, Bd. 2, 1862, S. 361—395 und Su alcuni teoremi di Feuerbach e di Steiner, ibidem, Serie III, Bd. 5, 1874, S. 543—566, auf die ich später zurückkomme.

in einer anderen Abhandlung diesen Fehler richtig gestellt.*) Die Kegelschnitte, welche zwei Gerade berühren und zwei Punkte enthalten, zerfallen in zwei getrennte Mannigfaltigkeiten. Projicirt man nämlich die beiden Punkte A, B, welche sowohl die gegebenen Punkte als auch die gegebenen Geraden harmonisch trennen, vom Schnittpunkte der letzteren durch die Geraden a und b, so ist für die eine Mannigfaltigkeit b die Polare von A, für die andere a die Polare von B. Nach dem Brianchon-Poncelet'schen Hauptsatze liegen die Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln in der ersten Mannigfaltigkeit auf einem Kreise, der A enthält und in der Mitte der gegebenen Sehne eine Parallele zu b berührt. Aber dieselbe Tangente kommt dem Mittelpunktkegelschnitt der Mannigfaltigkeit zu, so dafs durch zwei Tangenten und zwei Punkte vier gleichseitige Hyperbeln bestimmt sind.

13. Etwa 20 Jahre später ist Seydewitz auf diese Frage zurückgekommen.**) Als Ort der Mittelpunkte der gleichseitigen Hyperbeln, die drei Gerade berühren, erhält er in sehr eleganter Weise den Kreis, für den das gegebene Dreieck ein Polar-Dreieck ist, der also den Höhenpunkt desselben zum Mittelpunkt hat. Die Mittelpunkte der beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche vier Gerade berühren, liegen deshalb auf fünf Kreisen, und es folgt beiläufig, dafs die vier Höhenpunkte der Dreiecke, die sich aus vier Seiten bilden lassen, auf einer Geraden liegen. Sind drei Tangenten und ein Punkt gegeben, so ergiebt sich einmal der Seydewitz'sche Kreis, andererseits ein Kegelschnitt für die Mittelpunkte, so dafs dieser Bedingung vier gleichseitige Hyperbeln genügen.

IV. Büschel und Schar; einfach unendliche Mannigfaltigkeiten; die Involution.

1. Die soeben besprochene Brianchon-Poncelet'sche Arbeit war eine der Veranlassungen dazu, dafs die Untersuchung einfach unendlicher Mannigfaltigkeiten von Kegelschnitten, zunächst nach der Seite der Mittelpunktorte hin, in Angriff genommen wurde. Obenan steht hier der Satz von Newton, nach dem die Mittelpunkte aller Kegel-

*) Poncelet, Recherches diverses sur le lieu des centres des sections coniques etc., Gerg. Ann., Bd. 12, 1821 u. 1822, S. 233—248 (Applic. d'anal., Bd 1, S. 516—527).

**) Fr. Seydewitz, Neue Untersuchungen über die Bestimmung einer gleichseitigen Hyperbel mittelst vier gegebener Bedingungen, Grunert's Archiv, Bd. 3, 1843, S. 225—235. Seydewitz macht darauf aufmerksam, dafs, entgegen der ersten Ansicht Poncelet's, die Mittelpunkte der zwei Gerade berührenden und zwei Punkte enthaltenden gleichseitigen Hyperbeln sich nicht auf einem Kreise, sondern zu zwei und zwei auf zwei Kreisen befinden; er hat jedenfalls übersehen, dafs Poncelet diesen Fehler selbst corrigirt hat.

schnitte mit vier gemeinsamen Tangenten einer Geraden angehören.*) Den Schlufs, dafs die Mitten der Strecken zwischen je zwei gegenüberliegenden Ecken eines vollständigen Vierseits auf einer Geraden liegen, hat Newton nicht gezogen, obgleich seine Gerade durch zwei derartige Punkte festgelegt wird. Gaufs hat sich bekanntlich mit dieser Frage beschäftigt.**) Auf rechnendem Wege beweist er zuerst den allgemeinen Newton'schen Satz, beobachtet sodann, dafs die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken als gestreckte Ellipsen der Schar anzusehen sind, und schliefst deshalb, dafs ihre Mittelpunkte stets auf einer Geraden liegen, wofür er sodann noch einen besonderen Beweis beifügt. Poncelet***) setzt bei einem sehr complicirten Beweise von vornherein voraus, dafs die drei besonderen Mittelpunkte in einer Geraden liegen, und schliefst daraus den allgemeinen Newton'schen Satz. Da von den Kegelschnitten, die drei Gerade berühren und einen Punkt enthalten, zwei eine bestimmte vierte Gerade berühren, so ist der Mittelpunktort dieser Mannigfaltigkeit ein Kegelschnitt, denn er hat nur zwei Punkte mit der Geraden gemein, welche als Mittelpunktort zu den vier Tangenten gehört. Eine höchst unschöne und complicirte Behandlung des Theorems für den Specialfall des Kreises hat Durrande gegeben.†)

Chasles hat den Satz aus einer räumlichen Figur abgeleitet.††) Die Mittelpunkte aller Hyperboloide, welche ein räumliches Vierseit $ABCD$ enthalten, liegen auf der Verbindungslinie der Mitten von AC und BD. Projicirt man jetzt in einer bestimmten Richtung auf eine Hülfsebene, so sind die scheinbaren Umrisse der Hyperboloide Kegelschnitte, welche die Seiten eines Vierseits $A_1 B_1 C_1 D_1$ berühren, und deren Mittelpunkte aus denen der Hyperboloide entstehen; demnach liegen sie auf der Verbindungslinie der Mitten von $A_1 C_1$ und $B_1 D_1$.

Die eigentliche Bedeutung des Newton'schen Satzes hat Poncelet erst in seinem Traité erkannt.

2. Brianchon und Poncelet machen in ihrer Arbeit über die gleichseitige Hyperbel die Beobachtung, dafs ihr Zwölf-Punktkreis durch Projection in den Ort der Pole einer Geraden hinsichtlich der Kegelschnitte eines beliebigen Büschels übergeht, und stellen dem-

*) Newton, Principia I, Lemma 25, Corr. 3.

**) Gaufs, Bestimmung der gröfsten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt, Monatl. Correspondenz f. Erd- und Himmelskunde, Bd. 22, 1810 (Gesammelte Werke, Bd. 4, Göttingen 1880, S. 385—392).

***) Poncelet, Démonstration du théorème de Newton etc., Gerg. Ann., Bd. 12, 1821 u. 1822, S. 108—112.

†) Durrande, Démonstration d'un théorème de géométrie, Gerg. Ann., Bd. 14, 1823 u. 1824, S. 309—313.

††) Chasles, Note sur une propriété générale des coniques etc., Quét. Corr., Bd. 4, 1828, S. 363—371.

nach am Schlufs ihrer Abhandlung den Satz auf, dafs der Mittelpunktort eines beliebigen Büschels ein Kegelschnitt ist, welcher die Schnittpunkte der gegenüberliegenden Seitenpaare des gegebenen Vierecks enthält.

Gergonne*) hat auf rechnendem Wege die Frage nach dem Ort der Mittelpunkte der Kegelschnitte behandelt, die m Punkte enthalten und $4 - m$ Tangenten berühren. Die Rechnung, bei der durch specielle Annahmen der Coordinatenaxen die Symmetrie stets zerstört wird, ist nach jetzigen Begriffen äufserst schwerfällig. Immerhin gelangt er dazu, bei der Schar die Gerade, bei dem Büschel den Neun-Punktkegelschnitt nachzuweisen, für den Fall von drei Tangenten und einem Punkt einige nähere Bestimmungen für den Kegelschnitt einzuführen. Für die beiden anderen Fälle, zwei Punkte, zwei Tangenten; drei Punkte, eine Tangente, gelangt er zu Curven vierter Ordnung. Mit nicht geringem Triumph hebt Poncelet**) in der schon oben erwähnten Abhandlung hervor, dafs Gergonne das Zerfallen der ersteren Curve in zwei Kegelschnitte übersehen hat. Um eine Idee von Poncelet's Schlufsweise zu geben, bemerke ich, dafs die Mannigfaltigkeit in eine Reihe von Kreisen projicirt wird, welche zwei Gerade berühren. Ihre Mittelpunkte liegen auf zwei getrennten Geraden, und deshalb mufs auch der Ort der Pole einer beliebigen Geraden in zwei getrennte Curven zerfallen.

3. Den Begriff des Curven- und Flächenbüschels verdankt man bekanntlich Lamé. In den bereits erwähnten beiden Schriften***) zeigt er, dafs ein Ausdruck von der Form

$$mP + m'P' = 0,$$

wenn $P = 0$, $P' = 0$ Geraden bedeuten, eine dritte durch ihren Schnittpunkt gehende Gerade, wenn die beiden gegebenen Gleichungen Kegelschnitte bedeuten, einen dritten durch die vier gemeinsamen Punkte gehenden Kegelschnitt darstellt. Entsprechende Sätze stellt er für Ebenen und Oberflächen zweiter Ordnung auf. Dafs dieser Kunstgriff zu zahlreichen schönen Folgerungen führt, wird an einem Beispiel gezeigt. Zu einem System von Parallelen gehören nämlich für die Kegelschnitte eines Büschels conjugirte Durchmesser, die einen Punkt gemein haben. Diese Eigenschaft dient ihm dazu, durch fünf Punkte einen Kegelschnitt zu legen. Das räumliche Analogon des Satzes führt ihn, wie später gezeigt werden soll, auf eine erste Lösung der Aufgabe, durch neun Punkte eine Oberfläche zweiter Ordnung zu legen.

4. Für den speciellen Fall, dafs man zwei Kegelschnitte in

*) Gergonne, Solution du premier des problèmes de géométrie etc., Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 379—400.

**) Poncelet, Gerg. Ann., Bd. 12, S. 233—248.

***) [II, 12].

Geradenpaare zerfallen läfst, kann man auf mancherlei Art den Inhalt des Büschelsatzes in geometrische Form bringen. Eine dieser Formen ist das theorema ad quatuor lineas, das, wie wir sahen, Newton mit Leichtigkeit aus dem Potenzsatz des Apollonius folgern konnte.*) Der Satz, dafs der Ort eines Punktes P, dessen in beliebigen festen Richtungen gemessene Entfernungen von vier Geraden der Beziehung

$$PA_1 \cdot PA_3 = \mu \, PA_2 \cdot PA_4$$

genügen, ein Kegelschnitt ist, wird von Pappus**) ausgesprochen und auf Apollonius zurückgeführt, was mit einer Stelle im Vorwort zu den sectiones conicae in Einklang ist. Pappus tadelt aber zugleich, dafs Apollonius sich rühmt, erst durch seine neuen Entwickelungen die Lösung der Aufgabe ermöglicht zu haben.***) In seinem Werk hat zwar Apollonius seine Lösung der Aufgabe nicht mitgeteilt, nach Zeuthen's Ansicht bieten die Beziehungen im dritten Buch den Schlüssel zu derselben.

An der angezogenen Stelle formulirt Pappus noch die Frage nach dem Ort zu sechs Geraden; für seine Punkte sollen die aus den Entfernungen gegen zwei Tripel von Geraden gebildeten rechtwinkligen Parallelepipeda constantes Inhaltsverhältnis besitzen. Es ist ihm wohl klar, dafs hier nur die Anfangsglieder einer allgemeinen Reihe von Orten vorliegen, doch scheint ihm die Definition eines Ortes zu n Geraden nicht genügende geometrische Notwendigkeit zu besitzen. Descartes' hat die oben erwähnte Stelle dahin mifsverstanden, als ob die Alten das Problem ad quatuor lineas nicht völlig gelöst hätten.†) Er selbst beschäftigt sich mit den Fällen, wo der Ort mit Hülfe des Zirkels construirt werden kann, das heifst, er geht bis zu fünf Geraden. Doch hätte ihn seine Entwickelung natürlich auf den allgemeinen Ort führen müssen.

5. Wichtiger noch und der obigen Form nahe verwandt ist eine zweite Art, den Büschel-Begriff auszudrücken, welche der Involutionssatz liefert. Man spricht jetzt von einer Involution, wenn bei zwei in einander liegenden projectivischen Gebilden je zwei Elemente einander wechselseitig entsprechen. Die ältere Litteratur kannte nur eine Involution aus sechs Punkten oder, besser gesagt, aus drei Paaren, welche dadurch in eine Involution aus fünf oder vier Punkten übergehen kann, dafs für ein oder zwei Paare Doppelpunkte eintreten. Die Involution zu sechs Punkten AA', BB', CC' wird

*) Newton, Principia I, Lemma 17.

**) Pappi collectionis ... liber VII (conicorum libri octo), Ed. Hultsch, Bd. 2, S. 679.

***) H. G. Zeuthen, Kegelschnitte im Altertum, Siebenter Abschnitt, S. 126 ff.; ferner S. 506 und 511.

†) La Géométrie de René Descartes, Nouvelle édition, Paris 1886, S. 7—14 und 20—32.

für gewöhnlich durch sieben Relationen definirt, welche den Ausdruck für die Doppelverhältnisgleichungen

$$(ABA_1C_1) = (A_1B_1AC); \; (AA_1BC) = (A_1AB_1C_1) \text{ u. s. w.}$$

bilden. Hieraus ergeben sich einmal vier Beziehungen von der Form

$$BC_1 \cdot CA_1 \cdot AB_1 = BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1, \qquad (1.)$$

sodann drei Bedingungen von der Form

$$\frac{AB \cdot AB_1}{AC \cdot AC_1} = \frac{A_1B \cdot A_1B_1}{A_1C \cdot A_1C_1}. \qquad (2.)$$

Diese sieben Beziehungen, welche sich leicht aus einander ableiten lassen, treten nun einmal auf: an den drei Punktepaaren, welche die Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks auf einer Geraden ausschneiden, sodann an den drei Punktepaaren, welche ein Kegelschnitt und zwei Paare gegenüberliegender Seiten eines ihm eingeschriebenen Vierecks auf einer Geraden ausschneiden. Der erste Satz wird von Pappus als lemma IV zum zweiten Porisma Euklid's aufgeführt.*) Er giebt eine der dreigliedrigen Beziehungen an. Von dem zweiten Satz hat Pappus den speciellen Fall, wo die Secante einer Seite des eingeschriebenen Vierecks parallel ist. Man erhält, wenn A_1 ins Unendliche hinausfällt,

$$AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1.$$

Diese Relation benutzt Pappus z. B. zur Construction eines Kegelschnitts aus fünf Punkten, wie oben gezeigt wurde.**)

6. Der Name „involution à six points" rührt von Desargues her. Beaugrand***) hat diese Bezeichnung hinterlassen in einer sehr feindseligen Besprechung des Desargues'schen Hauptwerkes über Kegelschnitte.†) Aus diesen Notizen geht hervor, dafs Desargues als involution à six points drei Punktepaare bezeichnete, welche gegen eine „souche" O so liegen, dafs, mit Rücksicht auf das Vorzeichen,

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1$$

ist. Er berichtet, dafs Desargues hieraus die Relationen (2.) gefolgert hat. Pascal hat den zweiten, von mir schon wiederholt als Desargues'schen Involutionssatz bezeichneten Satz erhalten††), und zwar in Form der Relationen (2.). Brianchon hat diese Be-

*) Pappi collectionis ... liber VII, Prop. 130, Ed. Hultsch, S. 873.
**) [II, 1].
***) Lettre de M. Beaugrand ..., sur le sujet des feuilles intitulées: Brouillon proj. etc., Oeuvres de Desargues, Ed. Poudra, Bd. 2, S. 362 ff.
†) Desargues, Brouillon project etc., Paris 1639.
††) Essai pour les coniques, Oeuvres de Pascal, Bd. 4, S. 5.

ziehungen auf sehr einfache Weise entwickelt.*) Bringt man beim Kreise die Relation

$$\prod \frac{AB_1 \cdot AB_2}{AC_1 \cdot AC_2} = 1,$$

die unter seinen Schnittpunkten A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks sich mit Leichtigkeit aus dem Potenzsatz ergiebt, in Verbindung mit dem Ptolemäus'schen Lehrsatz, angewendet auf die Geraden B_1C_1 und B_2C_2, die BC in D_1 und D_2 treffen, so ist unmittelbar die Relation erwiesen:

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{BD_1 \cdot BD_2} = \frac{CA_1 \cdot CA_2}{CD_1 \cdot CD_2}.$$

Brianchon schreibt sie nun in Form einer Doppelverhältnisgleichung

$$\frac{A_1B}{D_1B} : \frac{A_1C}{D_1C} = \frac{A_2C}{D_2C} : \frac{A_2B}{D_2B},$$

benutzt, daſs vier Strahlen eines Büschels von allen Geraden unter demselben Doppelverhältnis geschnitten werden, und gelangt so zu dem allgemeinen Desargues'schen Involutionssatze. Den ersten Involutionssatz vereinfacht er sich auf ähnliche Weise. Er legt zunächst ein Parallelogramm zu Grunde, bei dem aus der Ähnlichkeit der Dreiecke der Satz sofort zu schlieſsen ist, und überträgt ihn sodann wieder durch Projection auf den allgemeinen Fall [Nr. 8—11].

7. Das Brouillonproject Desargues' scheint endgültig verloren gegangen zu sein; doch hat Chasles**) der Pariser Akademie in der Sitzung vom 26. Mai 1845 eine Copie überreicht, welche 1679 von de la Hire angefertigt zu sein scheint. Diese Copie ist in den Werken Desargues' abgedruckt.***) Der Gang der Herleitung entspricht ziemlich genau dem, was wir soeben von Brianchon angegeben haben. Nachdem er aus seinen Stammbeziehungen

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1$$

die Relationen (2.) abgeleitet hat, legt er (S. 119) dieselben als Definition für die Involution zu Grunde. Er kennt den Satz, daſs ein Punkt der Involution sich ins Unendliche entfernen, der entsprechende sich mit der souche vereinigen kann; dies giebt eine Involution aus fünf Punkten. Eine Involution von vier Punkten kann entstehen, wenn an einer Involution von fünf Punkten ein Paar zusammenfällt, oder auch, wenn an einer Involution von sechs Punkten zwei Paare in Doppelpunkte übergehen. Diese trennen dann die beiden anderen Punkte harmonisch. Bilden zwei Punkte mit zwei Paaren

---

*) Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817.

**) Chasles, Note sur les ouvrages de Desargues. Comptes rendus, Bd. 20, 1845, S. 1550—1554.

***) Oeuvres de Desargues, Ed. Poudra, Bd. 1, S. 97—238.

einer Involution aus sechs Punkten eine Involution aus vier Punkten, so stehen sie in derselben Beziehung zu dem dritten Paar. Aus sechs Punkten in Involution erhält man durch Projection auf eine andere Gerade wieder sechs Punkte in Involution (S. 146). Der Beweis dieses wichtigen Satzes beruht im wesentlichen auf der Erhaltung des Doppelverhältnisses, wenn auch diese Quelle nicht ganz klar zu Tage tritt. Seinen Hauptsatz entwickelt er genau so, wie dies Brianchon gethan hat, aus den Potenzeigenschaften am Kreise, um ihn sodann durch Projection auf den Kegelschnitt zu übertragen (S. 175 ff.).

Die Entwickelungen Brianchon's hat Poncelet ungeändert in seinen Traité übernommen. Wir bemerken hier ausdrücklich, dafs die uns selbstverständlich erscheinende Verallgemeinerung des Desargues'schen Satzes auf drei beliebige Kegelschnitte eines Büschels erst später von Sturm, Poncelet und Chasles gegeben wurde.

8. In der Abhandlung von Sturm finden wir zuerst den Namen der Strahleninvolution, in Verbindung gebracht mit dem vollständigen Vierseit. Die ältere Litteratur kannte diese Bildung nur in der speciellen Form der Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnitts. Es war eine allgemein bekannte und viel benutzte Thatsache, dafs die Tangenten der Neigungswinkel zweier conjugirter Durchmesser gegen eine Axe ein constantes Product ergeben. Dafs die Schnittpunktpaare mit einer beliebigen Geraden das Gesetz

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1$$

befolgen, wird wiederholt benutzt. Schon Pappus' Construction der Axen einer Ellipse aus zwei conjugirten Durchmessern beruht auf einem Specialfall dieses Gesetzes.

Besonders ist hier eine Arbeit von Frégier*) anzuführen. Auf analytischem Wege wird gezeigt: „Zieht man durch einen Punkt eines Kegelschnittes Parallelen zu den Paaren conjugirter Durchmesser eines anderen und verbindet allemal die zweiten Schnittpunkte, so gehen diese Verbindungslinien durch einen festen Punkt". Frégier benutzt dies, um allein mit Hülfe eines rechten Winkels die Normale eines Kegelschnittes zu bestimmen, und giebt dann das Analogon seines Satzes für den Raum, ein Theorem, das Steiner

*) Frégier, Théorèmes nouveaux sur les lignes et surfaces du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 95—99. Specielle Fälle sind bereits betrachtet in den Arbeiten gleichen Titels, Gerg. Ann., Bd. 6, 1815 u. 1816, S. 229—241, 321—326, sowie in der Arbeit: Propriétés des surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 3, Janvier 1816, S. 394. Schon in dieser Arbeit stellt Frégier den speciellen Fall des Satzes auf, dafs die Hypotenusen aller rechtwinkligen eingeschriebenen Dreiecke, deren rechter Winkel in einem bestimmten Kegelschnittpunkt liegt, durch einen festen Punkt der Normale hindurchgehen, und benutzt dies zur Construction der Normale.

später zur Definition seiner Römerfläche benutzt hat. Den wichtigen Involutionssatz, den Frégier's Theorem enthält, kann man schon in zwei früheren Sätzen von Lagrange erkennen, die Castillon*) mitgeteilt hat. Wird ein Kreis von den Strahlen eines Büschels O in den Punktepaaren A_1, A_2; B_1, B_2; ... getroffen, so ist am Mittelpunkt M

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A_1MO \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A_2MO = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B_1MO \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B_2MO = \cdots.$$

Für diesen Satz fand Castillon eine andere, nicht trigonometrische Form, die Lagrange auf Kegelschnitte im allgemeinen übertrug: „Die Punktepaare PQ, welche ein Kegelschnitt mit Geraden gemein hat, die von einem festen Punkte A ausgehen, verbinde man mit einem Endpunkte des A enthaltenden Durchmessers, ihre Schnittpunkte M und N mit dem conjugirten Durchmesser bestimmen am Mittelpunkt des Kegelschnittes ein constantes Product." Man erblickt hierin einen Specialfall unseres Involutionssatzes.

Ich mufs hier die Darstellung vorerst abbrechen, um das Bild der Entwickelung unserer Wissenschaft nicht zu stören. Die wahre Erfassung des Involutionsbegriffes werde ich erst in der dritten meiner Epochen zu schildern haben. Sie erfolgt ziemlich gleichzeitig bei Chasles und Seydewitz; erst durch Staudt wird die Theorie von den metrischen Beziehungen völlig losgelöst.

V. Polareigenschaften.

1. Bereits Apollonius kennt die Haupteigenschaft der Polare eines Kegelschnittes für einen Punkt aufserhalb. Treffen die Geraden, welche einen Punkt P enthalten, einen Kegelschnitt in A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; ..., so liegen die Punkte $A, B, C, \ldots$, die mit P zusammen A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; ... harmonisch trennen, mit den Berührungspunkten der von P ausgehenden Tangenten auf einer Geraden (liber III, Prop. 37). Ein Specialfall hiervon dient geradezu zur Bestimmung der Tangente in einem Curvenpunkt C. Es sei nämlich AB ein beliebiger Durchmesser und CC' die Sehne, deren Mittelpunkt C_1 auf AB liegt; trennt D_1 mit C_1 zusammen A, B harmonisch, so ist CD_1 die gesuchte Tangente. Zieht man nämlich zu CC_1 eine Parallele die AB in E_1, CD_1 in E trifft, so ist, wenn C_1 und E_1 nicht durch A und B getrennt werden,

$$\frac{EE_1^2}{E_1A \cdot E_1B} > \frac{CC_1^2}{C_1A \cdot C_1B},$$

*) Castillon, Sur une nouvelle propriété des sections coniques, Nouv. Mém. de l'Ac., Année 1776, Berlin 1779, S. 284—311.

so dafs die Gerade keinen weiteren Punkt mit der Curve aufser C gemein haben kann (liber I, Prop. 34). Der Beweis für das allgemeine Theorem ist aufserordentlich complicirt und beruht auf der Vergleichung von Flächenstücken.*)

Pappus**) teilt den Satz für den Kreis mit und entwickelt einen im wesentlichen auf der Potenzeigenschaft beruhenden Beweis derselben.

2. Desargues, der für die Gerade den Namen Transversale („trauersale") einführt, bedient sich des Involutionssatzes zur***) Entwickelung. Man ziehe von P aus die Geraden PA_1A_2, PB_1B_2, PC_1C_2 an den Kegelschnitt, ziehe A_1B_1, A_2B_2, welche die Gerade C_1C_2 in C_1', C_2' treffen mögen, so ist C_1, C_2; C_1', C_2'; P, P eine Involution mit einem Doppelpunkt. Der zweite Doppelpunkt wird deshalb mit P zusammen sowohl C_1, C_2 als auch C_1', C_2' harmonisch trennen, und deshalb der Geraden angehören, welche durch (A_1B_1, A_2B_2) und (A_1B_2, A_2B_1) bestimmt ist; d. h. diese ist der Ort der vierten harmonischen Punkte hinsichtlich A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2; ... Er spricht ausdrücklich (S. 189) aus, dafs bei einem eingeschriebenen Viereck jeder von den drei Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten die Verbindungslinie der beiden anderen zur Transversale hat, dafs ferner (S. 192) der Schnittpunkt einer Transversale der Berührungspunkt einer von dem zugehörigen Punkt ausgehenden Tangente ist.

3. Bis zur Auffindung des Brouillonprojects galt de la Hire als der Erfinder der Polarentheorie. Poncelet hatte dieselbe schon vermutungsweise auf Desargues zurückgeführt und bei dieser Gelegenheit ein ziemlich hartes Urteil über de la Hire's Theorie gefällt, dem ich nicht unbedingt beistimmen kann.†) De la Hire giebt zunächst beim Kreise (Buch I) für Punkte aufserhalb einen Beweis ähnlich dem von Pappus, nur tritt bei ihm ein Hülfskreis auf, den schon Aguilonius aufgeführt hatte††), dessen Einführung nur dann verständlich wird, wenn man an eine ursprüngliche räumliche Auffassung des Beweises denkt. Die von einem Punkte P ausgehenden Tangenten mögen in B und B' berühren, es seien A_1 und A_2 die Endpunkte des P enthaltenden Durchmessers, die Tangenten in A_1 und A_2 mögen PB in B_1 und B_2 schneiden. Alsdann ist offenbar

$$B_1A_1 = B_1B, \quad B_2A_2 = B_2B;$$

also augenscheinlich, wenn die Berührungssehne BB' den Durchmesser A_1A_2 in A trifft,

*) Sectiones conicae, Ed. Halley, S. 196 und S. 60.
**) Pappi collectionis etc., liber VII, Prop. 154, Ed. Hultsch, Bd. 2, S. 905.
***) Brouillon project etc., Oeuvres de Desargues, Bd. 1.
†) Ph. de la Hire, Sectiones conicae ..., Paris 1685, Buch 1 u. 2.
††) Aguilonii Opticorum libri sex, Antwerpen 1613, liber IV, Lemma 22, S. 209.

$$\frac{PA_1}{PA_2} = \frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{BB_1}{BB_2} = \frac{AA_1}{AA_2}.$$

Errichtet man jetzt über einer anderen P enthaltenden Sehne C_1C_2 als Durchmesser den Kreis, so zeigt de la Hire ungemein complicirt, dafs seine Berührungssehne mit der des gegebenen Kreises sich auf C_1C_2 schneidet (in C), so dafs für alle Punkte der Berührungssehne

$$\frac{CC_1}{CC_2} = \frac{PC_1}{PC_2}$$

ist. Dies wird aber sofort ganz evident, sobald man diese Kreise als Umlegungen senkrechter Kreise ansieht. In der ursprünglichen Lage gehören sie sämtlich der Kugel über dem Durchmesser A_1A_2 an, und es ist selbstverständlich, dafs ihre Berührungssehnen BB' treffen, da sie sämtlich in der über BB' senkrechten Ebene liegen, welche den Berührungskreis des von P ausgehenden Tangentialkegels enthält (liber I, Prop. 21). Die Gerade AC_2 treffe nun den Kreis zum zweiten Mal in C_1', das in P auf PA errichtete Lot in C'. Da nun C_1C_1' auf PA senkrecht steht, überdies die Winkel C_1AC und CAC_2 einander gleich sind, so kann man folgende Reihe von Proportionen aufstellen

$$\frac{C'C_1'}{C'C_2} = \frac{PC_1}{PC_2} = \frac{C_1A}{C_2A} = \frac{C_1'A}{C_2A},$$

nach denen auch für einen inneren Punkt (A) der Ort der vierten harmonischen Punkte eine Gerade ist (I, Prop. 25).

Die nötigen Vorbereitungen über harmonische Punkte sind schon vorher getroffen; unter anderem ist (I, Prop. 20) bewiesen, dafs je zwei Diagonalen eines vollständigen Vierecks die von ihrem Schnittpunkt ausgehenden Seiten des Vierecks harmonisch trennen. Gehen daher A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ... durch einen Punkt P, so schneiden sich einmal die zugehörigen Tangentenpaare, dann aber auch die Geradenpaare A_1B_2, A_2B_1; A_1B_1, A_2B_1, ... auf der Berührungssehne des von P ausgehenden Tangentenpaares, und die Berührungssehne eines Punktes dreht sich um einen festen Punkt, sobald er selbst eine Gerade durchläuft (I, Prop. 26 und 28). Im zweiten Buch überträgt de la Hire seine Sätze durch Projection auf den Kegelschnitt (Prop. 23—27, 30).*)

4. Monge hat die Polarentheorie des Kegelschnittes mit der

*) de la Hire hat, wiewohl nicht ganz so ausführlich, die Polarentheorie schon 1673 behandelt (Nouvelle méthode en Géométrie). Hier giebt er (Lemma 9, S. 7) den oben erwähnten Hülfskreisen eine senkrechte Stellung zur Ebene des Kreises und beweist aus der Potenzeigenschaft, dafs die Berührungspunkte der Tangenten, die sie aus P erhalten, auf einem Kreise über der Berührungssehne liegen. Die Übertragung der Polarensätze auf die Kegelschnitte geschieht auch hier durch Projection. (Vgl. S. 38 ff.)

der Oberflächen zweiter Ordnung in Verbindung gebracht. Es ist ein von ihm zuerst bewiesener Satz, dafs ein Tangentialkegel einer Oberfläche m^{ter} Ordnung sie in ihrem Durchschnitt mit einer Oberfläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung berührt. Dieselbe hat die Gleichung

$$(x-x')\frac{\partial M}{\partial x}+(y-y')\frac{\partial M}{\partial y}+(z-z')\frac{\partial M}{\partial z}-mM=0,$$

wenn $M=0$ die Gleichung der Fläche selbst ist.*) Bei der Oberfläche zweiter Ordnung ist die Berührungscurve eben und dreht sich, wenn die Spitze über eine Gerade geführt wird, um eine zweite Gerade, welche durch die Berührungspunkte der von der ersten Geraden ausgehenden Tangentialebenen festgelegt wird. Legt man durch die erste Gerade eine beliebige Ebene, so folgt: „Die Berührungssehne eines Tangentenpaars eines Kegelschnitts dreht sich um einen Punkt, wenn ihr Kreuzungspunkt eine Gerade durchläuft".

Für den Kreis wird diese Überlegung besonders anschaulich, da die Kugel von einem umschriebenen Kegel augenscheinlich in einem Kreise berührt wird. Nachdem Monge**) diese Überlegung gemacht und beide Fälle des Satzes, auch den, wo die gegebene Gerade reell schneidet, in Zeichnung vorgeführt hat, fährt er fort: „Diese Eigenschaft kommt dem Kreise nicht deswegen zu, weil seine Punkte von dem Mittelpunkt denselben Abstand haben, sondern weil er eine Curve zweiten Grades ist". Für diese spricht er ihn allgemein aus; man erwartet, dafs er ihn durch Projection auf den allgemeinen Fall übertragen wird, und liest mit Überraschung, dafs er eine Rotationsfläche zweiter Ordnung zu Hülfe nimmt, um aus dem Gesetz der Polarebene das allgemeinere Theorem zu folgern. Über den Hauptpunkt des Beweises gleitet er äufserst schnell hinweg.

5. Bekanntlich kann man die Eigenschaft der Polare mit Leichtigkeit aus dem Pascal'schen Satz ableiten. Von grundlegender Bedeutung ist in dieser Beziehung eine schon genannte Arbeit von Brianchon.***) Gehen die Geraden AA', BB', CC' durch einen Punkt P, so sind die sechs Schnittpunkte $(BC', B'C)$; $(BC, B'C')$; ... die Ecken eines vollständigen Vierseits, wie zuerst für den Fall einer räumlichen Figur gezeigt wird. Geht man durch Projection zu dem Fall einer ebenen Figur über und nimmt unter den sechs Punkten überdies die Figur des Pascal'schen Satzes an, so artet das Vierseit in eine Gerade aus, es liegen die Schnittpunkte $(BC, B'C')$;

---

*) Monge, Feuilles d'analyse appliquées à la Géométrie, à l'usage de l'école polytechnique, publiées la première année de cette École (an 8 de la République), Paris, (an IX), 1801 (Nr. 5).

**) Monge, Géométrie descriptive, Paris 1799, S. 49 (Nr. 38).

***) Brianchon, Sur les surfaces courbes du second degré, Journ. de l'éc. pol., Heft 13, 1806, S. 297—311.

$(BC', B'C)$; ... auf einer und derselben festen Geraden. In derselben Geraden müssen, wie durch einen Grenzübergang folgt, die Tangentenpaare in B, B'; C, C'; ... sich treffen. Es wird nun der Satz von dem Tripel conjugirter Punkte ausgesprochen, das die Kreuzungspunkte gegenüberliegender Seiten eines eingeschriebenen Vierecks bilden, u. s. w.

6. Man kann sich auch aus Transversalen-Betrachtungen einen Beweis der Polareigenschaften verschaffen. Dies ist nach dem Vorbilde Carnot's*) z. B. in Arbeiten Chasles'**) und Brianchon's***) geschehen. Der erstere beschränkt sich zunächst auf den Kreis, bei dem er Winkelvergleichungen zu Hülfe zieht, um den Satz dann auf Kegelschnitte zu übertragen, der letztere bedient sich sogleich bei den Kegelschnitten der Involutionseigenschaft.

7. Den Namen Pol für den Punkt, in dem die Berührungssehnen der Tangentenpaare zusammenlaufen, deren Kreuzungspunkt eine gegebene Gerade durchläuft, hat Servois†) gelegentlich eingeführt. Die Bezeichnung Polare kommt in einer Arbeit von Gergonne††) zuerst vor. Doch sind beide Namen nicht sogleich zur Geltung gekommen; Lamé kennt sie z. B. 1818 noch nicht. Gergonne entwickelt, dafs, wenn

$$ax^2 + by^2 + dx + ey = 0$$

die Gleichung des Kegelschnittes ist,

$$(2a\alpha + d)x + (2b\beta + e)y + d\alpha + e\beta = 0$$

die Gleichung der Berührungssehne eines Punktes α, β ist. Soll diese Berührungssehne durch einen bestimmten Punkt gehen, so läuft der Kreuzungspunkt α, β über eine Gerade, die Polare des Punktes etc. Analoges wird für Oberflächen bewiesen: Umschreibt man einer Oberfläche zweiter Ordnung eine Folge von Tangentialkegeln, deren Spitzen einer gegebenen Ebene angehören, so gehen die Ebenen aller Berührungskegelschnitte durch einen Punkt, den Pol der Ebene.

8. Lamé scheint sich zuerst von dem Auftreten conjugirter Punkte am eingeschriebenen vollständigen Viereck auf analytischem

---

*) Carnot, Mémoire sur la relation etc., Paris 1806, S. 90.

**) Chasles, Propositions relatives etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 11—17.

***) Brianchon, Mémoire sur les lignes du second ordre, Paris 1817. Diese Entwickelung ist freilich nur angedeutet (XI etc.).

†) Servois, Solution du premier etc., Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 337.

††) Gergonne, Théorie analytique des pôles des lignes et des surfaces du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 3, 1812 und 1813, S. 293—303. Hieran schliefsen sich an die Arbeiten: Rochat, Démonstration de quelques propriétés etc., Gerg. Ann., Bd. 3, S. 303—308; Observations de M. Puissant, Gerg. Ann., Bd. 3, S. 371—372.

Wege Rechenschaft gegeben zu haben. Hält man bei zwei Geradenpaaren, die sich auf einem Kegelschnitt begegnen, den Kreuzungspunkt des einen fest, so beschreibt der zweite eine bestimmte Gerade. Die entsprechende Eigenschaft gilt bei zwei Kegeln, die sich auf einer gegebenen Oberfläche zweiter Ordnung durchschneiden.*)

9. Ich gedenke hier nochmals abschliefsend des Satzes vom eingeschriebenen und umgeschriebenen Vierseit. Wie schon bemerkt, kommt er zuerst bei Simson vor.**) Maclaurin***) hat zuerst die vollständige Figur des ein- und umgeschriebenen Vierseits mit allen drei Diagonalen. Carnot leitet aus diesem Theorem den Satz von der Polare ab; er ergiebt sich aus dem Pascal'schen Satz durch Verkümmerung einzelner Seiten.†) Im zweiten Bande von Gergonne's Annalen††) zum Beweise vorgelegt, wird er von Peschier, Rochat, Ferriot und Fornier bewiesen†††), von dem letzteren aus dem Pascal'schen Satz abgeleitet, von Rochat rechnend bestätigt, von Peschier trigonometrisch am Kreise begründet, endlich von Ferriot darauf zurückgeführt, dafs das Viereck in ein Parallelogramm projicirt werden und demnach der Satz aus Symmetrie-Verhältnissen unmittelbar evident gemacht werden kann. Diesen Weg hat später Poncelet in seinem Traité zur Begründung der Polareigenschaften benutzt. Der Lehrsatz, dafs bei einem umgeschriebenen Dreieck die Verbindungslinien der Ecken mit den Berührungspunkten der gegenüberliegenden Seiten durch einen Punkt gehen, ist, wie beiläufig schon bemerkt wurde, von Maclaurin*†) zuerst ausgesprochen, von Carnot aus Transversalensätzen und als Specialfall des Pascal'schen Satzes abgeleitet worden.**†)

10. Mit Rücksicht auf den Gergonne-Poncelet'schen Streit ist es von Wichtigkeit, sich von den Versuchen Rechenschaft zu geben, die Polareigenschaften des Kegelschnittes zur Herleitung von neuen Eigenschaften zu benutzen. Von besonderer Bedeutung ist hier die Art, wie Brianchon seinen Lehrsatz aus den Polareigenschaften der Curve ableitet [II, 5]. Wir haben hier ferner eine Arbeit von Encontre***†) zu nennen. Ist ein n-Eck einem Kreise umschrieben, während seine Ecken auf gegebenen Geraden liegen, so bilden die Polaren dieser Ecken ein dem Kreise eingeschriebenes Polygon, dessen Seiten durch

*) Lamé, Examen des différentes méthodes, Paris 1818, (S. 45 ff.).

**) Simson, Sectiones conicae, S. 197.

***) Maclaurin, Appendix zur Algebra von 1748, S. 31 (Fig. 24).

†) Carnot, Géométrie de position, S. 454.

††) Gerg. Ann., Bd. 2, 1811 u. 1812, S. 384.

†††) Démonstration du théorème énoncé etc., Gerg. Ann., Bd. 3, 1812 u. 1813, S. 161—169.

*†) a. a. O. S. 33 (Fig. 25).

**†) Carnot, Géométrie de position, S. 293 u. 453.

***†) Encontre, Solution du problème: Circonscrire à un cercle donné etc., Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 122—124.

die Pole der gegebenen Geraden hindurchlaufen, die Aufgabe ist also auf eine bereits gelöste zurückgeführt. Nachdem einmal erkannt war, dafs die Polare ein Strahlenbüschel beschreibt, wenn ihr Pol über eine Gerade geführt wird, ergab sich die Frage, welchen Ort die Polare umhüllt, wenn ihr Pol sich über eine beliebige Curve bewegt. Es scheint wenig bekannt zu sein, dafs bereits l'Hospital*) einen schönen Specialfall der Frage behandelt hat. Legt man von allen Punkten eines Kegelschnitts Tangentenpaare an einen Kreis, der einen der Brennpunkte zum Mittelpunkt hat, so umhüllen ihre Berührungssehnen einen zweiten Kreis mit neuem Mittelpunkt. Brianchon hat sich wiederholt mit dieser Frage für den Fall zweier Kegelschnitte beschäftigt. Er führt ihn durch Projection auf den Fall zurück, wo die beiden Kegelschnitte Kreise sind, der elementar gelöst wird, nachdem er schon früher den analogen räumlichen Satz mit Hülfe der Eliminationstheorie erledigt hatte.**) Man kann noch eine andere Arbeit von Brianchon über die Sätze von Pascal und Brianchon anführen***), in welcher gezeigt wird, dafs die Figur eines Pascal'schen Sechseckes in die eines Brianchon'schen übergeht, wenn man zu allen Punkten und Geraden der ersteren die zugehörigen Polaren und Pole aufsucht. Da man den Brianchon'schen Satz schon bewiesen hat, so kann man hieraus ableiten, dafs den Punkten des gegebenen Kegelschnittes die Tangenten eines zweiten als Polaren entsprechen und umgekehrt den Punkten des zweiten die Tangenten des ersten. Poncelet hat dies später aus der Arbeit heraus gelesen; es ist jedenfalls nur undeutlich ausgedrückt. Erst Poncelet hat es ausgesprochen, dafs man lediglich aus den Polareigenschaften heraus von der einen Curve auf die andere schliefsen kann.†) Wenn ein Punkt eine Curve m^{ter} Ordnung durchläuft, so umhüllt seine Polare eine zweite Curve, und dem Berührungspunkt mit der Curve entspricht wieder die Tangente der gegebenen Curve. Die zweite Curve hat also mit einer Geraden so viele Punkte gemeinsam, als die erste aus einem beliebigen Punkte Tangenten enthält, das heifst, sie ist eine Curve von der Ordnung $m(m-1)$. Demnach haben zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung im allgemeinen $mn(m-1)(n-1)$ Tangenten gemeinsam. Er bemerkt noch, dafs Doppeltangenten und Wendepunkte Doppelpunkten und Spitzen der Grundcurve entsprechen (Art. 10). Dafs die Anzahl

*) l'Hospital, Sections coniques, Paris 1707, Nr. 363, S. 275.

**) Vgl. die schon öfters erwähnten Arbeiten: Journ. de l'éc. pol., Heft 10, S. 1—13, Heft 13, S. 297—311.

) Démonstration du premier des deux théorèmes etc., par M. Br., Abonné (Brianchon nach dem Zeugnis von Poncelet), Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 379—381.

†) Poncelet, Solution du premier etc., suivie d'une théorie des polaires réciproques, et de réflexions sur l'élimination, Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 et 1818, S. 201—232. [Applic. d'anal., Bd. 2, 1864, S. 476—503.]

der Tangenten einer Curve m^{ter} Ordnung aus einem Punkt nicht größer als $m(m-1)$ sein kann, wird für einen unendlich fernen Punkt daraus bestätigt, daſs $\frac{dy}{dx}$ einen constanten Wert erhält, durch Projection auf den Fall eines Punktes im Endlichen übertragen (S. 214). Insbesondere entspricht einem Kegelschnitt ein zweiter Kegelschnitt, der eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel ist, je nachdem die gegebene Curve den Mittelpunkt der Directrix einschlieſst, ausschlieſst oder enthält. Poncelet ging bei seinen Entwickelungen von der sehr speciellen Frage aus: Welchen Ort durchläuft der Scheitel eines Winkels von constanter Gröſse, dessen Schenkel in einem Kegelschnitt gleiten, und welchen Ort umhüllen die zugehörigen Berührungssehnen? Er findet in sehr eleganter Weise die bekannte bicirculare Curve vierter Ordnung als Lösung der ersten Aufgabe, beobachtet, daſs sie sich im Fall eines rechten Winkels auf einen Kreis, bei der Parabel stets auf einen Kegelschnitt reducirt. De la Hire hatte, wie erörtert wurde [I, 6, Fuſsnote], sich mit diesem Ort beschäftigt.*)

VI. Mittelpunkt- und Brennpunkteigenschaften.

1. In seinen Anmerkungen zu Euklid's Optik löst Pappus mit einem Anfluge von Verwunderung das πρόβλημα παραδοξότερον, den Ort des Auges zu finden, für welchen ein bestimmter Punkt A im Innern eines Kreises der scheinbare Mittelpunkt wird. Ist O eine dieser Lagen, so soll der Schnitt des Kreiskegels mit der zu OA senkrechten Ebene A zum Mittelpunkt haben.**) Ist $A_1 A_2$ der A enthaltende Durchmesser und A' der vierte harmonische Punkt zu A hinsichtlich A_1, A_2, so ist der Ort ein Kreis über dem Durchmesser AA' in der zur gegebenen senkrechten Ebene. Diese Entwickelung findet sich genau so bei Aguilonius.***) Desargues†) und de la Hire††) ist es durchaus geläufig, daſs Pol und Polare in speciellen Fällen in einen unendlich fernen Punkt und einen Durchmesser, oder in den Mittelpunkt und ein unendlich Fernes übergehen

*) Den Fall der Parabel und beim Kegelschnitt den des rechten Winkels hat de la Hire auch in seinen Sectiones conicae etc., Paris 1685, (liber VIII, Propp. 27—29) behandelt. Eleganter hat l'Hospital die Frage bei der Parabel gelöst: Sections coniques, S. 266 ff. Er gelangt zu dem Satz, daſs der gesuchte Ort eine Hyperbel ist, die Brennpunkt und Directrix mit der Parabel gemein hat.

**) Pappi collectanea ed. Hultsch, Bd. 2, S. 593 (liber VI, Prop. 54).

***) Aguilonius, Opticorum libri sex, Antwerpen 1613, S. 289.

†) Desargues, Brouillon project etc., 1639, (Ed. Poudra, Bd. 1, S. 215 ff. und 291 ff.).

††) de la Hire, Sectiones conicae, Paris 1685, liber II, Propp. 6, 10 etc.

können. Diese Anschauung tritt auch in der ersten deutschen Arbeit hervor, bei welcher in unserem Jahrhundert die Methode des Projicirens angewendet wird. Aus dem Umstand, dafs die Mitten einer Schar paralleler Sehnen auf einer Geraden liegen, schliefst Gruson*), dafs bei einer Schar in einem Punkt zusammenlaufender Sehnen A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ... eines Kegelschnitts die Schnittpunkte A_1B_2, A_2B_1; A_1C_2, A_2C_1; ... auf einer Geraden liegen.

2. Viel schwerer haben sich die Brennpunkte der geometrischen Anschauung erschlossen. Ich will um so mehr hierauf etwas genauer eingehen, als ja die Definition mit Hülfe der Brennpunkteigenschaften neben der rein analytischen Behandlung die gangbarste Einführung in die Lehre von den Kegelschnitten darbot. Im dritten Buche der sectiones conicae findet sich das, was Apollonius über die Eigenschaften der Brennpunkte mitteilenswert gefunden hatte. Auf den Tangenten in den Scheiteln A, $\mathfrak{A}$ schneiden die anderen Tangenten Stücke ab, die ein constantes Product ergeben

$$AB_1 \cdot \mathfrak{A}B_2 = AC_1 \cdot \mathfrak{A}C_2 = AD_1 \cdot \mathfrak{A}D_2 = \cdots = \pm b^2.$$

Diese Strecken B_1B_2, C_1C_2, ... werden unter rechten Winkeln von den beiden Punkten der Hauptaxe aus gesehen, die an ihren Endpunkten A, $\mathfrak{A}$ das Product b^2 bestimmen und bei der Ellipse innerhalb, bei der Hyperbel aufserhalb $A\mathfrak{A}$ liegen. Diese Punkte (Z, H) sind deshalb allen Kreisen über den Durchmessern B_1B_2, C_1C_2, ... gemeinsam.**) Hieraus ermöglichen sich nun verschiedene Winkelvergleichungen, es sind z. B. eine beliebige Tangente und eine Scheiteltangente gleich geneigt gegen die beiden Verbindungslinien ihres Kreuzungspunktes mit den Brennpunkten. Verbindet man die Endpunkte einer Tangente, z. B. B_1B_2, mit den Brennpunkten, so liegt der Schnittpunkt auf der zugehörigen Normale; denn der Fufspunkt des von einem solchen Punkt aus gefällten Lotes teilt die Tangente im Verhältnis der Abschnitte, die sie auf den Scheiteltangenten abschneidet. Hieraus läfst sich mit Leichtigkeit ableiten, dafs Normale und Tangente die beiden Winkel zwischen den zugehörigen Brennstrahlen halbiren. Dafs Summe oder Differenz der Brennstrahlen constant ist, wird, wie noch jetzt üblich, daraus abgeleitet, dafs die Fufspunktcurve eines Brennpunktes ein Kreis ist. Es ergiebt sich zunächst, dafs der Fufspunkt an der grofsen Axe denselben Winkel bestimmt, wie das zwischen den Scheiteltangenten liegende Stück der Tangente an dem Brennpunkt, also einen rechten Winkel. Die Parabel bleibt hierbei ganz aufser Spiel. Eine gewisse

---

*) Gruson, Auflösung einer geometrischen Aufgabe, Abh. der Ak. z. Berlin f. 1818 u. 1819, Berlin 1820, S. 37—48.

**) Apollonius, Sectiones conicae, liber III, Propp. 45ff., Ed. Halley, S. 205ff.

Vervollständigung bietet Pappus. Er führt an, dafs Punkte einer Parabel vom Brennpunkt und der Directrix gleiche Entfernungen haben, dafs ferner die Entfernung eines Ellipsen- oder Hyperbelpunktes von einem Brennpunkt in einem festen Verhältnis zu der Entfernung von der zugehörigen Directrix steht.*)

3. Auf diesem Punkt ist die Kegelschnittlehre im wesentlichen stehen geblieben, bis sie de la Hire um einen wesentlichen Schritt förderte. Auch er knüpft an den Fundamentalsatz an, dafs die Producte

$$AB_1 \cdot \mathfrak{A}B_2 = AC_1 \cdot \mathfrak{A}C_2 = \cdots$$

constant sind, also B_1B_2, C_1C_2, ... an zwei Punkten F und F_1 rechte Winkel bestimmen. Es sei B der Berührungspunkt der Tangente B_1B_2, B' ihr Schnittpunkt mit der Axe $A\mathfrak{A}$, ferner C' der Schnittpunkt des Brennstrahles B_1F mit AB, endlich C der auf AB liegende Pol von B_1F, alsdann ist

$$(B_1B_2BB') = (C'CBA) = -1.$$

Da beide Gruppen den Punkt B mit einander gemein haben, so sind sie Schnitte eines Strahlbüschels, es laufen B_1C', B_2C, AB' in einem Punkte F zusammen. Hieraus folgt, da B_1F und B_2F auf einander senkrecht stehen, der fundamentale Satz: „Geht eine Sehne durch den Brennpunkt hindurch, so schneiden sich die Tangenten in ihren Endpunkten mit dem im Brennpunkt errichteten Lot in einem Punkte.**) Derselbe gehört der Directrix an, welche de la Hire als Polare des Brennpunktes erkennt. Die Polare eines Directrixpunktes S ist nach dem obigen das in F auf SF errichtete Lot. Sind A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, ... die Punktepaare, welche von S ausgehende Geraden mit dem Kegelschnitt gemein haben, so halbirt SF demnach je einen der beiden Winkel, die FA_1 und FA_2, FB_1 und FB_2, FC_1 und FC_2, ... mit einander gemein haben. Sind nun ein Brennpunkt L und drei Peripheriepunkte B, C, D eines Kegelschnittes gegeben, so halbire man die Nebenwinkel zu BLC und CLD und schneide diese Strahlen mit BC und CD; man erhält alsdann zwei Punkte der gesuchten Directrix***) (liber VII, Prop. 25).

*) Pappi collectanea, liber VII, Prop. 235—238, Ed. Hultsch, Bd. 2, S. 1005 ff. Man vergleiche ferner Zeuthen, Kegelschnitte im Altertum, Abschnitt 16. Nach Zeuthen's Ausführungen haben wir in dem, was Apollonius mitteilt, keineswegs die Summe dessen zu erkennen, was er über die Brennpunkte wufste.

**) de la Hire, Sectiones conicae, Paris 1685, liber VIII, Prop. 23, S. 189. Der Hülfssatz wird genau wie bei Apollonius abgeleitet, (liber III, Prop. 11, S. 52).

***) In der That ist dies mit Newton's Lösung nahe verwandt, da die beiden Hülfspunkte BC und CD im Verhältnis $LB : LC$ und $LC : LD$ teilen [III, 2].

Die Beendigung der Aufgabe geschieht, wie bei Newton, mit Hülfe des Satzes, daſs der Brennstrahl eines Kegelschnitt-Punktes zu seiner Entfernung von der zugehörigen Directrix proportional ist, oder, wie es de la Hire umformt, gleich ist dem Stück, das auf der Ordinate des gegebenen Punktes die Axe und eine der Tangenten abgrenzen, die von ihrem Schnittpunkt mit der Directrix an den Kegelschnitt sich legen lassen. De la Hire spricht ebenso wie Newton von nur einer Lösung der Aufgabe, da die drei Punkte entweder auf einer Ellipse oder einem um L beschriebenen Hyperbelast liegen sollen.

4. Desargues*) geht ebenfalls davon aus, daſs die von den Scheiteltangenten begrenzten Stücke der Tangenten von den Brennpunkten aus unter rechtem Winkel erblickt werden. Er löst hauptsächlich die fundamentale Frage: Wie muſs ein Kegelschnitt projicirt werden, damit ein beliebiger Punkt A in den Mittelpunkt und zwei Punkte B_1, B_2 innerhalb des Kegelschnittes, die durch A und seine Polare a harmonisch getrennt werden, in die Brennpunkte übergehen. Seine Construction beruht auf folgendem Satz: Legt man in einem beliebigen Punkt des Kegelschnittes die Tangente und verbindet ihren Berührungspunkt mit demjenigen Punkt, der sie von B_1, B_2 harmonisch trennt, so schneiden diese Geradenpaare eine bestimmte Involution auf a aus. Wählt man einen der Punkte, von denen aus sie durch eine circulare Involution projicirt wird, und macht die Projectionsebene parallel zur Ebene derselben, so wird von ihrem Mittelpunkt aus der Kegelschnitt in der gewünschten Weise projicirt.*)

5. Im 18. Jahrhundert hob Guido Grandus**) den de la Hire'schen Satz abermals hervor, den er aus Pappus' Directrixeigenschaft aufs einfachste herleitet. Aus dem Satz, daſs der Winkel zwischen zwei Brennstrahlen durch den Strahl halbirt wird, der den Brennpunkt mit dem Kreuzungspunkt ihrer Tangenten verbindet, schlieſst er eine Verallgemeinerung des Satzes von Apollonius. „Berühren zwei Tangenten a_1 und a_2 den Kegelschnitt in den Endpunkten eines durch den Brennpunkt F gelegten Strahles, so werden die Punktepaare $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, . . ., welche andere Tangenten auf a_1 und a_2 ausschneiden, von F aus unter rechtem Winkel gesehen."

6. Der Satz, daſs die Fuſspunktcurve eines Brennpunktes ein Kreis, bei der Parabel eine Gerade ist, wird wiederholt neu entwickelt, so von Maclaurin***), auf den er vielfach, z. B. auch von Poncelet in seiner ersten Abhandlung zur Brennpunktlehre, zurück-

---

*) Desargues, Brouillon project etc., (Ed. Poudra, Bd. 1, S. 215 ff.).
**) Guido Grandus, Sectionum conicarum synopsis, Neapel 1737, Propp. 35 und 36, S. 75—78.
***) Maclaurin, Geometria organica, S. 102.

geführt wird. Von Lambert*), später von Prony**) wird hervorgehoben, wie einfach sich hieraus die Reihe der Tangenten eines Kegelschnittes finden lasse. Die Parabeleigenschaft wird von Lambert in folgender Form verallgemeinert. Wenn von einem beliebigen festen Winkel der Scheitel über eine Gerade geführt wird, während sich der eine Schenkel um einen festen Punkt dreht, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel.

7. Die volle Bedeutung des de la Hire'schen Theorems hat Poncelet erkannt.***) Er hebt ausdrücklich hervor, dafs gerade durch die Eigenschaft, eine circulare Involution conjugirter Strahlen zu besitzen, die Brennpunkte beim Kegelschnitt als natürliche Verallgemeinerungen des Mittelpunktes des Kreises zu erkennen seien, und dafs diese Eigenschaft das einfachste Mittel zu ihrer Einführung biete.†) Er fügt hinzu, dafs man bei der Aufsuchung dieser Punkte auf vier Lösungen komme, von denen jedoch zwei imaginär seien. Die Eigenschaft, welche er aus dem Fufspunktsatz durch leichte elementare Betrachtungen ableitet, scheint er zunächst noch für neu zu halten, in seinem Traité führt er sie indessen auf de la Hire zurück. Poncelet zieht nun den naheliegenden Schlufs, dafs, sobald von einem Tangentendreieck nur eine Seite verändert wird, dieselbe von einem Brennpunkt aus unter einem festen Winkel erblickt wird. Bei der Parabel müssen seine Schenkel einmal parallel zu den beiden gegebenen Tangenten werden; es folgt der von Lambert zuerst aufgestellte Satz, dafs der einem Tangentendreieck umschriebene Kreis stets den Brennpunkt der Parabel enthält (No. 6).††) Mit Leichtigkeit wird aus ihm der oben erwähnte Lambert'sche Satz abgeleitet. Poncelet schliefst ferner, dafs ein umgeschriebenes Polygon mit einander gleichen Winkeln derart an der Parabel gleiten kann, dafs Berührungspunkte und Ecken an dem Brennpunkt $2n$ unter gleichen Winkeln geneigte Strahlen bestimmen. Er beruft sich auf l'Hospital für den Satz, dafs die Ecken des Polygons auf einem zweiten Kegelschnitte wandern. Ich habe schon oben bemerkt, dafs Poncelet in der Arbeit, die zur Aufstellung der „théorie des polaires réciproques" Veranlassung gab, einen schönen analytischen Beweis für diese Eigenschaft gegeben hat, dafs ferner de la Hire ebenfalls eine, wenig

*) Johann Heinrich Lambert's Deutscher gelehrter Briefwechsel, Bd. 5, Teil 2, Berlin 1787, S. 326—327 (Brief an Oberreit vom 29. September 1771).

**) Prony, Note sur l'application de la théorie des solutions particulières des Équations différentielles à des questions etc., Heft 10, 1810, S. 49—64 (S. 53).

***) Poncelet, Théorèmes nouveaux sur les lignes du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 1—13, 68—72. (Applic. d'anal., Bd. 2, S. 455—466.)

†) Ibidem, Fufsnote zu S. 222.

††) J. H. Lambert, Insigniores Orbitae Cometarum proprietates, Augsburg 1771, Lemma 4, S. 5.

geschickte freilich, analytische Erörterung der Frage gegeben hat. In wahrhaft eleganter Weise hat Poncelet den Satz in seinem Traité aus dem Umstand abgeleitet, daſs ein Brennpunkt eines Kegelschnittes sein Homologiecentrum zu einem um diesen Punkt beschriebenen Kreis ist.

8. Ein merkwürdiges Zusammentreffen ist es, daſs Bret*) in demselben Bande der Annalen ebenfalls zu dem Theorem kommt, daſs der Kegelschnitt neben zwei reellen noch zwei imaginäre Brennpunkte besitzt. Er wählt zum Ausgangspunkt die Forderung, daſs die Entfernung eines Peripheriepunktes von dem gesuchten Punkt eine rationale Function der Coordinaten sein soll, nimmt an, daſs es sich nur um eine ganze lineare Function handeln kann, und schlieſst so auf die Brennpunkte. Bekanntlich hatte Euler**) schon früher die Entfernung eines beliebigen Kegelschnittpunktes von einem Punkt der Axe untersucht und gefunden, daſs nur bei den Brennpunkten die auftretende Quadratwurzel sich allgemein ziehen läſst. Ihre Erweiterung finden diese Sätze bei Einführung der von Terquem sogenannten lignes conjointes.***) Es sind dies Geraden, deren Schnittpunkte mit einem gegebenen Kegelschnitt auf einem Kreis liegen. Läſst man den Kreis zum Nullkreis ausarten, so giebt es ein reelles Paar von lignes conjointes; das Quadrat der Entfernung von dem festen Punkt ist proportional dem Product der Entfernungen von den beiden zugehörigen Geraden. Wie schon Poncelet†) gezeigt hat, sind zwei derartige Sehnen stets gegen die beiden Axen gleich geneigt, sie werden parallel zur einen Axe, wenn das Centrum des Nullkreises auf die andere gelangt, und können zusammenfallen nur, wenn das Centrum mit einem Brennpunkt identisch wird.

VII. Entstehung des Kegelschnittes aus dem geraden Kegel.

1. Ursprünglich waren von den Alten nur solche Schnitte zur Erzeugung von Kegelschnitten zugelassen, die ein rechtwinkliges Axendreieck ergaben. Demzufolge wurden Hyperbel, Ellipse, Parabel als

*) Bret, Sur une méthode analytique pour la recherche des foyers des sections coniques, Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 317—321.

**) Euler, Introductio in analysin infinitimorum, (Lausanne 1748) Lyon 1792, Bd. 2, S. 63.

***) Ich komme auf die hierher gehörigen Untersuchungen von Chasles (Mémoire sur les lignes conjointes, Liouv. Journ., Bd. 3, 1838, S. 385—436), Terquem (Sur les lignes conjointes dans les coniques, ibidem, S. 17—20), Cremona (Sulle coniche ed sulle superficie di second ordine congiunte, Ann. di mat., Bd. 3, 1860, S. 257—282) gelegentlich der Focaleigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung zurück.

†) Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Bd. 1, (1822), Paris 1864, Nr. 394.

stumpfwinkliger, schiefwinkliger und rechtwinkliger Schnitt unterschieden, und es konnte jeder einzelne Kegelschnitt nur aus einem Kegel erzeugt werden. Apollonius hat zuerst gezeigt, daſs aus einem gegebenen Kegel alle Ellipsen und Parabeln, sowie alle Hyperbeln herausgeschnitten werden können, deren Asymptotenwinkel kleiner ist als die Scheitelöffnung des Kegels.*) Für die Spitzen der geraden Kegel, welche einen gegebenen Kegelschnitt projiciren, giebt er folgende Construction: In der zu seiner eigenen senkrechten Ebene lege man durch die Endpunkte A_1, A_2 der groſsen Axe einen Kreis, welcher das im Mittelpunkt M errichtete Lot in B_1, B_2 treffe. Man ziehe nun zwei Parallelen zur Hauptaxe in den Abständen $\frac{b^2}{a^2} MB_1$ und $\frac{b^2}{a^2} MB_2$, für die Ellipse auf denselben Seiten, wie B_1 und B_2 selbst, für die Hyperbel auf entgegengesetzten Seiten. Die Schnittpunkte mit dem Kreis sind Punkte des Ortes (liber I, Propp. 53 und 54). Hiernach würde der Ort das Erzeugnis eines Kreisbüschels und einer projectivischen Involution aus Parallelstrahlen sein, welche mit dem ersten Büschel den in ein Geradenpaar zerfallenden Kreis entsprechend gemein hat, und ist daher als Kegelschnitt zu erkennen. Dasselbe bestätigt eine kurze Rechnung. Die Gleichung eines Kreises durch die Endpunkte der Axe ist

$$x^2 + y^2 - 2ty - a^2 = 0,$$

die der beiden Parallelen

$$y^2 - 2\frac{b^2}{a^2}ty = \frac{b^4}{a^2}.$$

Hieraus ergiebt sich nach Elimination von t sofort

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

also eine Hyperbel, welche die Brennpunkte der gegebenen Ellipse zu Scheiteln und ihre Scheitel zu Brennpunkten hat. Ganz ähnlich läſst sich erkennen, daſs die Punkte der Ellipse die Spitzen der geraden Kegel sind, die die Hyperbel projiciren. Auch in dem Specialfall der Parabel liefert Apollonius' Lösung die wohlbekannte Parabel, welche den Scheitel der gegebenen zum Brennpunkt, den Brennpunkt zum Scheitel hat (liber I, Prop. 52, S. 87).

2. Indessen von ganz anderer Seite her ist Dupin zuerst auf dieses merkwürdige Paar von Kegelschnitten gekommen, nämlich bei der Untersuchung der Hüllfläche der Kugeln, welche drei gegebene

*) Apollonius, Sectiones conicae, Ed. Halley, liber VI, Propp. 28—33, (S. 85—92).

Kugeln berühren.*) In dem ersten Teil der Abhandlung war Folgendes bewiesen worden. Werden drei Kugeln (A), (B), (C) mit den Mittelpunkten A, B, C gleichartig von einer Reihe von Kugeln in den Tripeln abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... berührt, so laufen z. B. bc, $b'c'$, $b''c''$, ... in einem Ähnlichkeitspunkt von (B) und (C) zusammen. Von den Kreisen abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... liegen je zwei auf einer Kugel. Die Mittelpunkte aller dieser Hülfskugeln liegen in einer zur Ähnlichkeitsaxe senkrechten Ebene, und speciell die der berührenden Kugeln — M, M', M'', ... — bilden deshalb eine ebene Curve. Da die Kreistangenten in a, a', a'', ... in einem Punkte $\mathfrak{A}$ der Ähnlichkeitsaxe zusammenlaufen, so liegen diese Punkte selbst auf einem Kreise, und der Kegelschnitt $MM'M''$ ... wird von A, B, C aus durch gerade Kegel projicirt. Dupin führt nun aus, daſs die Reihe der Kreise abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... die eine Schar der Krümmungslinien der Fläche bilde, da für jeden die Normalen eine abwickelbare Fläche — einen Kegel mit der Spitze M, M', M'', ... — bilden; aber auch die zweite Reihe der Krümmungslinien müsse aus Kreisen bestehen. Projicirt man nämlich die Kreise abc, $a'b'c'$, $a''b''c''$, ... der Reihe nach von M, M', M'', ... aus auf die Ebene ABC, so erhält man stets denselben Kegelschnitt, der in A, B, C die Geraden $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ berührt. Von jedem Punkt desselben gehen daher unendlich viele Normalen der Fläche aus, die notwendig gleich lang sein müssen und so auf eine zweite Schar von Kugeln führen, deren Enveloppe die untersuchte Fläche ebenfalls ist. Er führt nun aus, daſs die Entfernungen eines Mittelpunktes der einen Reihe von zwei festen Mittelpunkten der anderen Reihe eine constante Summe oder Differenz ergeben, so daſs alle Punkte des einen Kegelschnittes als räumliche Brennpunkte des anderen Kegelschnittes betrachtet werden können (S. 25) und die Scheitel eines jeden die eigentlichen Brennpunkte des anderen sind. Später ist Dupin mehrfach auf die Frage zurückgekommen. Er beweist nochmals**), daſs ein Kegelschnitt unendlich viele Brennpunkte besitzt, die einen zweiten Kegelschnitt ausfüllen. Von jedem Brennpunkt aus wird der gegebene Kegelschnitt durch einen geraden Kegel projicirt, dessen Axe die Tangente des betreffenden Punktes ist. 1813 stellt er nochmals seinen Satz auf, nachdem er beobachtet hat, daſs von den beiden in einer Schar confocaler Oberflächen zweiter Ordnung vorkommen-

*) Hachette, Mémoire sur le contact des sphères (Travaux de l'école), Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 2, 1804, S. 17—28. Hierin wird ausdrücklich auf Dupin zurückgeführt: Cinquième problème. Déterminer les lignes de courbure de la surface courbe enveloppe de l'espace parcouru par une sphère qui se meut en touchant constamment trois sphères fixes, (S. 22—25).

**) Dupin, mémoire sur la Sphère tangente à trois ou à quatre autres, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 420—425.

den Grenzkegelschnitten jeder die Scheitel des anderen zu Brennpunkten hat.*) Endlich hat er**) 1822 nochmals ausführlich seine „Cyklide", die Flächen, deren beide Scharen von Krümmungslinien aus Kreisen bestehen, untersucht, entwickelt, dafs ihre Krümmungs-Mittelpunktfläche in zwei Kegelschnitte ausartet, und bewiesen, dafs von allen Punkten des einen aus der andere durch gerade Kegel projicirt wird.

3. Unabhängig von Dupin ist Quetelet in einer 1820 der Belgischen Akademie vorgelegten Arbeit ebenfalls auf dieses merkwürdige Paar von Kegelschnitten gestofsen.***) Durch ziemlich schwerfällige elementare Betrachtungen weist er (S. 126) nach, dafs z. B. bei einem elliptischen Schnitt eines geraden Kegels der Unterschied der nach den Scheiteln führenden Mantellinien gleich der Entfernung der Brennpunkte ist, dafs für jeden Ellipsenpunkt die Differenz der Entfernungen von Brennpunkt und Spitze constant ist (S. 129). Hieraus folgt (S. 151), dafs der Ort der Spitzen eine Hyperbel ist, deren Punkte als Brennpunkte der Ellipse bezeichnet werden können. Da Quetelet nur die letzte der Dupin'schen Arbeiten kannte, glaubte er ursprünglich die Priorität dieser Entdeckung für sich in Anspruch nehmen zu können.†) Die übliche Bezeichnung „ligne focale" führte Hachette für den Ort der Spitzen der geraden Kegel ein. In seiner Notiz findet sich die Bemerkung, dafs De Montferrand 1825 ebenfalls einen Beweis für den merkwürdigen Ort gegeben habe.††)

4. Auf die einfachste Form hat Dandelin diesen Satz zurückgeführt. Sondert man aus den einem geraden Kegel eingeschriebenen Kugeln die beiden aus, welche eine gegebene Ebene berühren, so sind die Berührungspunkte S und S_1 die Brennpunkte des Kegelschnitts. Der Beweis wird in glänzender Weise auf die sinnfällige Thatsache zurückgeführt, dafs eine Kugel von einem Punkt aus Tangenten von gleicher Länge erhält. Trifft nämlich die Mantel-

*) Dupin, Développements de géométrie etc., Paris 1813, S. 280.

**) Dupin, Applications de géométrie et de méchanique etc., Paris 1822, Quatrième mémoire, S. 210ff.

***) Quetelet, Mémoire sur une nouvelle théorie des sections coniques considérées dans le solide, Nouv. mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 2, 1822, S. 120—153. Man vergleiche auch: Quetelet, Théorèmes sur les sections du cône etc., Quet. Corr., Bd. 2, 1826, S. 78—80; Quetelet, Note sur les propriétés des foyers, dans les sections coniques, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 274—276 und Quetelet, Note, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 77—78.

†) Quet. Corr., Bd. 3, S. 273. Die Erwiderung Dupin's, in welcher die oben angeführten Arbeiten genannt werden, findet sich im Bull. de Férussac, Bd. 8, 1827, S. 286.

††) Hachette, Propositions de géométrie à trois dimensions etc., Bulletin des sciences, par la Société philomathique de France, 1825, S. 113—114, und auch Quet. Corr., Bd. 1, 1825, S. 354—356.

linie, die einen Kegelschnittpunkt P ausschneidet, die beiden Berührungskreise in Q und Q_1, so ist

$$PS = PQ, \qquad PS_1 = PQ_1$$

und, da QQ_1 augenscheinlich constant bleibt, entweder die Summe oder die Differenz von PS und PS_1 constant, wie behauptet war.*) Halten wir der bequemeren Ausdrucksweise halber den einen der beiden Fälle, etwa den der Ellipse fest, so gelten für die Spitze S_2 des Kegels die beiden Gleichungen

$$PS_2 - PS = S_2 Q; \qquad PS_2 + PS_1 = S_2 Q_1;$$

beide Gröfsen sind also für sich constant. Wählt man noch einen zweiten Kegel, mit der Spitze S_3, aus, so ist entweder

$$PS_2 + PS_3 \quad \text{oder} \quad PS_2 - PS_3$$

constant. Ferner ist umgekehrt, wenn man irgend zwei Punkte P, P'' der Ellipse auswählt,

$$P'S_2 - P''S_2 = P'S - P''S.$$

Sind P', P'' die Endpunkte der grofsen Axe, so ist der absolute Wert von $P'S - P''S$ gleich der Brennpunktentfernung, und der Ort für S_2 ist die Hyperbel, welche die Scheitel der gegebenen Ellipsen zu Brennpunkten, ihre Brennpunkte zu Scheiteln hat.**)

Dandelin ist von den Gesetzen der stereographischen Projection aus auf sein Theorem zurückgekommen; auch wird auf ihn das allgemeinere Theorem zurückgeführt, dafs ein Schnitt einer Rotationsfläche zu Brennpunkten die Punkte hat, in denen seine Ebene zwei eingeschriebene Kugeln berührt. Bewiesen hat er es freilich nur für das einschalige Hyperboloid, bei dem offenbar dieselbe Überlegung stattfindet, wie beim Rotationskegel; aber es liegt ganz im Sinne des Continuitätsprincips, das Resultat auch auf den zweiten Fall zu übertragen, wo die Geraden nicht mehr reell vorhanden sind.***) In der Geschichte des Pascal'schen Satzes habe ich bereits angedeutet, auf welche Weise Dandelin zeigt, dafs jeder Kegelschnitt aus einem Rotationshyperboloid herausgeschnitten werden kann.†)

5. Bobillier††) hat Dandelin's Resultate in der Art ver-

*) Dandelin, Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 2, 1822, S. 171—200 (S. 171—173). Booth hat bemerkt, dafs die Radicalebene der beiden Kugeln die Nebenaxe des Kegelschnittes ausschneidet: Proc. Irish Ac., Bd. 1, 1836—1837, S. 53—54.

**) Dandelin, Mémoire sur l'hyperboloide de révolution et sur les hexagones de Pascal et de Brianchon, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 3, 1826, S. 1—14. [Selbständige Paginirung.]

***) Ibidem, S. 7 (Nr. 10).

†) Ibidem, S. 8 (Nr. 12).

††) Bobillier, Propriétés des sections coniques, considérées dans le solide, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 270—274.

allgemeinert, daſs er anstatt der Kegelschnitte selbst „Focalkreise“ in die Betrachtung einführte. Es sind dies die Schnitte der einem geraden Kegel eingeschriebenen Kugeln mit der Ebene eines Kegelschnitts. Offenbar kann man den Dandelin'schen Beweis auf diese doppelt berührenden Focalkreise übertragen, die Summe oder Differenz der Tangenten, die zwei Focalkreise aus einem Kegelschnittpunkt erhalten, bleibt constant. Überdies ergiebt sich für jeden Focalkreis eine Directrix, die Schnittlinie der gegebenen Ebene mit der Berührungsebene der Focalkugel. Mit der gröſsten Leichtigkeit kann man zeigen, daſs die Tangente an einen Focalkreis für jeden Punkt des Kegelschnitts in einem festen Verhältnis zu seiner Entfernung von der zugehörigen Directrix steht. So elegant diese Resultate sind, denen man mit Leichtigkeit andere anschlieſsen könnte, so beziehen sie sich doch nur auf die eine Schar der doppelt berührenden Kreise, die ihren Mittelpunkt auf der Hauptaxe haben, während sie bei der Hyperbel unmittelbar auf die andere Reihe von Kreisen übertragen werden können und bei der Ellipse, die von der zweiten Reihe von Kreisen umschlossen wird, einer geeigneten Modification fähig sind. Mehrere Jahrzehnte später hat Sauze*) sich mit dieser Frage beschäftigt. Für die Hyperbel kann man sich die geometrische Einsicht verschaffen, indem man ein einschaliges Rotationshyperboloid statt des Kegels einsetzt. Die Projection der Axe des Hyperboloids ist dann eine Axe des Kegelschnitts, und zwar seine Nebenaxe, wenn sie das Hyperboloid nicht in reellen Punkten trifft. Demnach schneiden die Kugeln die zweite Reihe doppelt berührender Kreise aus, und es übertragen sich die Bobillier'schen Sätze sofort auf diese Kreisreihe. Freilich kann nun nicht mehr auf die Dandelin'sche Weise elementar gezeigt werden, daſs der Schnitt eine Hyperbel ist. Für den Meridian des Hyperboloids, der zu dieser Klasse von Schnitten gehört, kann man dies aus einem Satz von Chasles**) folgern: „Der Ort der Punkte, die proportionale Entfernungen von einem Punkt und einer Geraden haben, ist eine Rotationsfläche zweiter Ordnung“. Sobald das Verhältnis gröſser als 1 ist, kann man auf der Fläche, deren Meridiancurve eine Hyperbel ist, leicht Geraden nachweisen und dann die obigen Schlüsse machen.

6. In der Nebenreihe steht übrigens, wie auch aus dioptrischen Gründen leicht abgeleitet werden kann***), der Radius in einem

---

*) Sauze, Sur les courbes et les surfaces du second ordre, Extension du théorème de M. Dandelin, Nouv. Ann. de Math., Bd. 17, 1858, S. 33—43.

**) Chasles, Sur les surfaces du second degré qui n'ont pas de foyers, Liouv. Journ., Bd. 1, 1836, S. 187—190.

***) Man vergleiche z. B. Quetelet, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques etc., Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 3, 1826, S. 87—140 (S. 121 ff.) und Quetelet, Note etc., Quet. Corr., Bd. 8, S. 276.

constanten Verhältnis zu Entfernung des Mittelpunktes vom Brennpunkt, und die Reihe kann hieraus mit Leichtigkeit construirt werden. Dieser Satz findet sich in etwas anderer Form in einer Abbhandlung Steiner's*), die zwar mehrere Jahrzehnte später veröffentlicht wurde, die sich aber hier am ungezwungensten anschliefst. Der erste Teil der Abhandlung bezieht sich auf die Reihe von Kegelschnitten, welche zwei gegebene Kreise doppelt berühren, und zwar in Sehnen senkrecht zur Centrale. Aus einem Briefe Jacobi's an Steiner geht hervor**), dafs Steiner aus Untersuchungen über einander berührende Kugeln zu dem Satz von den Focalen ebenfalls gelangt ist, und wir können wohl annehmen, dafs die Sätze in der erwähnten Abhandlung aus dieser oder einer ähnlichen Quelle entsprungen sind. Hierfür spricht zunächst schon der Umstand, dafs Steiner den oben erwähnten Bobillier'schen Satz an die Spitze der Abhandlung stellt. Einen Teil der Kegelschnitte kann man herstellen, indem man durch die Kreise zwei Kugeln legt und einen umschriebenen Kegel mit der gegebenen Ebene schneidet. Eine Parabel wird hierbei nur entstehen, wenn eine der beiden Erzeugenden in der Hauptebene, — die in der Centrale senkrecht steht —, parallel zu der letzteren ist; bei der Parabel ist also die Summe der Tangenten an die beiden Kreise gleich der Entfernung der Mittelpunkte. Man lege ferner durch die gegebenen Kreise zwei gleiche Kugeln, deren Mittelpunkte M_1, M_2 erst zu derselben, dann zu verschiedenen Seiten der Ebene liegen mögen. Die einschaligen Hyperboloide, welche zwei derartigen Kugeln umschrieben sind, schneiden Kegelschnitte unserer Schar heraus. Es ist klar, dafs die Berührungskreise auf einer Kugel um den Mittelpunkt von $M_1 M_2$ liegen müssen. Dieses System concentrischer Kugeln hat mit der gegebenen Ebene ein System concentrischer Kreise gemein, welche die Berührungspunkte der Kegelschnitte mit unseren beiden Kreisen ausschneiden. Solche Kreise gehören auch zu den beiden Paaren gemeinsamer Tangenten der beiden Kreise. Die Hyperbeln unserer Gesamtheit, deren reelle Brennpunkte auf der Centrale liegen, können wir durch Kegel anschneiden, deren Axen parallel zur gegebenen Ebene sind, und die zwei durch die gegebenen Kreise gelegten Kugeln umschrieben sind. Bezeichnet man ihre Radien mit r_1 und r_2, den

*) Steiner, Über einige neue Bestimmungsarten der Curven zweiter Ordnung nebst daraus folgenden neuen Eigenschaften derselben Curven, Crelle's Journ., Bd. 45, 1853, S. 189—211 (Ges. W., Bd. 2, 1882, S. 444—468).

**) Auszug eines Schreibens von C. G. J. Jacobi an J. Steiner, Crelle's Journ., Bd. 12, 1834, S. 137—140 (Gesammelte Werke von C. G. J. Jacobi, Bd. 7, Berlin 1891, S. 7—10). Jacobi erwähnt, dafs der Satz von den räumlichen Brennpunkten aus dem Ivory'schen Satz über confocale Flächen zweiter Ordnung mit Leichtigkeit abgeleitet werden kann. Ich komme hierauf in aller Ausführlichkeit zurück.

Abstand ihrer Mittelpunkte M_1, M_2 von der Ebene mit h, so bestehen für die Mittelpunkte $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}''$ der dem Kegel eingeschriebenen Kugeln, welche die gegebene Ebene berühren, also den Radius h besitzen, die Gleichungen

$$\frac{\mathfrak{M}'M_1}{\mathfrak{M}'M_2} = \frac{r_1 - h}{r_2 - h}, \quad \frac{\mathfrak{M}''M_1}{\mathfrak{M}''M_2} = \frac{r_1 + h}{r_2 + h}, \quad \frac{\mathfrak{M}'M_1\,\mathfrak{M}''M_1}{\mathfrak{M}'M_2\,\mathfrak{M}''M_2} = \frac{r_1^2 - h^2}{r_2^2 - h^2}.$$

Bezeichnen wir mit A_1, A_2 die Mittelpunkte, mit a_1, a_2 die Radien der gegebenen Kreise, mit F', F'' ein Paar zusammengehöriger Brennpunkte, so ist

$$\frac{F'A_1 \cdot F''A_1}{F'A_2 \cdot F''A_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2},$$

d. h. die Paare der Brennpunkte bilden eine Involution, welche die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise zu Doppelpunkten hat. Dies ist der unter III, S. 452 aufgestellte Satz.

Bezeichnet man den Mittelpunkt des Kegelschnittes mit M, die Ähnlichkeitspunkte mit A und I, so ergeben sich die Brennpunkte F', F'' auf der Hauptaxe aus der Beziehung

$$MF'^2 = MF''^2 = MA \cdot MI,$$

diejenigen auf der Nebenaxe, G', G'', aus der Gleichung

$$MG'^2 = MG''^2 = -MA \cdot MI.$$

Die letzteren werden also reell, wenn M in die Strecke AI hineingelangt, und liegen alsdann auf dem Kreise über dem Durchmesser AI. Für einen Kegelschnitt dieser letzten Art verhalten sich in der That dem dioptrischen Satz entsprechend die Radien der gegebenen Kreise wie GA_1 und GA_2. Man sieht hieraus, dafs ein grofser Teil der Steiner'schen Resultate sich ungezwungen aus dieser Quelle erklären läfst.

Beiläufig führe ich hier noch folgenden von Dieu aufgestellten Satz an. Haben zwei Rotationskegel die Axen mit einander gemein, und schneidet man eine Tangentialebene eines jeden von beiden mit dem anderen, so erhält man zwei Kegelschnitte, deren jeder die Focale des anderen ist.*) Der Satz läfst sich mit Leichtigkeit darauf zurückführen, dafs die beiden Kegeln zugleich eingeschriebenen Kugeln die Brennpunkte der beiden Kegelschnitte liefern.

---

*) Nouv. Ann. de Math., Bd. 11, 1852, S. 115 (Question 253); Lösungen von Thiolier, Eyriaud, Painvin, S. 328 ff.

Zweiter Abschnitt.

Untersuchungen zur Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung.

VIII. Reduction auf die Hauptaxen. Beziehungen unter den Tripeln conjugirter und orthogonaler Durchmesser.

1. Von den Oberflächen zweiter Ordnung waren den Alten aufser Kugel, Kegel und Cylinder die Rotationsflächen bekannt mit Ausnahme des einschaligen Rotations-Hyperboloids. Archimedes*) unterscheidet, nach Torelli's gebräuchlich gewordenen Übersetzungen, das Sphaeroides longum und latum, verlängertes und abgeplattetes Ellipsoid, deren ersteres auch als Conoides acutiangulum bezeichnet wird, ferner das Conoides obtusiangulum, die eine Schale eines zweischaligen Hyperboloids, und das Conoides rectangulum, das Rotationsparaboloid. Archimedes beweist für diese drei Flächen durch eine Combination des Potenzsatzes für die Meridiancurve und für die Reihe der Kreise, dafs ein geschlossener Schnitt eine Ellipse ist (Propp. 12 ff.). Für die hyperbolischen Schnitte des Conoides obtusiangulum konnte er den entsprechenden Beweis nicht führen, weil der Potenzsatz ihm nur in einer Fassung bekannt war, bei der die beiden Scharen paralleler Sehnen nur einen Zweig der Hyperbel treffen. Kepler**) betrachtet die Rotationsflächen, deren Meridiancurve ein Kegelschnitt ist, von denen er 92 Arten unterscheidet; das einschalige Hyperboloid würde als solidum annularium zu bezeichnen sein. Eine solche Fläche entsteht, wenn eine Parabel oder der eine Zweig einer Hyperbel um eine zur Hauptaxe senkrechte Gerade rotirt, welche die Curve nicht trifft. Auf das einschalige Hyperboloid scheint eine der Figuren hinzuweisen. Die Vorstellung der Oberfläche zweiter Ordnung hat Wallis gebildet.***) Sie ist der Ort der ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte, bei denen die Endpunkte der Axen auf einem Kegelschnitt gleiten; Wallis giebt,

---

*) Archimedis quae supersunt omnia cum Eutocii Ascalonitae Commentariis. Ex recensione Josephi Torelli cum nova versione latina, Oxford 1792: De Conoidibus et Sphaeroidibus cum Torelli Commentariis, S. 257—318 (Prop. 12 etc.). (Ed. Heiberg, Bd. 1, Leipzig 1880, S. 345 ff.)

**) Kepler, Nova stereometria doliorum vinariorum, Linz 1615 (Supplementum ad Archimedem. De stereometria figurarum Conoidibus ac sphaeroidibus proxime succedentium). Ich verdanke diese und andere mit [St.] gekennzeichnete Notizen meinem Freunde P. Stäckel in Kiel.

***) Johannis Wallis Opera mathematica, Bd. 1, Oxford 1695: De sectionibus conicis, nova methodo expositis tractatus anno 1655 primum editus, S. 291—354.

ohne Beweis, den Satz, dafs sein Conoid aus allen Ebenen Kegelschnitte ausschneidet (Propp. 9, 14, 19 etc. In den Propp. 49 und 50 tauchen die Bezeichnungen „Paraboloeides, Ellipsoeides, Hyperboloeides" auf).

2. Als die analytische Geometrie den Begriff der Oberfläche zweiter Ordnung gebildet hatte, ergab sich von selbst das Problem, dessen Analogon bei den Curven zweiter Ordnung ohne Mühe gelöst war, die Oberfläche auf ihre Hauptaxen zu reduciren. Der erste Versuch dieser Art findet sich bei Descartes.*) Nachdem man die Kegelschnitte als Schnitte gerader oder schiefer Kreiskegel definirt hat, entsteht der allgemeine Kegel zweiten Grades, indem man von einem beliebigen Punkt aus Strahlen nach allen Punkten des neuen Ortes zieht. Dafs der neue Kegel nur Kegelschnitte der schon bekannten Art lieferte, war z. B. Desargues geläufig. Es entsteht die Frage „von rein theoretischem Interesse", ob der neue Kegel wieder Kreisschnitte enthält. Diese Frage läfst sich leicht bejahen, wenn die Spitze senkrecht über dem Mittelpunkt des Kegelschnitts liegt; für den allgemeinen Fall sucht Descartes eine Gerade durch die Spitze so zu bestimmen, dafs die geforderte Bedingung erfüllt ist, und gelangt durch eine nicht eben klare Analyse für den Fall der Parabel zu einer Gleichung dritten, für den Fall des Kegelschnittes zu einer Gleichung vierten Grades zu ihrer Bestimmung. Wie man sieht, ist hier das Problem, die Hauptaxen eines Kegels zu bestimmen, in's Auge gefafst.

3. Die Reduction der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen hat Euler zuerst in Angriff genommen.**) In die allgemeine Gleichung zweiten Grades führt er an Stelle der ursprünglichen rechtwinkligen Coordinaten neue, p, q, r, ein, wobei die Coefficienten mit Hülfe der bekannten drei Winkel ausgedrückt sind. Diese Winkel, fährt er fort, kann man so bestimmen, dafs qr, rp, pq herausfallen. Wer an der Möglichkeit zweifelt, möge bedenken, dafs sogar ein Winkel willkürlich bleiben kann, indem es vorerst genügt, pq und pr hinauszuschaffen, weil dann durch eine blofse Drehung des Coordinatensystems qr beseitigt werden kann. Er gelangt nun zu den drei Arten von Mittelpunktflächen, die er „Elliptois, superficies elliptico-hyperbolica und hyperbolico-hyperbolica" bezeichnet. Sodann kommt er auf den Fall, dafs einer der Coefficienten von p^2, q^2, r^2 verschwindet, unterscheidet die beiden Arten des Paraboloids, die er „superficies elliptico-parabolica und hyperbolico-parabolica" bezeichnet. Endlich schliefst er seine Aufzählung mit dem parabolischen Cylinder, bei dem zwei der Gröfsen p^2, q^2, r^2 in der Schlufsgleichung

*) Lettre de Descartes à M***, le 18 décembre 1648: Oeuvres de Descartes, publiées par Victor Cousin, Bd. 10, Paris 1825, S. 168—178.

**) Euler, Introductio in analysin infinitimorum, Lausanne 1748, Bd. 2, (Caput V).

fehlen. Die Unterarten des Kegels, sowie des elliptischen und hyperbolischen Cylinders werden übersehen.*)

Man würde diese Untersuchung als sehr unbefriedigend bezeichnen müssen, wenn sie nicht ihre Ergänzung in Euler's Untersuchungen über die Hauptträgheitsmomente fänden. Das Trägheitsmoment für eine beliebige Gerade ist eine homogene Function zweiten Grades ihrer Richtungscosinus, deren Coefficienten die Integrale $\iiint x^2 dm$, $\iiint xy dm$, ... bilden. Euler führt nun als Unbekannte den Winkel Θ ein, den diese Gerade mit der z-Axe einschliefst, ferner den Neigungswinkel η der Ebene dieses Winkels gegen die zx-Ebene. Soll das Trägheitsmoment ein Maximum werden, so müssen die Differentialquotienten nach Θ und η verschwinden. Aus beiden Bedingungen ergiebt sich eine Gleichung dritten Grades für $\operatorname{tg}\Theta$ (S. 172), die wenigstens eine reelle Wurzel besitzt, so dafs sicherlich eine Gerade den Bedingungen entspricht. Wählt man sie als z'-Axe eines Coordinaten-Systems und bringt die x'-Axe in die zz'-Ebene, so drücken die beiden Bedingungen genau aus, dafs die beiden bilinearen Functionen der bezüglichen Richtungscosinus, welche als Coefficienten von $z'x'$ und $z'y'$ sich ergeben würden und die Bedeutung $\iiint z'x' dm$ und $\iiint z'y' dm$ besitzen, verschwinden. Das Coordinaten-System kann nun eine Drehung um die z'-Axe derart erfahren, dafs auch $\iiint x'y' dm$ herausfällt. Sind also α', β', γ' die Richtungscosinus der betrachteten Geraden gegen drei bestimmte Axen, so wird die quadratische Form in die Normalform $L\alpha'^2 + M\beta'^2 + N\gamma'^2$ übergehen.**) Bei der speciellen mechanischen Bedeutung sind L, M, N, die Hauptträgheitsmomente, notwendig positiv, die mathematische Betrachtung aber kann ebensowohl auf eine ganz beliebige quadratische Function bezogen werden. In der That ist die Methode, mit deren Hülfe Hachette und Poisson die Reduction auf die Hauptaxen ausführen, keine andere als die oben angegebene Euler'sche.***)

*) Ein erster Versuch zur Einteilung der Oberflächen zweiter Ordnung ist schon von Fermat in der 1643 verfafsten und 1891 herausgegebenen Isagoge ad locos ad superficiem (Oeuvres, Bd. 1, S. 111) gemacht. In Folge eines falschen Lemma's werden die geradlinigen Flächen übersehen [St.].

**) L. Euler, Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum etc., Rostock und Greifswald 1765: Tractatus de motu corporum rigidorum, (Caput V, de momento inertiae S. 166—184, Caput VI, Investigatio momenti inertiae, S. 184—204). Noch nicht völlig von mechanischen Principien losgelöst ist die Bestimmung der Hauptträgheitsaxen in den früheren Behandlungen Euler's. Vgl. z. B. Recherches sur la connaissance mécanique des corps, Hist. de l'ac., Année 1758, Berlin 1765, S. 131—153.

***) Monge et Hachette, Application d'algèbre à la géométrie, Journ. de l'éc. pol., Heft 11, 1802, S. 143—170; Addition au mémoire précédent par les Cens Hachette et Poisson, S. 170—172.

4. Auch nachdem man gelernt hatte, bei der Reduction einer Form $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy \equiv F(x, y, z)$ auf die Normalform

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 \equiv G(x', y', z')$$

die Coefficienten A, B, C als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades darzustellen, blieb der Kunstgriff noch lange bestehen, auf die Realität erst einer der Axen zu schliefsen, da die Hülfsgleichung notwendig wenigstens eine reelle Wurzel besitzt, und alsdann die Realität der beiden anderen Axen indirect zu erschliefsen; auch gelangte man erst verhältnismäfsig spät dazu, die Gleichung dritten Grades, als deren Wurzeln sich A, B, C darstellen, auf rein rechnendem Wege, lediglich aus dem Umstande, dafs $y'z'$, $z'x'$, $x'y'$ herausfallen sollen, abzuleiten. Hachette z. B. leitet zunächst aus der allgemeinen Gleichung $F(x, y, z) =$ const. die Gleichung der Tangentialebene ab; drückt man aus, dafs sie zu dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht, so erhält man sofort drei lineare Bedingungsgleichungen für die Richtungscosinus des betreffenden Durchmessers, aus welchem sich die Gleichung

$$\sum \pm (a_{11} - t)\, a_{22}\, a_{33} = 0$$

für die drei Coefficienten unmittelbar ergiebt.*)

Andererseits benutzt man vielfach die Umkehrung der orthogonalen Substitution, um die gegebenen Coefficienten durch A, B, C linear auszudrücken und aus diesen Gleichungen dann durch Elimination der Richtungscosinus die Werte von $A + B + C$, $BC + CA + AB$, ABC zu ermitteln. Es kann jedoch nicht im Plan meines Referates liegen, die Entwickelung dieser Methode weiter zu verfolgen. Ich werde vielmehr nur die glänzende Art zu schildern haben, in der Poncelet die Aufgabe der Aufsuchung der Hauptaxen mit der Theorie des unendlich fernen Kugelkreises in Verbindung gebracht hat.

5. Der Umstand, dafs

$$\begin{aligned}
&a_{11} + a_{22} + a_{33},\\
&a_{22}a_{33} - a_{12}^2 + a_{33}a_{11} - a_{31}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2,\\
&a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}^2 - a_{22}a_{31}^2 - a_{33}a_{12}^2 + 2a_{23}a_{31}a_{12}
\end{aligned}$$

---

*) Hachette, Traité des surfaces du second degré [Application de l'algèbre à la géométrie par MM. Monge et Hachette], Paris 1813, S. 150 ff. Man vergleiche auch: Monge, Géométrie analytique, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 415—417 und Hachette, Autre Solution du même Problème, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 417—419. Hachette giebt die im Text angedeutete Entwickelung, Monge stellt die Bedingungen auf, unter denen eine concentrische Kugel die Fläche berührt. Der Radius einer solchen Kugel ist eine Halbaxe der Fläche. Beide Entwickelungen sind natürlich nahe verwandt.

gegenüber den orthogonalen Substitutionen Invarianten sind, prägt sich in verschiedenen geometrischen Sätzen aus, die besonders beim Ellipsoid deutlich hervortreten und ebenso, wie die Beziehungen unter den Systemen conjugirter Durchmesser, vielfältige Behandlung finden. Diesen letzteren gab Livet*) die folgende Form. Das Parallelepipedon aus den Endpunkten dreier conjugirter Durchmesser hat constantes Volumen; die Parallelepipeda, gebildet einerseits aus den Endpunkten zweier conjugirter Durchmesser und einer Axe, andererseits der beiden anderen Axen und des letzten conjugirten Durchmessers haben gleiches Volumen. Ferner ist die Summe der Quadrate dreier conjugirter Durchmesser constant. Diese Beziehungen lassen sich bei Vertauschung der Vorzeichen zum Teil auf die anderen Oberflächen zweiter Ordnung übertragen. Diesen Sätzen schliefsen sich andere verwandter Art von Binet**) und Petit***) an. Nach dem ersteren ist die Summe der Quadrate der Flächen eines Parallelepipedons aus drei conjugirten Durchmessern constant. Nach Petit ist die Summe der Quadrate der Projectionen dreier conjugirter Durchmesser auf eine beliebige Gerade constant.

6. Mit ganz besonderer Vorliebe ist indes Chasles†) immer aufs neue auf diese Beziehungen zurückgekommen. Bezeichnen wir, der Bequemlichkeit halber beim Ellipsoid stehen bleibend, mit l, m, n drei auf einander senkrechte Halbmesser, mit L, M, N die Inhalte der Ellipsen, welche die Ebenen mn, nl, lm mit dem Ellipsoid $(F(x, y, z) = 1)$ gemein haben, so sind

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = a_{11} + a_{22} + a_{33},$$

$$\frac{1}{L^2} + \frac{1}{M^2} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{\pi^2}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}^2 + a_{33}a_{11} - a_{31}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2\right)$$

constant. Chasles entwickelt die erste dieser Relationen in der genannten Abhandlung (S. 305) und interpretirt sie dahin, dafs die Endpunkte irgend dreier senkrechter Halbmesser auf einer Tangentialebene einer bestimmten Kugel liegen. Später kehrte er den Zusammenhang zwischen den beiden Sätzen um,††) nachdem Poncelet

*) Livet, Des surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 2, fructidor an XII, S. 28—30 und Formules pour passer d'un Système de coordonnées rectangulaires à un Système de coordonnées obliques, Journ. de l'éc. pol., Heft 13, 1806, S. 270—296.

**) Binet, Sur les Surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 4, 1812, S. 323—324 und: Mémoire sur un Système de Formules analytiques et leur application à des considérations géométriques, Journ. de l'éc. pol., Heft 16, 1813, S. 280—354 (S. 321 ff.).

***) Veröffentlicht in: Hachette, Traité etc., S. 255—258.

†) Zuerst in der Abhandlung: Propriétés des diamètres de l'ellipsoide, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 3, 1816, S. 302—328.

††) Chasles, Sur les surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 173—174.

den allgemeineren Satz gegeben hatte*): „Die Tripel orthogonaler Strahlen, die von einem Punkt ausgehen, treffen eine Oberfläche zweiter Ordnung in Punkten, deren Verbindungsebenen eine Rotationsfläche zweiter Ordnung berühren; dieselbe hat einen Brennpunkt in dem festen Punkt. Diese Fläche, welche in Chasles' Kugel übergeht, wenn der feste Punkt in den Mittelpunkt des Ellipsoids gelangt, entsteht bei polarreciproker Transformation an einer Kugel um den festen Punkt aus der sogleich zu erörternden Monge'schen Kugel.

7. Als den geometrischen Ausdruck des zweiten Satzes kann man den berühmten Satz von Monge auffassen, daſs die Spitze einer rechtwinkligen körperlichen Ecke, deren Ebenen an einer Oberfläche zweiter Ordnung gleiten, sich auf einer Kugel bewegt, deren Radius $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2} = \sqrt{\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C}}$ ist. Wie Livet**) mitteilt, hat Monge zunächst den entsprechenden Satz am Kegelschnitt entwickelt, aus ihm durch Verallgemeinerung den räumlichen Satz gefunden. Nach dem Satz der Ebene, der, wie bemerkt, von de la Hire aufgestellt wurde***), liegen die Spitzen aller umgeschriebenen orthogonalen Trieder, denen die eine oder andere von zwei parallelen Tangentialebenen α, α' angehört, in zwei Kreisen dieser Ebenen; die Spitzen der orthogonalen Trieder, die eine zu α, α' senkrechte Ebene enthalten, liegen mithin auf einem Kreise, der jeden der beiden genannten zweimal trifft; alle diese Spitzen gehören also einer Kugel an. Von den orthogonalen Triedern, die sich mit einer Tangentialebene überhaupt bilden lassen, kommen aber bereits vier unter den bisherigen vor, der Ort ihrer Spitzen gehört also als Kreis der Kugel vollständig an, die demzufolge die Spitzen aller umschriebenen orthogonalen Trieder enthält. Merkwürdigerweise hat Monge die Beobachtung nicht gemacht, daſs aus jedem Punkt der Kugel unendlich viele orthogonale Trieder sich an die Oberfläche legen lassen, und daſs demzufolge irgend zwei rechtwinklige körperliche Ecken mit gemeinsamer Spitze einem Kegel umschrieben sind.†) Es scheint, als ob

*) Poncelet, Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des sciences, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 265—272 (S. 270). Der entsprechende Lehrsatz der Ebene findet sich in der Abhandlung: Lettre de M. Poncelet etc., Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 und 1818, S. 68—72 (S. 70). Vgl. Applications d'analyse etc., Bd. 2, Paris 1864, S. 465.

**) In der oben erwähnten Abhandlung (S. 30).

***) Vgl. die Fuſsnote zu I, 6.

†) Hachette teilt Monge's Satz ebenfalls mit. Er setzt ohne weiteres voraus (Traité, S. 259), daſs der Ort der Spitzen eine Fläche ist; diese kann nur eine Kugel sein, da sie unendlich viele Kreise enthält. Selbstverständlich kann man das nicht von vorne herein voraussetzen, da die Anzahl der orthogonalen Trieder selbst dreifach unendlich groſs ist. Die Entwickelung des Textes zeigt, daſs man das Theorem thatsächlich aus dem de la Hire'schen Satz allein ableiten kann. Hachette reproducirt übrigens (S. 234) einen analytischen Beweis des Satzes von Poisson:

Steiner zuerst den Schritt gemacht hat, der aus dem Satz von den beiden Polar-Dreikanten eines Kegels zu diesem und zu seinem dualen Satz führt.*) Dafs ein Kegel zwei Tripel orthogonaler Strahlen enthalten kann, hat Ampère,**) wie sich zeigen wird, beobachtet.

Nach dem ersten Theorem von Livet ist nun die Entfernung einer Tangentialebene vom Mittelpunkt, multiplicirt mit dem Inhalt der Ellipse in der parallelen Durchmesserebene, constant. Nach dem Theorem von Monge ist die Summe der Quadrate dieser Entfernungen für irgend drei auf einander senkrechte Tangentialebenen constant, es folgt also ohne weiteres, dafs $\frac{1}{L^2}+\frac{1}{M^2}+\frac{1}{N^2}$ für je drei auf einander senkrechte Ebenen constant ist.***) Es versteht sich von selbst, dafs diese Sätze auf die anderen Mittelpunktflächen übertragen werden können.†)

IX. Kreisschnitte und Geradenscharen.

1. Einer der ersten und wichtigsten Sätze, die Apollonius im ersten Buche entwickelt, ist der von der „Sectio subcontraria". Legt man durch die Axe eines Kreiskegels, d. h. durch die Verbindungslinie des Mittelpunktes der kreisförmigen Grundfläche und der Spitze des Kegels die Ebene senkrecht zu der des Kreises, so schneidet sie aus dem Kegel das „Dreieck durch die Axe" (SAB) heraus. Hat eine zweite Schnittebene senkrecht zu diesem Dreieck mit den Seiten SA und SB die Schnittpunkte C und D gemeinsam, und ist SDC zu SAB ähnlich, so dafs also

$$SA\cdot SC=SB\cdot SD$$

Poisson, Sur les surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 7, 1807, S. 237—242 (S. 239).

*) Syst. Entwickelung, Anhang, Aufgabe 59, (Ges. W., Bd. 1, S. 452).

**) Ampère, mémoire sur quelques nouvelles propriétés des Axes permanens de Rotation des corps et des Plans directeurs de ces axes, Mém. de l'Ac. roy. d. sc. de l'Inst. de France, Années 1821 et 1822, Bd. 5, 1826, S. 86—152 (lu à l'Ac. le 18 juin 1821).

***) Chasles, Théorèmes sur les surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 272—273.

†) Chasles thut dies z. B. in der Abhandlung: Mémoire sur les propriétés des diamètres conjugués des hyperboloides, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 137—157. Ich füge hier die Abhandlungen an: Théorèmes généraux sur les diamètres des surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 255—258; Mémoire sur diverses manières etc., Liouv. Journ., Bd. 2, 1837, S. 388—405; Diverses propriétés des rayons vecteurs etc., Comptes rendus, Bd. 26, 1848, S. 531—535. Sehr eingehende Behandlung finden diese Theoreme in der Schrift: Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, zu welcher ursprünglich als Einleitung der Aperçu historique gedacht war.

ist, so wird die zweite Ebene ebenfalls einen Kreis aus dem Kegel herausschneiden. Schneiden sich AB und CD in O, und hat das in O errichtete Lot mit dem Kegel die Punkte K_1 und K_2 gemein, so ist

$$OK_1 \cdot OK_2 = OA \cdot OB = OC \cdot OD.$$

Hieraus geht hervor, dafs die Punkte K_1, K_2 einen zweiten Kreis über CD beschreiben, wenn der erste Kreis über AB sich selbst parallel bewegt wird. Man hat hierin einen Ausdruck dafür, dafs das Dreieck durch die Axe eine Durchmesserebene ist und die in ihr enthaltenen Axen den Winkel an der Spitze und seinen Nebenwinkel halbiren. Kreisebenen verschiedener Richtungen liegen selbstverständlich gleich geneigt gegen diese Axen.*) Beiläufig wurde schon davon gesprochen, dafs Descartes beim allgemeinen Kegel die Kreisschnitte nachgewiesen hatte. Es ist nicht ohne Interesse, seine Regel näher zu prüfen. Der Kegel habe zur Basis eine Ellipse mit den Axen a und b, seine Spitze S liege in der Höhe h über dem Mittelpunkt der Kugel. Eine Kugel mit dem Radius $a\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$ um diese Spitze als Mittelpunkt schneide die Nebenaxe in P und P_1, alsdann sind die cyklischen Ebenen des Kegels längs SP und SP_1 zur Ebene aus Spitze und Nebenaxe senkrecht. In der That, die Gleichung des Kegels ist

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{h^2}=0,\quad \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2}+\frac{1}{a^2}\left(y^2\frac{a^2-b^2}{b^2}-z^2\frac{a^2+h^2}{h^2}\right)=0,$$

die cyklischen Ebenen schneiden also die Nebenaxe der Ellipse in den Entfernungen $\pm b\frac{\sqrt{a^2+h^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$ vom Mittelpunkt, also in der That im Abstand $a\frac{\sqrt{b^2+h^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$ von der Spitze. Die eben angegebene Anordnung kann bei einem Kegel mit Leichtigkeit herbeigeführt werden, wenn eine Durchmesserebene desselben bereits vorliegt. Ich habe oben erörtert, dafs Descartes den Versuch unternommen hat, auch beim allgemeinen Kegel die Hauptaxen nachzuweisen.**)

2. Dafs ein Ellipsoid zwei Scharen von Kreisen besitzt, hat d'Alembert zuerst bemerkt.***) Zwei der Kreisschnitte gehen durch die mittlere Axe des Ellipsoids hindurch und stehen folglich auf der Hauptebene senkrecht. Alle zu diesen beiden parallelen Ebenen und nur diese schneiden aus dem Ellipsoid Kreise heraus. Euler hat den Ort der Axen, die von einem Punkt ausgehen und

*) Apollonius, Sectiones conicae, Ed. Halley, liber I, Prop. 5, S. 21.

**) Vgl. VIII, 2.

***) d'Alembert, Opuscules mathématiques etc., Bd. 7, Paris 1780; Mém. 53: Sur l'attraction des sphéroides elliptiques, Art. 119, S. 163.

gleiches Trägheitsmoment besitzen, bereits untersucht und findet, dafs einer dieser Kegel in ein Ebenenpaar zerfällt. Es hätte nur noch des kurzen Schrittes bis zum Trägheitsellipsoid bedurft, um ihn auf die Kreisschnitte kommen zu lassen.*)

3. Bei den Oberflächen im allgemeinen hat Monge die Kreisschnitte nachgewiesen. Seine Methode entbehrt nicht der Eleganz.**) Er stellt zunächst die Horizontalprojection des Schnittes einer Kugel mit einer Ebene dar, sodann diejenige des Schnittes der Fläche mit derselben Ebene. Stimmen beide mit einander überein, so hat die Ebene mit der Fläche einen Kreis gemeinschaftlich. Dies wird nun bei den Mittelpunktflächen genauer discutirt. Die beiden Paraboloide werden aufser Betracht gelassen; nur zum Anfang wird behauptet, dafs jede Oberfläche zweiter Ordnung zwei Scharen von Kreisen besitze. Erst in einer Abhandlung von Bobillier***) tritt der eigentliche geometrische Inhalt der Schlufsweise deutlich hervor. Es wird die linke Seite der Flächengleichung in zwei Summanden zerlegt, von denen der eine, für sich gleich 0 gesetzt, eine Kugel, der andere ein Ebenenpaar darstellen würde, und es wird hieraus der Schlufs gezogen, dafs diese Ebenen Kreise mit der Fläche gemein haben.

Während das elliptische Paraboloid Kreisscharen besitzt, ist dies bei dem hyperbolischen Paraboloid nicht der Fall, oder vielmehr die Kreise sind in Gerade ausgeartet. Wie Hachette†) anführt, hat Berthot diese scheinbare Ausnahme des Satzes, dafs jede Oberfläche zweiter Ordnung zwei Kreisscharen besitzt, zuerst bemerkt. Monge hatte zwar ausführlich dargethan, dafs ein hyperbolisches Paraboloid Ellipsen nicht enthält; Hachette beweist aber nochmals auf elementarem Wege, dafs es zu jeder beliebigen Ebene zwei parallele Gerade der Fläche giebt, jede Schnittcurve sich also ins Unendliche erstrecken mufs. Poncelet hat, wie wir sehen werden, die Theorie der Kreisscharen mit dem unendlich fernen Kugelkreis in Verbindung gebracht und zuerst die Bemerkung gemacht, dafs es nicht blofs zwei, sondern sechs verschiedene Kreisscharen giebt, von denen jedoch vier imaginär sind. Für die synthetische Geometrie hat er auf diese Weise die Frage endgültig entschieden. Es ist nicht meine Aufgabe hervorzuheben, welche eleganten algebraischen Untersuchungen sich an diese Frage geknüpft haben.

*) Euler, Theoria motus etc., 1765, S. 178.

**) a) Monge et Hachette, Application d'algèbre à la géométrie, Journ. de l'éc. pol., Heft 11, 1802, S. 143—170 (S. 161 ff.). b) Monge, Application de l'analyse à la géométrie, Vierte Auflage, Paris 1809, Erster Teil, §§ 7 u. 8. c) Hachette, Traité des surfaces du second degré, Paris 1813, S. 197—207.

***) Bobillier, Recherches sur les surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 27—37.

†) Note sur la surface du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd 1, Nr. 10, 1808, S. 433.

Auf die Kreisschnitte hat Dupin eine interessante Erzeugung der Oberflächen zweiter Ordnung gegründet.*) Gleiten die Endpunkte einer Strecke auf zwei Geraden, so beschreibt jeder andere Punkt eine Ellipse; dies Theorem bildet für den Fall zweier auf einander senkrechten Geraden, wie bekannt, das Princip für unzählige Ellipsenzirkel.**) Dupin erweitert den Satz auf den Fall zweier windschiefer Geraden und dehnt ihn auf Flächen aus. Bewegt sich das eine Ende der Strecke in einer Geraden, während das andere auf einer Ebene bleibt, so ist der Ort eines dritten Punktes ein Ellipsoid, das die gegebene und die zu ihr parallelen Ebenen in Kreisen schneidet.***)

4. Die Frage nach den Kreisschnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung ist ein specieller Fall der allgemeineren Frage nach den Ebenen, die einen bestimmten Kegelschnitt aus der Fläche herausschneiden. Die Durchmesser, welche die Mittelpunkte derartiger Kegelschnitte projiciren, bilden einen Kegel vierten Grades, der für den Fall des Kreises in vier imaginäre Ebenen zerfällt. Den ersten Beitrag zu dieser interessanten Frage hat Bobillier gegeben. Er beweist in der soeben erwähnten Abhandlung (S. 35) Folgendes: „Das Hyperboloid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

wird von der Oberfläche

$$4\,(b^4c^4x^2 + c^4a^4y^2 + a^4b^4z^2) \\ - a^2b^2c^2\,\mathrm{tg}^2\,\nu\,(x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 + c^2)^2 = 0$$

in Punkten geschnitten, deren Geradenpaare sich unter dem Winkel ν kreuzen". Im Einklang mit Monge's Kugelsatz schneidet eine Kugel vom Radius $a^2 + b^2 - c^2$ die Punkte aus, deren Geradenpaare auf einander senkrecht stehen. Im Fall des gleichseitigen Hyperboloids reducirt sich die Schnittcurve auf die beiden kleinsten Kreise der Fläche.

5. In derselben Abhandlung bietet Bobillier einen wahrhaft eleganten analytischen Beweis für die Erzeugung eines einschaligen Hyperboloids durch projectivische Ebenenbüschel. Er bemerkt (S. 30), dafs die Gleichung desselben in der Form

$$\left(\frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b} - \frac{z}{c}\right) = \left(1 + \frac{x}{a}\right)\left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

---

*) Dupin, Essai sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré, Journ. de l'éc pol., Heft 14, 1808, S. 45—83 (S. 53, 64 etc.).

) Einen solchen Mechanismus beschreibt z. B. Ubaldo 1579 (a. a. O. S. 10). Der Satz selbst ist, was nicht ausdrücklich bemerkt wurde, uralt. Chasles führt ihn auf Proclus zurück (Aperçu, S. 49).

***) Dupin verallgemeinert den Satz noch auf folgende zweite Art: Gleiten drei Punkte eines Stabes in gegebenen Ebenen, so beschreibt ein vierter Punkt desselben eine Oberfläche zweiter Ordnung.

geschrieben werden kann, und dafs es deshalb sowohl die Geraden

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\varrho\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \varrho\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{x}{a},$$

als auch die andere Schar von Geraden

$$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\pi\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \pi\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{x}{a}$$

enthält. Er beweist mit Leichtigkeit, dafs jede Gerade der einen von jeder Geraden der anderen Schar geschnitten wird. Die Methode, welche Monge zur Nachweisung der Geraden auf dem Hyperboloid benutzte, stand der eben dargelegten bei weitem an Eleganz nach. Indem er das Hyperboloid mit Ebenen schneidet, die zur z-Axe parallel sind, weist er auf demselben Geraden nach, die paarweise dieselbe Horizontalprojection besitzen. Er schliefst hieraus, dafs das Hyperboloid zwei Geradenscharen enthalte, die sich gegenseitig durchdringen.*)

In der géométrie descriptive**) geht Monge auf den Zusammenhang der beiden Geradenscharen näher ein. Projicirt man zwei Curven von allen Punkten einer dritten aus, so treffen die Schnittgeraden je zweier zusammengehöriger Kegel alle drei Curven zugleich. Aus drei Geraden entsteht so eine Regelfläche zweiten Grades.***) Greift man irgend drei Geraden dieser Schar heraus, so werden sie aufser von den drei ursprünglichen von unendlich vielen anderen Geraden getroffen; jede von ihnen hat mehr als zwei Punkte mit der Fläche gemein, gehört ihr also vollständig an und trifft sämtliche Geraden der ersten Schar. Beide Scharen, fährt er fort, bilden gleichsam Einschlag und Kette eines Gewebes.

6. Dafs ein einschaliges Rotationshyperboloid auch durch Rotation einer Geraden erzeugt werden kann, hat Wren†) auf folgende Art gezeigt. Die Abscisse eines Punktes der Hyperbel

$$x^2=a^2+\frac{a^2}{b^2}y^2$$

ist offenbar die Hypotenuse eines aus der zugehörigen Abscisse der Asymptote und der grofsen Halbaxe gebildeten rechtwinkligen Dreiecks. Die Punkte der Hyperbel gelangen also bei der Rotation um die Nebenaxe einmal in die Gerade hinein, die parallel

*) Man vergleiche die oben (S. 73 **) angeführten Abhandlungen.

**) S. 130 u. 131 (Ausgabe von 1799).

***) Monge verweist auf seine „application de l'analyse à la géométrie“. Die älteste mir zugängliche Ausgabe (Feuilles d'analyse etc.?) stammt aus dem Jahre 1802.

†) Christoph Wren, Corporis Cylindroidis Hyperbolici, elaborandis Lentibus Hyperbolicis accomodati etc., Phil. Trans. f. 1669, Bd. 4, S. 961—962.

zur Asymptote senkrecht über der Ebene der Hyperbel und im Abstande a gezogen ist. Diese Gerade gehört also der Fläche an. Dafs zwei verschiedene Geradenscharen auf der Fläche sich finden, scheint Wren nicht erkannt zu haben. Parent hat zwei Beweise für die Thatsache gegeben; der eine analytische stimmt mit Wren's Beweis im wesentlichen überein.*) Ein zweiter Beweis beruht darauf, dafs mit Hülfe des Potenzsatzes des Apollonius die Schnitte des „Cylindroids" als Kegelschnitte erkannt werden können. Freilich beschränkt sich der von Parent nach dem Vorbild des Archimedes gegebene Beweis auf den Fall, wo die Projection der Axe in die Schnittebene das Cylindroid in reellen Punkten trifft und somit zur Hauptaxe des Schnittes wird.**) Sobald diese Hauptaxe die Meridiancurve berührt, geht die ausgeschnittene Hyperbel in ein Geradenpaar über (S. 472). Das Cylindroid kann also durch Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Axe erzeugt werden, und dies ist, fährt Parent fort, auf unendlich viele Weisen möglich, weil die Fläche mit jeder Tangentialebene zwei Geraden gemein habe. Auch Parent scheint hiernach die Anordnung der beiden Geradenscharen gegen einander nicht vollständig erfafst zu haben. Der Name Cylindroid rührt, wie Parent anführt, von Wallis her, der auch erkannt habe, dafs dieselbe Geraden enthalte.***)

7. Dem Hyperboloid wird in dem Organ der école polytechnique ein ganz besonderes Interesse entgegengebracht. Ich erwähne eine Notiz Hachette's über das Rotationshyperboloid†), ferner Lösungen von Brianchon, Petit und Duleau der Aufgabe, die Durchschnittspunkte eines durch drei Geraden bestimmten Hyperboloids mit einer Geraden zu finden.††) Ich komme später auf die wahrhaft elegante Lösung, die Steiner von dieser Aufgabe gegeben hat. Erwähnung verdient ferner eine Arbeit von Binet, in der, freilich auf analytischem Wege, der Ort der Geraden, von denen aus zwei windschiefe

---

*) Parent, Essais et Recherches de Mathématique et de Physique, (Nouvelle édition), Paris 1713, Bd. 2, S. 645—662; Manière très simple de tailler les meules hyperboliques propres à la dioptrique etc. Die Abhandlung war 1702 der Pariser Akademie vorgelegt worden.

**) Parent, Essais et Recherches etc., Bd. 3, S. 453—526: Sur la géométrie et sur la statique d'Archimedes etc. (der Pariser Akademie 1698 vorgelegt).

***) Wallis, Mechanicorum sive tractatus de motu: Pars secunda: Quae est de centro gravitatis, ejusque calculo, Anno 1670 edita, Prop. 32 (opera mathematica, Bd. 1, S. 931). Die Entwickelung ist schon im wesentlichen die von Wren. [St.] Clairaut hat erkannt, dafs die Gleichung $xy = az$ durch die Annahmen $x = b$, $by = az$ und $y = c$, $cx = az$ befriedigt wird: Recherches sur les courbes à double courbure, Paris 1731, S. 58. [St.]

†) Hachette, De l'hyperboloide de révolution, engendré par la ligne droite, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 7, 1807, S. 242—244.

††) Sur la surface gauche du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 10, 1808, S. 434—439.

Geraden durch einen rechtwinkligen Ebenenwinkel projicirt werden, als ein specielles Hyperboloid erkannt wird.*) Auf Bobillier ist ein zweites merkwürdiges Hyperboloid zurückzuführen, der Ort der Strecken, deren Endpunkte auf gegebenen Geraden fortschreiten, und die von einem festen Punkte aus unter einem rechten Winkel erblickt werden.**)

8. Von besonderer Bedeutung aber sind die Lösungen einer im Jahre 1813 gestellten Aufgabe. Tinseau***) bezeichnet 1780 als eine sehr bekannte Fläche das „quadrilatère gauche", den Ort der Geraden, die zwei gegenüberliegende Seiten eines räumlichen Vierecks in dem gleichen Verhältnis teilen. Er betrachtet es als speciellen Fall eines Conoids und giebt das Volumen, das es zusammen mit abschliefsenden Ebenenstücken einschliefst. Die erwähnte Aufgabe fordert nun †) die Gleichung der beiden Flächen, welche je zwei gegenüberliegende Seiten eines Vierseits bilden, sowie den Nachweis, dafs man es mit den beiden Geradenscharen eines hyperbolischen Paraboloids zu thun habe. Es wird zunächst eine analytische Lösung von Giorgini mitgeteilt, sodann in einer Fufsnote eine descriptive Lösung der Aufgabe von Monge dargestellt; dieselbe beruht wesentlich auf Anwendung von Proportionen. Es wird ferner auf eine Herleitung Legendre's hingewiesen.††) Dieser Liste kann ein Beweis hinzugefügt werden, den Meier Hirsch in seiner Aufgabensammlung mitteilt.†††) Von ganz besonderer Wichtigkeit aber ist eine Entwickelung Chasles' (S. 446). Wenn man auf den Seiten A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_1 eines Vierseits B_1, B_2, B_3, B_4 derart annimmt, dafs

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} = \alpha\frac{A_4B_3}{A_3B_3}, \qquad \alpha\frac{A_2B_2}{A_3B_2} = \frac{A_1B_4}{A_4B_4}$$

ist, so erhält man durch Multiplication

$$A_1B_1 \cdot A_2B_2 \cdot A_3B_3 \cdot A_4B_4 = A_2B_1 \cdot A_3B_2 \cdot A_4B_3 \cdot A_1B_4,$$

so dafs nach einem Carnot'schen Theorem*†) B_1, B_2, B_3, B_4 einer Ebene angehören. Folglich wird jede Gerade B_1B_3 der ersten Schar

*) M. Binet a trouvé etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 2, 1810, S. 71. Den entsprechenden Kegel hatte Hachette betrachtet (Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 6, 1806, S. 179).

**) Bobillier, Démonstration de divers théorèmes de géométrie, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 185—202 (S. 195).

***) Tinseau, Sur quelques propriétés des solides renfermés par des surfaces composées de lignes droites, Mém. de Math. et de Phys. prés. à l'Ac. roy. d. sc. par divers savants etc., Bd. 9, Paris 1780, S. 625—640.

†) Question de géométrie, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 439—447.

††) Legendre, Géométrie, neuvième édition, S. 147, Prop. 16. Diese Auflage ist mir nicht zugänglich geworden.

†††) Meier Hirsch, Sammlung geometrischer Aufgaben, Zweyter Theil, Berlin 1807, S. 238—240.

*†) Carnot, Mémoire sur la relation etc., Paris 1806, S. 71.

von jeder Geraden $B_2 B_4$ der anderen Schar geschnitten. Greift man irgend drei gegeneinander windschiefe Geraden eines Hyperboloids heraus, construirt zwei sie in A_1, B_1, A_2 bez. A_4, B_3, A_3 treffende Geraden, so wird zuerst die zweite, sodann die erste Geradenschar der Fläche vollständig angehören. Daſs aber umgekehrt die Geradenscharen stets einem Hyperboloid angehören, erfordert den Satz, daſs sich durch drei zu einander windschiefe Geraden stets ein Hyperboloid legen läſst. Chasles hat dieser seiner Erstlingsarbeit eine groſse Bedeutung beigelegt. Man sieht ja in der That die Erzeugung durch projectivische Punktreihen ziemlich deutlich vorgebildet. Er hat daraus später einen Satz abgeleitet, in dem die Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Punktreihen sich ausspricht.

9. Der descriptive Beweis von Monge für das Paraboloid findet seine Ergänzung in einer Entwickelung Hachette's für das allgemeine einschalige Hyperboloid.*) Er greift die Geraden heraus, welche je zwei von drei gegebenen Geraden treffen und zur dritten parallel sind und also mit jenen ein räumliches Sechsseit bilden. Schneidet nun eine Gerade die drei gegebenen, eine zweite die drei Parallelen, so ist aus Proportionssätzen leicht darzuthun, daſs sie auch einander schneiden. Eine bloſse Umschreibung des Chasles'schen Beweises ist derjenige von Coriolis. Versieht man nämlich vier Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 mit beliebigen Lasten m_1, m_2, m_3, m_4, sucht erst die Schwerpunkte B_1, B_3 von A_1, A_2 und A_3, A_4, hernach diejenigen B_2, B_4 von A_2, A_3 und A_4, A_1, so enthalten $B_1 B_3$ und $B_2 B_4$ beide den Schwerpunkt der vier Massen und müssen sich daher schneiden. Verändert man also m_1, m_2, m_3, m_4 derart, daſs $\frac{m_1}{m_2} : \frac{m_3}{m_4} = \frac{m_1}{m_3} : \frac{m_2}{m_4}$ ungeändert bleibt, so erhält man zwei sich gegenseitig durchdringende Geradenscharen.**)

Wir brechen hier ab, um im dritten Teile nach dem Erwachen des Projectivitätsgedankens diese Untersuchungen mit besonderem Eifer wieder aufgenommen zu sehen.

---

*) Hachette, Einige Bemerkungen über Flächen zweiter Ordnung etc., Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 339—349.

**) Coriolis, Mémoire sur la théorie des momens, considérés comme analyse des rencontres des lignes droites, Journ. de l'éc. pol., Heft 24, 1835, S. 133—141.

X. Flächenbüschel, Raumcurve vierter Ordnung.

1. Den Begriff des Flächenbüschels verdankt man, wie schon an anderer Stelle hervorgehoben wurde, Lamé*). Sind $P=0$ und $Q=0$ zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so ist

$$pP+qQ=0$$

eine zweite Fläche, welche mit den beiden ersten alle ihnen gleichzeitig angehörende Punkte gemein hat. Lamé zieht den Schlufs, dafs diese Curve durch acht Punkte festgelegt ist, dafs alle durch sieben Punkte hindurchgehenden Flächen noch einen achten Punkt mit einander gemein haben. Sucht man bei einem Büschel von Oberflächen zweiter Ordnung zu einer und derselben Richtung paralleler Strahlen die conjugirten Durchmesserebenen, so erhält man Ebenen eines Büschels. Lamé hat hierauf, wie wenig bekannt zu sein scheint, eine sehr annehmbare Construction einer Oberfläche zweiter Ordnung aus neun Punkten gegründet. Sind zuerst in einer Ebene fünf Punkte gegeben, die einen Kegelschnitt K bestimmen, und drei Punkte A, B, C aufserhalb derselben, deren Verbindungslinien BC, CA, AB die Ebene in A_1, B_1, C_1 treffen, so giebt es zwei dem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'$, deren Seiten durch A_1, B_1, C_1 hindurchgehen.**) $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ laufen in einem Punkte S, $A\mathfrak{A}'$, $B\mathfrak{B}'$, $C\mathfrak{C}'$ in einem zweiten Punkte S' zusammen. An diesen Spitzen bestimmt der Kegelschnitt zwei Kegel, die beide die acht gegebenen Punkte enthalten. Nun läfst sich leicht die Fläche zweiter Ordnung bestimmen, welche die Schnittcurve der beiden Kegel mit einem Punkte aufserhalb, D, verbindet. Sucht man zu der Richtung von DA die conjugirten Durchmesserebenen der beiden Kegel und verbindet ihre Schnittlinie mit der Mitte von DA, so erhält man eine Durchmesserebene der Fläche; wiederholt man die Construction dreimal, so ist der Mittelpunkt und damit die Fläche selbst gegeben. Legt man nach dieser Regel durch vier Punkte einer Ebene und vier Punkte aufserhalb zwei Oberflächen zweiter Ordnung, so kann man ganz ähnlich den Mittelpunkt einer Fläche bestimmen, die ihre Schnittcurve mit einem neunten Punkte verbindet. Legt man durch

---

*) Lamé, Examen des différentes méthodes etc., Paris 1818. Bereits Dupin hat übrigens gelegentlich ausgesprochen, dafs durch die Schnittcurve zweier concentrischen Flächen mit gemeinsamen Axenrichtungen unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung hindurchgehen. Vgl. die schon citirte Abhandlung: Dupin, Essai sur la description etc., Journ. de l'éc. pol., Heft 14, 1808, S. 80, Note 7.

**) Die Geschichte der Aufgabe, einem Kegelschnitt ein n-Eck einzuschreiben, dessen Seiten der Reihe nach durch n feste Punkte gehen, gebe ich im Anschlufs an die Poncelet'sche Lösung derselben.

acht Punkte zwei Oberflächen zweiter Ordnung, von denen jede noch einen vierten Punkt in der Ebene aus dreien von ihnen enthält, so kann man durch ihre Schnittcurve und einen neunten Punkt, also durch neun beliebig gegebene Punkte eine Oberfläche zweiter Ordnung legen (S. 62—69). Ich habe bereits bemerkt und wiederhole es hier, daſs Lamé sich rechnend von den Paaren conjugirter Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung dadurch Rechenschaft gegeben hat, daſs er sie als Glied eines durch zwei Kegel bestimmten Büschels auffasste. Für jede der Spitzen haben alle Oberflächen dieselbe Polarebene, wie man jetzt sagen würde. Nach Lamé's Ausdrucksweise bewegt sich die Spitze des zweiten Kegels auf einer Ebene, wenn die erste Spitze festgehalten wird. (S. 48.)

2. Die Durchdringung zweier Oberflächen zweiter Ordnung hat von jeher besonderes Interesse in Anspruch genommen. Ihre zeichnerische Darstellung bildete besonders für den Fall, wo es sich um Kegel und Cylinder handelte, einen Hauptgegenstand der Übung.*) Einen ersten Überblick über die Gestaltung dieser Durchdringungscurve sucht sich Hachette**) zu verschaffen, geht jedoch nicht über die allereinfachsten Sätze, daſs die Curve einen oder zwei Züge, vier, zwei oder überhaupt keine Asymptoten besitzen kann etc., hinaus. Zum Schluſs wird, allerdings ganz flüchtig, des Falles gedacht, daſs die Flächen eine Gerade, neben dieser eine Curve dritter Ordnung gemein haben können. Frézier hat sich zuerst mit der Durchdringung einer Kugel und eines Ellipsoids beschäftigt, welche er als „ellipsoidimbre“ bezeichnet. In speciellen Fällen ist diese Curve ein „ellipsimbre“, d. h. der Durchschnitt eines elliptischen Cylinders mit einem anderen Cylinder. Die Bezeichnungen „parabolimbre“, „hyperbolimbre“ gebraucht Frézier für die Schnittcurve eines hyperbolischen bez. parabolischen Cylinders mit einem Cylinder beliebigen Gesetzes. Beim „cycloimbre“ (circulus imbricatus) handelt es sich um die Durchdringung eines Rotationscylinders mit einem anderen Cylinder, dessen Erzeugende zur Kreisebene parallel sind.***)

3. Daſs die Durchdringung zweier allgemeinen Flächen zweiter Ordnung im allgemeinen auf vier Kegeln gelegen ist, hat, wie später gezeigt wird, Poncelet zuerst erkannt. Haben zwei Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftliche Hauptaxen, so projicirt sich ihre Durchdringung auf die Hauptaxenebenen als Kegelschnitt, und es

*) Man vergleiche z. B. Monge, géométrie descriptive, Paris 1799, S. 83.

**) Hachette, Des courbes du quatrième degré, considérées comme des projections de l'intersection de deux surfaces coniques du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 9, 1808, S. 368—372.

***) Frézier, Élémens de stéréotomie à l'usage de l'architecture pour la coupe des pierres, Bd. 1, Paris 1760, S. 67—69, 113. Vgl. auch: La théorie de la pratique de la coupe des pierres etc. ou traité de stéréotomie, Neue Auflage, Paris 1754, S. 58, 61, 136.

werden in diesem Fall die Poncelet'schen Kegel evident. Diese specielle Curven-Form ergab sich Monge in seiner vielbewunderten Abhandlung für die Krümmungslinien des Ellipsoids.*) Auf die (xz-)Ebene der gröfsten und kleinsten Axe projiciren sich die Krümmungslinien als Ellipsen, welche vier Geraden berühren, die Tangenten der Schnittellipse in den Nabelpunkten der Fläche; für die Projectionen auf die xy-Ebene ergeben sich teils Ellipsen, teils Hyperbeln, die vier gemeinschaftliche, aber imaginär gewordene Tangenten besitzen. Monge stellt sie mittels zweier Hülfskegelschnitte dar, deren Coordinatenpaare die Hauptaxen der Kegelschnitte ergeben.

4. Dupin**) ersetzte diese Darstellung durch die uns jetzt geläufige. Zwei Flächen zweiter Ordnung

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1, \quad \frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} + \frac{z^2}{C_1} = 1$$

durchschneiden sich rechtwinklig in den Punkten, für welche

$$\frac{x^2}{AA_1} + \frac{y^2}{BB_1} + \frac{z^2}{CC_1} = 0$$

ist; ein Kegel zweiten Grades bestimmt diese Punkte ihrer Schnittcurve. Durchschneiden die gegebenen Flächen sich in den Hauptaxen-Ebenen rechtwinklig, so haben die Schnittcurven des Kegels mit den beiden Flächen gleiche Projectionen auf allen drei Hauptaxen-Ebenen und fallen daher zusammen; die Oberflächen durchschneiden sich überall rechtwinklig, wo sie einander begegnen (S. 268). Je zwei zusammengehörige Hauptschnitte haben alsdann die Brennpunkte gemein, oder es sind die Differenzen zusammengehöriger Axenquadrate einander gleich. Dupin zerlegt nun seine Flächenschar in Ellipsoide, einschalige und zweischalige Hyperboloide und schliefst aus seiner allgemeinen Entwickelung (S. 231 ff.), nach der jede Fläche eines dreifach orthogonalen Systems in ihren Krümmungslinien von den beiden Scharen von Flächen getroffen wird, denen sie nicht angehört, dafs irgend zwei confocale Oberflächen zweiter Ordnung verschiedener Gattung sich in einer beiden gemeinsamen Krümmungslinie durchdringen (S. 271 ff.). Er untersucht nun seine Flächenschar genauer, erläutert die Art, wie man mit Hülfe der Grenzkegelschnitte von den Ellipsoiden zu den einschaligen Hyperboloiden, von diesen zu den zweischaligen Hyperboloiden übergehen kann. Die Grenzkegelschnitte werden als Orte der Nabelpunkte für die Ellipsoide und die zweischaligen Hyperbo-

*) Monge, Sur les lignes de courbure de la surface de l'ellipsoide, Journ. de l'éc. pol., Heft 2, 1796, S. 145—165.
**) Dupin, Développements de Géométrie, Paris 1813, quatrième et cinquième mémoire. [Vgl. VII, 2.]

loide der Schar erkannt. Im Schlufsabschnitt seines Werkes bringt er seine Resultate mit denen Monge's in Zusammenhang.

5. In einer gleichzeitig erschienenen Abhandlung kommt Binet in ganz anderem Zusammenhange ebenfalls auf den Satz, dafs zwei ungleichartige confocale Oberflächen zweiter Ordnung sich überall unter rechtem Winkel schneiden.*) Mifst man die Entfernung p eines Punktes von einer Ebene in einer beliebigen Richtung, so ist nach Binet $\iiint p^2 dm$ das Moment des Körpers in Bezug auf die Ebene und die gegebene Richtung. Zu einer Ebene conjugirt heifst die Richtung, für welche das Integral ein Maximum wird. Durch einen Punkt des Körpers gehen unendlich viele Tripel conjugirter Axen, die zugleich Tripel conjugirter Durchmesser einer Fläche zweiter Ordnung sind. Jeder Strahl eines Tripels ist zu der Ebene aus den beiden anderen conjugirt. Unter diesen Tripeln giebt es im allgemeinen nur eines aus drei auf einander senkrechten Strahlen, den Trägheitsaxen des Punktes. Setzt man die Masse des Körpers gleich 1, bezieht ihn auf den Schwerpunkt und dessen Hauptträgheitsaxen, so ist

$$\frac{a^2}{t-A}+\frac{b^2}{t-B}+\frac{c^2}{t-C}=1$$

die Gleichung für die Momente des Körpers in Bezug auf die Ebenen aus den Trägheitsaxen des Punktes a, b, c, wobei A, B, C die analoge Bedeutung für den Schwerpunkt haben. Soll eine der Wurzeln constant bleiben, so bewegt sich a, b, c auf einer Fläche zweiten Grades, und ihre Tangentialebene bleibt die zugehörige Ebene des orthogonalen Trieders. Bei dieser Gelegenheit bemerkt Binet (S. 59), dafs drei durch einen Punkt hindurchgehende Oberflächen des Systems sich unter rechtem Winkel schneiden müssen. Er wirft sodann die Frage auf, unter welchen Umständen seine Gleichung zwei einander gleiche Wurzeln liefern könne. Dies ist nur bei einem Punkte eines Grenzkegelschnittes der Fall. Er besitzt unendlich viele in einer Ebene liegende Hauptträgheitsaxen und eine aufserhalb derselben.

6. Das Resultat, dafs die Hauptträgheitsaxen eines Körpers zugleich die Normalen eines Systems confocaler Flächen zweiter Ordnung sind, hat Ampère in einer schon gelegentlich erwähnten Abhandlung**) in schöner Weise ergänzt. Durch einen gegebenen Punkt gehen Trägheitsaxen auch anderer Punkte hindurch. Dieselben gehören einem Kegel an, der zwei Tripel orthogonaler Strahlen, die Trägheitsaxen des Punktes und die Parallelen zu denen des Schwerpunktes, aufserdem den Schwerpunkt des Körpers enthält. (S. 99).

*) Binet, Mémoire sur la théorie des axes conjugués et des momens d'inertie des corps (lu à l'Institut, en Mai 1811), Journ. de l'éc. pol., Heft 16, 1813, S. 41—67.

) Vgl. VIII, 7.

Alle vom Schwerpunkt ausgehenden Strahlen, alle Geraden der Coordinatenebenen, endlich alle Parallelen zu den Axen, die durch die Trägheitsaxen des Schwerpunktes festgelegt sind, kann man als Trägheitsaxen ansehen. Für einen Punkt in einer Coordinatenebene zerfällt der Kegel in diese selbst und in eine zu ihr senkrechte Ebene. Die Spur der letzteren ist die Normale des mit dem Grenzkegelschnitt ähnlichen und concentrischen Kegelschnittes, der durch den gegebenen Punkt hindurchgeht. Der Ort des Angriffspunktes der Trägheitsaxe ist ein Kreis (S. 126), dessen Mittelpunkt der Normale angehört, und der sich im Einklang mit Binet's Resultat auf den Punkt selbst reducirt, sobald derselbe dem Grenzkegelschnitt angehört. (S. 137.) Für einen beliebigen Punkt einer Coordinatenebene sind die beiden in ihr liegenden Hauptträgheitsaxen zwei conjugirte senkrechte Strahlen des Grenz-Kegelschnitts. (S. 121 ff.). Ampère führt die beiden zu einander orthogonalen Kreisbüschel ein, welche durch die reellen und die imaginären Brennpunkte des Kegelschnittes hindurchgehen, und zeigt, dafs sie auf Neben- und Hauptaxe Punktepaare ausschneiden, die auf den erwähnten Strahlenpaaren liegen. Man sieht in den Untersuchungen von Ampère und Binet einen grofsen Teil der schönen Entwickelung Chasles'*) über die Brennpunkteigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung schon vorgebildet. Ich komme hierauf im dritten Teil genauer zurück und werde bei dieser Gelegenheit mich auch mit der Frage zu beschäftigen haben, inwieweit die Theorie des Axencomplexes der Oberflächen zweiter Ordnung durch die Untersuchungen von Binet, Ampère und Chasles als begründet anzusehen ist.

XI. Polarentheorie. Die Oberflächen, welche zwei Kegelschnitte gemein haben.

1. Über die Polareigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung habe ich schon in dem entsprechenden Abschnitt der Kegelschnittlehre das Hauptsächlichste mitgeteilt. Schon Monge**) war zu dem Resultat gelangt, dafs eine Fläche $(m-1)$ter Ordnung die Berührungspunkte aller einen Punkt enthaltenden Tangenten einer Fläche m-ter Ordnung ausschneidet, dafs demnach die Berührungscurve jedes einer Oberfläche zweiter Ordnung umschriebenen Kegels eine ebene Curve, also ein Kegelschnitt ist, dafs deshalb von einer Geraden zwei Tangentialebenen ausgehen und die Ebene der Berührungscurve sich um eine bestimmte Gerade dreht, während die

*) Chasles, Aperçu historique, Paris 1837, S. 384—399.
**) Monge, Feuilles d'analyse etc., 1801, (Nr. 5).

Spitze des umschriebenen Kegels eine andere Gerade durchläuft. Wird nun die Spitze über eine beliebige ebene Curve geführt, so umhüllt die Berührungsebene einen Kegel, der vom zweiten Grade ist, wenn es sich um einen Kegelschnitt handelt. Bleibt die Ebene zu sich selbst parallel, so durchläuft dieser Drehpunkt einen Durchmesser etc. Bewegt man den Punkt über eine zur gegebenen coaxiale Oberfläche zweiter Ordnung, so umhüllt die Berührungsebene ebenfalls eine derartige Fläche. Diese letzteren Erweiterungen rühren von Livet her.*) Ferner wurde angeführt (V, 5), dafs Brianchon den Satz von der Polare eines Kegelschnittes in sehr annehmbarer Weise bewiesen hat. Auf den Raum überträgt er seine Betrachtung in folgender Weise. Zieht man von einem Punkte P aus drei Strahlen a, b, c, die der Oberfläche in A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 begegnen, so bilden die Punkte $(A_1 B_2, A_2 B_1)$; $(A_1 B_1, A_2 B_2)$; ... die Ecken eines vollständigen Vierseits. Die Ebene desselben trennt mit P zusammen A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2 harmonisch. Sie enthält deshalb die Polaren des Punktes P hinsichtlich der Kegelschnitte in den Ebenen ab, ac und mithin die Schnittlinie der Tangentialebenen der Oberfläche in A_1 und A_2. Wie man auch b und c verändert, so bleibt die Ebene unveränderlich, da sie durch den vierten harmonischen Punkt hinsichtlich A_1, A_2 und die Schnittlinie der Tangentialebenen festgelegt ist (Nr. XI).

Diese Ebene enthält nun offenbar die Berührungspunkte aller von P ausgehenden Tangenten, ferner die Spitzen jedes umschriebenen Kegels, dessen Berührungebene den Punkt P enthält; im Sinne des Continuitätsprincips folgt also, dafs die Berührungsebene sich um einen Punkt dreht, wenn die Spitze des Kegels sich in einer Ebene bewegt, und zwar, wenn die Ebene einen reellen Kegelschnitt mit der Fläche gemeinsam hat, um die Spitze des längs dieser Ebene umschriebenen Kegels. Wie bereits bemerkt, folgert Brianchon auf rechnendem Wege, dafs die Polarebene, sobald der gegebene Punkt über eine Oberfläche zweiter Ordnung geführt wird, eine Oberfläche zweiter Ordnung umhüllt, und dafs die Polarebenen ihrer Punkte wiederum Tangentialebenen der ersten Fläche sind.**) Wie ebenfalls bereits hervorgehoben wurde, überzeugte sich Gergonne auf analytischem Wege, dafs die Berührungsebenen aller umschriebenen Kegel, deren Spitzen in einer Ebene liegen, in einem Punkte, dem „Pol" der Ebene, zusammenlaufen, dafs diese Ebene zugleich die Berührungscurve des vom Pol ausgehenden Tangenten-

---

*) Livet, Du contact des surfaces coniques avec les surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 4, 1805, S. 75—76. Vgl. Journ. de l'éc. pol., Heft 13, 1806, S. 284—296.

**) Brianchon, Sur les surfaces etc., Journ. de l'éc. pol., Heft 13, 1806, S. 297—311.

kegels enthält*); es sei ferner an Lamé's Entwickelung erinnert (V, 8). Desargues giebt bereits eine Andeutung über die Polarentheorie der Oberflächen zweiter Ordnung.**)

2. Mit den Polareigenschaften nahe verwandt ist eine andere Reihe von Sätzen über umschriebene Tangentialkegel. Irgend zwei dieser Kegel durchdringen sich nämlich, anstatt in einer zusammenhängenden Curve, in zwei verschiedenen Kegelschnitten. Andererseits liegen zwei ebene Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung stets auf zwei verschiedenen Kegeln zweiter Ordnung. Der erste Satz läſst sich sofort auf umschriebene Oberflächen übertragen. Die Sätze sind unmittelbar anschaulich, wenn die beiden Berührungscurven sich in zwei reellen Punkten A_1 und A_2 begegnen, in denen die Flächen die Tangentialebenen gemein haben müssen. Eine durch $A_1 A_2$ hindurchgehende Ebene schneidet daher im allgemeinen zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte, sobald sie durch einen gemeinschaftlichen Punkt der Flächen gelegt wird, einen und denselben Kegelschnitt aus beiden heraus. Dies kann man auf zwei einander in zwei Punkten L, M berührende Oberflächen ausdehnen unter der erst sehr viel später erkannten Einschränkung, daſs die Gerade LM nicht beiden Flächen zugleich angehört. Andererseits berühren zwei Kegelschnitte in verschiedenen Ebenen, sobald sie zwei Punkte gemein haben, in diesen auch zwei bestimmte Ebenen. Legt man durch die Schnittlinie l der beiden Tangentialebenen eine Ebene, welche die Kegelschnitte in A, A_1 bez. B, B_1 treffen möge, so sind die Schnittpunkte von l mit AB und AB_1 die Spitzen zweier Kegel, denen beide Kegelschnitte zugleich angehören. Diese Reihe von Betrachtungen nimmt bei Poncelet einen bedeutenden Platz ein. Nach dieser Richtung bewegt sich auch ein Teil der Sätze in der ersten von Steiner***) veröffentlichten Arbeit. Steiner führt wohl zuerst die Beschränkung ein, daſs zwei sich doppelt berührende Kegel sich in reellen Kegelschnitten nur dann treffen, wenn sie demselben Ebenenwinkel eingeschrieben sind.

Auf Grund des Continuitätsprincips kann man zwei Kegelschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung stets als Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen reellen oder ideellen Punkten, zwei einer dritten umschriebene Oberflächen zweiter Ordnung als Oberflächen mit zwei reellen oder ideellen gemeinsamen Tangentialebenen ansehen und auf diese Weise die oben angeführten Lehrsätze ohne weiteres als richtig annehmen. Ursprünglich sind dieselben jedoch von Monge, der sie zuerst

*) Gergonne, Théorie analytique etc., Gerg. Ann., Bd. 3, 1812 u. 1813, S. 293—302.

**) Brouillonproject, Ed. Poudra, Bd. 1, S. 214.

***) Steiner, Einige geometrische Sätze, Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 38—52, Ges. W., Bd. 1, S. 1—16 (§§ 7 und 8).

aufstellte, offenbar auf analytischem Wege gefunden worden.*) Zwei Oberflächen zweiter Ordnung haben, wie er ausführt, ein gemeinschaftliches Tripel conjugirter Durchmesser, wenn sie concentrisch sind, im allgemeinen Fall zwei Systeme paralleler conjugirter Durchmesser. Berühren sie sich in zwei Punkten, so ist die Verbindungslinie der beiden Punkte zu zwei Durchmessern dieser Tripel parallel, die beiden anderen Paare hingegen liegen in der Ebene, welche die Mitte der Berührungssehne mit der Schnittlinie der Tangentialebenen verbindet. Monge stellt nun erst, offenbar unter Zugrundelegung dieses Coordinatensystems, den Satz auf, daſs zwei Oberflächen zweiter Ordnung sich allemal in zwei Kegelschnitten durchdringen, sobald sie einander in zwei Punkten berühren oder einer und derselben dritten Oberfläche umschrieben sind. Im letzteren Falle gehen die Schnittebenen durch die Schnittlinie der Berührungsebenen, im ersten Fall durch die Verbindungslinie der Berührungspunkte. Umschriebene Kegel haben ihre Spitzen auf einer Geraden, sobald die Berührungscurve durch zwei Punkte der Oberfläche hindurchgeht. Nachdem Monge**) einen sehr speciellen Fall seines Satzes von den beiden umschriebenen Oberflächen analytisch erwiesen hatte, gab Chasles***) eine Erörterung dieser Theoreme. Den zweiten Teil des Satzes erkennt er freilich ebensowenig wie Monge als einen Specialfall des ersten Satzes, sondern begründet ihn auf folgende Art. Berühren zwei Kegelschnitte einen und denselben dritten in je zwei Punkten, so hat der Schnittpunkt der Berührungssehnen für alle drei dieselbe Polare und ist daher der Kreuzungspunkt zweier gemeinschaftlichen Sehnen der ersteren. (S. 338.) Da diese Anordnung für jeden Schnitt der gegebenen Oberflächen eintritt, so haben die beiden umschriebenen Oberflächen zwei ebene Curven, also zwei Kegelschnitte, mit einander gemein, deren Ebenen durch die Schnittlinie der Berührungsebenen hindurchgehen.

3. Der Satz, daſs zwei Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung auf zwei verschiedenen Kegeln liegen, und daſs die zugehörigen Tangentialkegel sich in zwei ebenen Curven durchdringen, ist mehrfach Gegenstand der Behandlung gewesen. Bei der Kugel ist der erste Satz eine Folge des Theorems von der Sectio subcontraria. Werden zwei Kugelkreise von der Ebene, die ihre Mittelpunkte mit dem der Kugel verbindet, in A_1, A_2; B_1, B_2 geschnitten, und ist

*) M. Monge doit publier etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 3, 1811, S. 319—323.

**) Théorème: Lorsque deux surfaces etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 3, 1816, S. 299—302 (article de M. Monge).

***) Chasles, Démonstration des théorèmes sur les surfaces du second degré, énoncés par M. Monge etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 3, 1816, S. 328—340.

S der Schnittpunkt der Geraden A_1B_1, A_2B_2, so sind SA_1A_2 und SB_2B_1 ähnliche Dreiecke, und der eine Kreis ist daher eine Sectio subcontraria des Kegels, den der andere an der Spitze S bestimmt. Diese von Hachette herrührende Entwickelung*) kann mit Leichtigkeit durch affine Transformation auf das Ellipsoid übertragen werden. Hachette thut dies in dem Specialfall, dafs der eine Kreis unendlich klein wird, um, wie wir sehen werden, zu einer Erweiterung der stereographischen Projection zu gelangen. Den allgemeinen Satz überträgt Chasles auf das Ellipsoid.**) Die Transformation

$$X = \frac{a}{\theta}x,\ Y = \frac{b}{\theta}y,\ Z = \frac{c}{\theta}z$$

führt die Kugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = \theta^2$$

in das Ellipsoid

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

über, der umschriebene Kegel geht in einen umschriebenen Kegel des Ellipsoids über; der letztere hat also, wie bei der Kugel, eine ebene Berührungscurve, zwei Schnitte des Ellipsoids liegen, ebenso wie die entsprechenden Kreise, auf zwei Kegeln, u. s. w. (S. 326—328). Für die Oberfläche im allgemeinen schlägt Chasles***) zur Begründung etwa folgenden Weg ein. Nachdem er den Satz von der Polarebene genau so, wie es bei Brianchon geschildert wurde, gewonnen hat, ergiebt sich unmittelbar, dafs ein Kegel, der einen ebenen Schnitt der Oberfläche projicirt, noch einen zweiten Kegelschnitt mit der Fläche gemein hat (S. 13). Sind nämlich B_1, C_1 zwei Punkte des gegebenen Kegelschnittes, B_2, C_2 die zweiten Schnittpunkte von SB_1 und SC_1, so treffen sich B_1C_1 und B_2C_2 auf der Polarebene von S. Dreht man B_1C_1 um einen Punkt $\mathfrak{Q}_1$, so dreht sich B_2C_2 um den Punkt $\mathfrak{Q}_2$, der mit ihm Pol und Polare harmonisch trennt, so dafs B_2C_2 einer bestimmten Ebene angehört. Es seien nun R_1, R_2 die Spitzen zweier Kegel, die einer Oberfläche zweiter Ordnung längs zweier Kegelschnitte K_1, K_2 umschrieben sind, B_1, C_1; B_2, C_2 die Schnittpunkte der letzteren mit einer durch R_1 und R_2 gelegten Ebene, S und S' die R_1R_2 angehörigen Schnittpunkte (B_1B_2, C_1C_2) und (B_1C_2, B_2C_1). Da die Polarebene von S den Punkt S' mit der Schnittlinie der Kegelschnittebenen verbindet, so wird nach dem vorigen Satz von S aus und ebenso von S' aus K_1 in

---

*) Hachette, Supplément de la géométrie descriptive, Paris 1812, (S. 55, art. 64).

**) Chasles, Propriétés des diamètres de l'ellipsoide, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 3, 1816, S. 302—328.

***) Chasles, Propositions relatives aux Courbes et aux Surfaces du second degré, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 11—17.

K_2 projicirt. Zugleich folgt, dafs die beiden umschriebenen Kegel in den beiden Polarebenen von S und S' einander treffen (S. 14).

Durrande*) folgert die beiden Sätze, ohne die Polareigenschaften der Oberfläche zweiter Ordnung vorauszusetzen, aus dem Satz vom eingeschriebenen Viereck und dem umgeschriebenen Vierseit eines Kegelschnitts. S und S' bleiben, wie auch die Ebene durch $R_1 R_2$ gelegt ist, ungeändert, weil sie sowohl R_1, R_2 als auch die Ebenen der Kegelschnitte harmonisch trennen. Hieraus wird eine metrische Bestimmung beider Punkte abgeleitet. Für die Kugel hat, wie wir sehen werden, Dandelin einen höchst originellen Beweis aus den Fundamentaleigenschaften der stereographischen Projection abgeleitet.**) Quetelet schliefst die Unveränderlichkeit der Punkte S und S' daraus, dafs die Tangenten der Kegelschnitte in B_1 und B_2 sich schneiden. Die Geraden $B_1 B_2$ sind daher die Erzeugenden einer abwickelbaren Fläche und müssen deshalb, da sie alle eine Gerade treffen, an einer Stelle zusammenlaufen.***)

Bekanntlich können, sobald die beiden Kegelschnitte zwei reelle Punkte gemein haben, die beiden Kegel imaginär werden, aber freilich nur, wenn man es mit einer geradlinigen Fläche zu thun hat. Indes wird diese Bemerkung in keiner der citirten Schriften gemacht.

XII. Die Aufgabe, zu drei Schnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung einen berührenden Kegelschnitt zu finden. Die stereographische Projection bei Oberflächen zweiter Ordnung.

1. An die eben erörterten Sätze hat man sofort eine Überlegung geknüpft, ähnlich derjenigen, die Monge auf den Satz von den Ähnlichkeitsaxen dreier Kreise geführt hatte.†) Es handele sich um die gemeinsamen Tangentialebenen dreier Kugeln K_1, K_2, K_3. Man umschreibe etwa K_1 und K_2 den Tangentialkegel mit der Spitze S_3, K_1 und K_3 den Tangentialkegel mit der Spitze S_2 und lege nun von $S_2 S_3$ aus an K_1 die Tangentialebenen. Da jede von ihnen die beiden Kegel längs einer Mantellinie und folglich auch die Kugeln K_2 und K_3 berührt, so sind sie die gesuchten Ebenen und müssen daher auch einen der beiden Kegel berühren, die K_2 und K_3 zugleich umschrieben sind. Die Spitzen der sechs umschriebenen Kegel sind daher die Ecken eines vollständigen

*) J. B. Durrande, Démonstration du théorème etc., Gerg. Ann., Bd. 13, 1822 u. 1823, S. 305—313.

**) Dandelin, Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 11—47.

***) Quetelet, Démonstration d'un théorème fondamental des projections stéréographiques, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 12—14.

†) Monge, Géométrie descriptive, Paris 1799, S. 53 (§§ 42 ff.).

Vierseits. Man kann dies, indem man die Centralebene einführt, auf die Tangentenpaare anwenden, die je zwei von drei Kreisen berühren, und kann ferner analoge Sätze für ein System von vier Kugeln aussprechen. Monge erhält hier die Ebene aus den sechs äufseren, ferner die vier weiteren Ebenen aus drei äufseren und drei inneren Ähnlichkeitspunkten. Die Ähnlichkeitsebenen aus zwei äufseren und vier inneren Ähnlichkeitspunkten hingegen sind ihm entgangen.

2. Aus genau den analogen Gründen bilden nun die Spitzen α, α'; β, β'; γ, γ' der sechs Kegel ein vollständiges Vierseit, die drei beliebige Schnitte A, B, C einer Oberfläche zweiter Ordnung paarweise verbinden. Die beiden Tangentialebenen, die sich von $\beta\ \gamma$ aus etwa an A legen lassen, berühren die beiden Kegel βA und γA längs je einer Mantellinie, berühren deshalb auch B und C und einen der Kegel, die B und C zugleich enthalten. Die sechs Spitzen liegen also auf vier Geraden, die man mit $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta'\gamma'$, $\beta\gamma'\alpha'$, $\gamma\alpha'\beta'$ bezeichnen kann. Hieraus ergiebt sich eine natürliche Lösung des Problems des Apollonius auf der Oberfläche zweiter Ordnung. Die acht Tangentialebenen, welche A aus den vier Geraden erhält, schneiden offenbar acht Kegelschnitte aus, welche die drei gegebenen Kegelschnitte berühren. Chasles*) und Olivier**) haben diese Betrachtung ziemlich gleichzeitig angestellt. Der letztere beschränkt sich zunächst auf den Fall der Kugel***), ist aber später mehrfach auf die Relationen unter den sechs Kegeln zurückgekommen, die sich aus drei Schnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung ergeben.†) Ich füge hier eine Lösung bei, die Durrande von demselben Problem gegeben hat. Man suche zu den gegebenen Kegelschnitten die Tangentialkegel, lege von irgend einem ihrer acht Schnittpunkte aus den Tangentialkegel an die Fläche, so wird die Berührungscurve alle drei Kegelschnitte berühren, da der neue Kegel die drei ersteren berührt. Es ist dies offenbar die duale Form der früheren Lösung.††)

3. Nimmt man noch einen Hülfskegelschnitt D hinzu, so ergeben

*) Vgl. die schon wiederholt erwähnte Notiz: Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 17.

**) Olivier, Solution d'un problème de géométrie, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 10; Nouv. Bull. d. sc., par la Soc. Philomatique de France, Bd. 3, 5e année, 1812, S. 312.

***) Carnot hatte diese specielle Aufgabe rechnend gelöst mit Hülfe der Beziehung zwischen den sechs Seiten eines vollständigen sphärischen Vierseits: Géométrie de position, Paris 1803, S. 415.

†) Olivier, Aufsätze verschiedenen Titels, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 126—133, 187—196; Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 9—18, 96—106, 228—233; Bull. de Férussac, Bd. 11, 1829, S. 1—7.

††) J. B. Durrande, Recherche de la ligne du second ordre qui en touche trois autres données, sur une surface du même ordre, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 27—30.

sich mancherlei neue Lösungsarten. Drei Kegel, die D mit A, B, C verbinden, haben noch zwei Schnittpunkte mit einander gemein. Projicirt man von ihnen aus D auf die Oberfläche, so erhält man augenscheinlich ein Paar von Kegelschnitten, die A, B, C berühren. Dies führt zu einer eleganten Lösung der projectiv verallgemeinerten Aufgabe des Apollonius, wenn man die Fläche in ein Ebenenpaar ausarten läfst, A, B, C in der einen, D in der anderen Ebene annimmt und selbstverständlich alle vier Kegelschnitte durch dieselben beiden Punkte hindurchgehen läfst. Dieser Gedanke ist, freilich mehrere Jahrzehnte später, auf zwei Arten auf den Fall dreier Kreise angewendet worden, von Darboux*), indem der Kegelschnitt D mit dem unendlich fernen Kreis identificirt wurde, von Fiedler**), indem die Aufgabe cyklographisch gelöst wurde, als Kegelschnitt D der unendlich ferne Kegelschnitt eintrat, welchen die unter 45^0 gegen die Horizontalebene geneigten Rotationskegel mit einander gemein haben. Bei Darboux haben wir als „foyer" $\mathfrak{A}$ des Kreises mit dem Mittelpunkt A und dem Radius a den Punkt zu betrachten, der nach der einen oder anderen Seite im Abstand $a \,.\, i$ senkrecht über A liegt. Die Mittelpunkte der $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ enthaltenden Nullkugeln repräsentiren paarweise die acht Lösungen des Problems, bei Fiedler hingegen sind die cyklographischen Darstellungen der Kreise Punkte, die in den Abständen $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$ über den Mittelpunkten liegen. Irgend drei von den Hülfskegeln schneiden sich in den cyklographischen Darstellungen zweier gesuchten Kreise. Darboux, wie Fiedler, um dies hier gleich zu erledigen, betrachten auch die Kreise, welche einen gegebenen unter einem und demselben Winkel schneiden. Bei Darboux liegen ihre „foyers" auf zwei Kugeln, welche durch den gegebenen Kreis hindurchgehen. Durchläuft also der repräsentirende Raumpunkt einen Kreis, so stellt er Kreise dar, welche jeden Kreis eines bestimmten Büschels unter einem und demselben Winkel schneiden. Diesen Büschel schneiden die Kugeln aus, welche den gegebenen Kreis enthalten. Hieraus folgen Lösungen der Aufgabe, einen Kreis zu suchen, der drei gegebene unter vorgeschriebenen Winkeln, vier gegebene Kreise unter gleichen Winkeln schneidet etc. Bei Fiedler stellt ein gleichseitiges Hyperboloid durch einen gegebenen Kreis cyklographisch die Kreise dar, die ihn unter einem gegebenem Winkel schneiden; die ebene Schnittcurve zweier gleichseitiger Hyperboloide stellt die Kreise dar, welche an zwei gegebenen

*) Darboux, Sur les relations entre les groupes de points, de cercles et de sphères dans le plan et dans l'espace, Ann. de l'éc. norm., Serie II, Bd. 1, 1872, S. 323—392. (Vgl. die Nummern VII, XV—XVIII.)

**) Fiedler, Vom Schneiden der Kreise unter bestimmten reellen und nicht reellen Winkeln, Vierteljahrschr. d. Züricher Naturf. Gesellsch., Bd. 26, 1881, S. 86—89. Vgl. auch Geometrische Mitteilungen, ibidem, Bd. 24, 1879, S. 145—226 (S. 204ff.).

gleiten und jeden Kreis des Büschels, den diese bestimmen, unter einem bestimmten Winkel schneiden etc.

4. Kehren wir nach dieser Abschweifung in die neuere Zeit zu unserer ursprünglichen Anordnung zurück, so ergiebt sich noch eine zweite Art, von dem räumlichen Problem aus auf die Aufgabe des Apollonius zu kommen. Eine Ebene, welche zu der von D parallel ist, schneidet nämlich drei D mit A, B, C verbindende Kegel in zu D ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten. Die acht ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitte, die alle drei zugleich berühren, können mit D durch Kegel verbunden werden, die paarweise die A, B, C zugleich berührenden Kegelschnitte ausschneiden. Man kann nun, um die Zweideutigkeit der Lösung zu vermeiden, D in einen unendlich kleinen Kegelschnitt ausarten lassen und hat alsdann den Satz: Von einem beliebigen Punkt einer Oberfläche zweiter Ordnung aus werden alle Schnitte derselben in ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte projicirt, sobald man die Projectionsebene parallel zur Tangentialebene des Punktes wählt. Man erhält Kreise als Projectionen der Schnitte, sobald ein Nabelpunkt der Oberfläche als Projections-Centrum gewählt wird. Chasles*), der diese Entwickelung gegeben hat, fügt noch eine Ergänzung hinzu, durch welche ein von ihm 1817 anscheinend nur für die eigentliche stereographische Projection begründeter Satz seine naturgemäfse Erklärung findet. Die Spitzen der A und D verbindenden Kegel, ferner die Pole ihrer Ebenen, die Spitzen der längs A und D der Fläche umschriebenen Kegel liegen auf einer Geraden, welche auch die Pole der Kegelschnitte A und D hinsichtlich der Schnittlinie ihrer Ebenen enthält (da sie zu dieser Geraden polarreciprok ist). Läfst man nun D in einen Punkt ausarten, so wird die Gerade zugleich der Ort der Mittelpunkte der zur Tangentialebene in D parallelen Schnitte des Kegels, enthält also auch den Mittelpunkt der stereographischen Projection des Kegelschnittes A. Um also den Mittelpunkt der stereographischen Projection eines Kegelschnittes zu erhalten, hat man den Pol seiner Ebene von dem festen Punkt aus zu projiciren. Eine ganz analoge Behandlung des Gegenstandes hat Dandelin ungefähr gleichzeitig und unabhängig von Chasles gegeben.**) Eine Ergänzung dieses Satzes giebt Chasles***) in folgendem Theorem: „Die Flächen zweiter

*) Chasles, Mémoire sur les projections stéréographiques, et sur les coniques homothétiques, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 305—320. Die Zurückführung der körperlichen Aufgabe auf das Problem des Apollonius findet sich bereits in der oft citirten Abhandlung: Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 16.

**) Dandelin, Propriétés projectives des courbes du second degré, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 9—12.

***) Chasles, Recherches sur les projections stéréographiques etc., Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 157—175 (S. 158).

Ordnung, welche eine gegebene längs eines Kegelschnittes berühren, haben zu stereographischen Umrissen ein System concentrischer, ähnlicher und ähnlich gelegener Kegelschnitte, zu denen auch das stereographische Bild des Berührungskegelschnittes gehört". Ich werde auf diese Abhandlung nochmals zurückkommen. Endlich bringt Chasles diese Reihe von Entwickelungen zum Abschlufs durch die Bemerkung, dafs alle Tangentialkegel, die von einem Oberflächenpunkt an andere ihr eingeschriebene Flächen sich legen lassen, die reellen oder nicht reellen Geraden der Fläche mit einander gemein haben, welche von dem betreffenden Punkte ausgehen, und dafs aus diesem Grunde ihre Schnitte mit einer zur Tangentialebene parallelen Ebene ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sind.*) Steiner**) ist offenbar früher als Chasles im Besitz der obigen Entwickelung gewesen. Er deutet sie in der Fufsnote einer 1826 erschienenen Abhandlung an und stellt zum Schlufs den Satz über die Bestimmung des Mittelpunktes der stereographischen Projection auf.

5. Alle diese Abhandlungen gehören eigentlich in die zweite der Zeit-Epochen, die ich mir gesteckt habe; sie sind vorweg genommen worden, weil in mehreren Abhandlungen, die ich jetzt anführen will, der Übergang von der gewöhnlichen Kugel-Abbildung zu der der Oberflächen zweiter Ordnung vollzogen wird. Die älteste Arbeit nach dieser Richtung stammt aus dem Jahre 1805.***) Legendre stellt hier den Satz auf: Die sämmtlichen Schnitte eines Rotationsellipsoids werden in Kreise projicirt, wenn man einen der Scheitel zum Projectionscentrum, die Äquatorebene zur Projectionsebene wählt. Dieser Lehrsatz wird von Fresnel†) analytisch bestätigt. Daviel††) findet auf rechnendem Wege, dafs dieselbe Eigenschaft nur Oberflächen zweiter Ordnung zukomme, und zwar müsse die Projectionsebene die eines Kreises sein, das Centrum aber einer der beiden Punkte, deren Tangentialebene zur Kreisebene parallel ist. In diese Klasse von Theoremen gehört der Satz von Hachette†††), nach dem die Projectionen aller Schnitte eines Paraboloids auf die

---

*) Chasles, Extrait d'une lettre sur les surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 294—295. Der oben angeführte Satz, jedoch nur für die Kugel, wird ohne Beweis von Bobillier mitgeteilt: Sur les propriétés projectives dans les surfaces du second ordre, ibidem, S. 152—153.

**) Steiner, Einige geometrische Entwickelungen, Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 161—184, 252—288. (Ges. W., Bd. 1, S. 73.) Man vergl. auch die oben [XII, 2] citirte Abhandlung (Ges. W., Bd. 1, S. 10).

***) Aux Rédacteurs de la Correspondance sur l'École polytechnique, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 4, 1805, S. 76. Der Brief ist mit L. G. (nach dem Autoren-Register Legendre) unterzeichnet.

†) Ibidem, S. 78—80.

††) Ibidem, S. 80—82.

†††) Hachette, Du Plan tangent à l'hyperboloide à une nappe, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 4, 1812, S. 329—330.

Tangentialebene im Scheitel ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte sind.

Für das Ellipsoid hat Hachette*) in sehr geistreicher Weise den Daviel'schen Satz abgeleitet. Man unterziehe den Raum einer affinen Transformation in der Art, daſs die senkrechte Entfernung eines Punktes von einer Ebene vom Fuſspunkt aus in einer neuen festen Richtung aufgetragen wird. Man nehme nun bei einer Kugel, die ihren Mittelpunkt auf der Ebene hat, die Gesetze der stereographischen Projection als richtig an, so werden alle Kreise der Kugel in Kreise der gegebenen Ebene projicirt, wenn man den höchsten Punkt der Kugel als Projections-Centrum wählt. Bei der affinen Transformation geht aber das Centrum in einen Nabelpunkt über, der projicirende Kegel in einen projicirenden Kegel, der mit dem gegebenen die Horizontalspur gemein hat, das heiſst, alle Schnitte eines Ellipsoids werden in Kreise projicirt, wenn das Centrum ein Nabelpunkt, die Ebene ein Kreis der zugehörigen Schar ist.

Ich breche hier ab, um im Schluſsabschnitt des ersten Teils die eigentliche stereographische Projection näher in's Auge zu fassen.

Dritter Abschnitt.

Kreis- und Kugel-Lehre.

XIII. Die stereographische Projection.

1. Bereits den Alten war das Gesetz bekannt, daſs die Kreise einer Kugel als Kreise in der Ebene abgebildet werden, wenn man dieselben von einem Punkt der Kugel aus auf eine Ebene projicirt, welche zu dem zugehörigen Durchmesser senkrecht steht. Nach dem Zeugnis des Bischofs Synesius von Cyrene**) ist der alexandrinische Astronom Hipparch als der Entdecker des Gesetzes zu bezeichnen. Es ist nicht genau festzustellen, zu welcher Zeit der „uralte Hipparch" des Synesius gelebt hat; auch ist wiederholt die Zuverlässigkeit der Angabe bezweifelt und der Meinung Ausdruck gegeben worden, daſs Ptolemäus als der Entdecker der Abbildung zu betrachten ist. Ich habe mich jedenfalls nur an die Thatsache zu halten, daſs Ptolemäus die erste Schrift über die Abbildung verfaſst hat, die, in arabischer Übersetzung er-

---

*) Hachette, Traité des surfaces du second degré, Paris 1813, S. 225—229.

**) Synesii Cyrenaei ad Paeonium sermo de astrolabio. Interprete Fed. Morelli: Migne, Patrologia graeco-latina, Bd. 66, Paris 1864, S. 1578—1588.

halten, schon im dreizehnten Jahrhundert äufserst mangelhaft von Jordanus in's Lateinische übersetzt wurde. Commandinus hat eine neue Übersetzung, wie auch eine neue Ausgabe der Jordanus'schen Übersetzung veranstaltet.*) Der Beweis, den Ptolemäus für die Haupteigenschaft giebt, pafst nur für die Kreise der Kugel, deren Inneres von der Axe durchbohrt wird. Wird ein Durchmesser OO_1 eines Kreises von einer Sehne AA_1 in P geschnitten, und projicirt man dieselbe von O aus auf das in P auf OO_1 errichtete Lot, so beweist Ptolemäus durch verschiedene Winkelvergleichungen, dafs die so erhaltenen Punkte B, B_1 mit O und O_1 in einem Kreise liegen. Beschreibt man über dem ersten Kreise die Kugel, die von dem Lot in P in den Punkten C, C_1 getroffen werde, so ist augenscheinlich

$$PO \,.\, PO_1 = PB \,.\, PB_1 = PC \,.\, PC_1,$$

d. h. die vier Punkte B, B_1, C, C_1 liegen auf einem Kreise. Unter der stillschweigenden Voraussetzung, dafs die Projection des Kreises ACA_1C_1 ein Kegelschnitt mit der Axe BB_1 ist, würde gezeigt sein, dafs sie mit dem Kreise BCB_1C_1 identisch ist (S. 20).

2. Für astronomische, noch mehr für astrologische Zwecke war von grofser Bedeutung der Besitz eines Astrolabiums, eines Abbildes einer Hälfte der Erdkugel mit Verzeichnung der Längen- und Breitengrade, der Ekliptik etc. Man bediente sich hierzu entweder der orthographischen, d. h. senkrechten Projection, oder ganz besonders der stereographischen Projection. Eine grofse Mannigfaltigkeit von Fällen ergab sich daraus, dafs man bald die Ebene eines Meridians, bald die des Äquators oder auch die der Ekliptik als Zeichenebene zu Grunde legte. Diese Verhältnisse werden z. B. von Ubaldo**), mit ungeheurer Breite von Clavius***), mit gröfserer Kürze von Aguilonius†), Tacquet††), Dechales†††) behandelt. Den Namen der Abbildung führte Aguilonius ein (S. 572). Der Beweis, dafs sich ein Kreis wiederum als Kreis darstellt, bleibt in allen diesen Schriften, wie überhaupt bis in die neuere Zeit hinein, stets derselbe. Ist auf einem Meridiankreis O der Pol, AB eine

*) Ptolemaei Planisphaerium, Jordani Planisphaerium, Federici Commandini Urbinatis in Ptolemaei Planisphaerium Commentarius etc., Venedig 1558.

**) Guidi Ubaldi e marchionibus montis Planisphaeriorum universalium theorica, Pisauri 1579.

***) Clavius, De Astrolabio, Rom 1590.

†) Aguilonius, Opticorum libri sex, Antwerpen 1613 (Liber VI, Propp. 96 ff.).

††) Tacquet, Opera mathematica, Antwerpen 1669 (Opticae liber III, de projectione astronomica, S. 178 ff.).

†††) Dechales, Cursus seu Mundus Mathematicus, Bd. 4, Lyon 1690 (Buch 3—5, S. 137 ff.).

beliebige Sehne, A_1B_1 ihre Projection auf den Durchmesser des Äquatorkreises, der sich in der Meridianebene findet, so ist aus Winkelvergleichungen überaus leicht zu ermitteln, dafs OAB und OB_1A_1 ähnliche Dreiecke sind. Errichtet man über den Durchmessern AB und A_1B_1 senkrecht zum Meridian Kreise, so ist der zweite eine Sectio subcontraria des Kegels, der den ersten Kreis von O aus projicirt und mithin die Projection eines Kugelkreises.

3. Ist M' der Mittelpunkt der Projection, M derjenige des gegebenen Kreises, so bildet nach einem Satz von Aguilonius OM mit AB denselben Winkel wie OM' mit A_1B_1. Also schneidet z. B. das vom Projectionspol aus auf die Ebene eines gröfsten Kreises gefällte Lot den Mittelpunkt des stereographischen Bildes aus (S. 585). Auch im allgemeinen Fall kann man aus Aguilonius' Regel mit Leichtigkeit zu Dandelin's oder Chasles's Regel übergehen, nach welcher der Pol der Ebene des Kugelkreises in den Mittelpunkt des stereographischen Bildes projicirt wird. In dem eben erwähnten Specialfall findet man die Regel auch in einer kleinen Abhandlung von Delambre*), für den Fall der zur Äquatorebene senkrechten Kreise in einer sehr trockenen Behandlung von Karsten**) mitgeteilt. Das allgemeine Theorem hat Chasles***) an mir unzugänglicher Stelle zuerst mitgeteilt.

4. Bekanntlich ist die stereographische Abbildung der Kugel in den kleinsten Teilen ähnlich. Man kann dieses Theorem aus dem oben mitgeteilten Satze von der Sectio subcontraria ableiten. OAB und OB_1A_1 bleiben ähnliche Dreiecke, wie sehr man auch A und B einander nähert, deshalb sind an der Grenze die Tangentialebene in A und die Projectionsebene gleich geneigt gegen den Strahl OA. Da beide auf der Meridianebene des Punktes A senkrecht stehen, so wird jedes durch OA gelegte Ebenenpaar gleiche Winkel auf beiden Ebenen ausschneiden; weiter wird ein durch Berührungspunkt A und Spurpunkt C_1 in der Bildebene begrenztes Stück einer Kugeltangente in eine Strecke A_1C_1 von gleicher Länge projicirt. Sind AC_1 und AD_1 zwei Tangenten in demselben Kugelpunkt, so sind AC_1D_1 und $A_1C_1D_1$ congruente Dreiecke, und es folgt nochmals die Gleichheit der Winkel bei A und A_1. Bereits der älteste Beweis des zweiten Hauptsatzes, der von Halley†),

---

*) Delambre, De la projection stéréographique, Mém. de l'Inst. nat. d. sc., Bd. 5, Paris 1804, S. 393—416.

**) Joh. Gustav Karsten, Lehrbegriff der gesamten Mathematik: Der siebende Teil: Die Optik und Perspectiv, Greifswald 1775, Abschn. 19—22, S. 696.

***) Chasles führt als Quelle an: Hachette, Géométrie à trois dimensions, Paris 1817. Man darf wohl annehmen, dafs er seinen damaligen Beweis in der Notiz „Sur une propriété de la projection stéréographique", Liouv. Journ., Bd. 7, 1842, S. 272 wiederholt hat.

†) Edm. Halley, An easy Demonstration of the Analogy of the

giebt mit einigen unnötigen Umschweifen die obige Entwickelung wieder; die zweite anschaulichere Form des Beweises findet sich bei Leadbetter*). Hachette hat sich mehrfach mit der Frage beschäftigt, er giebt erst den Beweis etwa mit den Worten, die ich gebraucht habe**), wählt aber später die Leadbetter'sche Form***). Auch hat Hachette für den Fall des Kreises die Auffassung des ersten Hauptsatzes, welche ich bei der Verallgemeinerung der stereographischen Projection geschildert habe†). Die Kegel, welche einen festen Kreis einer Kugel mit anderen Kreisen derselben verbinden, werden parallel zur Ebene des ersteren augenscheinlich in Kreisen geschnitten, und dies muſs bestehen bleiben, wenn man den festen Kreis unendlich klein werden läſst.

5. Zwei beliebige Kreise, mögen sie in einer Ebene oder auf einer Kugel liegen, schneiden sich in beiden Schnittpunkten unter gleichen Winkeln. Man kann deshalb den Winkel, unter dem sich zwei Curven auf der Kugel in A schneiden, in einem festen Punkte O an zwei Kreisen beobachten, welche O enthalten und in A die Curven berühren. Dieselben werden, wenn der erste Hauptsatz vorausgesetzt wird, in Kreise projicirt, die einen festen Punkt O_1 enthalten und die Abbilder der beiden Curven in A_1 berühren. Sobald also die Abbildung in O_1, O winkeltreu ist, bleibt jeder Winkel der Figur erhalten. Man kann auf diese Art den zweiten Hauptsatz leicht erweisen, denn die Kugel enthält Punkte, bei denen die winkeltreue Abbildung ganz augenscheinlich ist. Offenbar ist z. B. die Tangentialebene im Südpol, dem entgegengesetzten Punkt des Projectionscentrums, parallel zur Projectionsebene, jede

---

Logarithmic Tangents, to the Meridian Line etc., Phil. Trans. f. 1696, Bd. 19, 1698, S. 202—214. Halley beweist, daſs eine loxodromische Linie vom Pol aus in eine logarithmische Spirale projicirt wird. Hierzu gebraucht er das Lemma 1, daſs Kreise in Kreise projicirt werden und Lemma 2, daſs ein Winkel auf der Kugel in natürlicher Gröſse abgebildet wird. Nachdem er es, wie oben angedeutet, bewiesen, fügt er hinzu: This lemma I lately received from Mr. Ab. de Moivre though I since understand from Dr. Hook that he long ago produced the same thing before the society. However the demonstration and the rest of the discourse is my own.

*) Leadbetter, A complet system of Astronomy, Bd. II (Erste Auflage, 1723), Zweite Auflage, London 1742, S. 73. Eine vereinfachte Fassung des Leadbetter'schen Beweises giebt Delambre; vgl.: Histoire de l'astronomie au dix-huitième siècle. Publiée par M. Mathieu, Paris 1827, S. 88—92.

**) Hachette, de la Perspective d'une sphère etc., Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 9, 1808, S. 363—365. Hachette, Supplément de la géométrie descriptive, Paris 1812, (art. 69—70), S. 60.

***) Hachette, Einige Bemerkungen etc., Zusatz, Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 348. Wie Hachette anführt, rühren ähnliche Beweise von Lacroix, Puissaut, Delambre, Robertson her.

†) Hachette, Supplément etc., art. 67.

Kugeltangente in ihm also parallel zu ihrem Bilde. Aber andererseits kann man auch für Punkte des Äquators in sehr einfacher Weise dieselbe Eigenschaft nachweisen. Denn der Projectionsstrahl eines Äquatorpunktes schliefst mit der Äquator-Ebene, wie mit seiner Tangentialebene einen Winkel von 45^0 ein, liegt überdies in einer zu beiden senkrechten Ebene. Zwei durch diesen Projectionsstrahl gelegte Ebenen werden daher in beiden Ebenen gleiche Winkel ausschneiden, und es wird dann die obige Überlegung Platz greifen. Der erste Teil dieser Entwickelung, freilich ohne die daran sich knüpfende Folgerung, ist von Klügel*) gegeben worden.

6. Indessen auch der Projectionspunkt selbst besitzt die Eigenschaft der Winkelerhaltung, indem sein Bild in die unendlich ferne Gerade der Ebene zerstreut wird; zwei Curven, die durch den Pol hindurchgehen, werden in Curven projicirt mit zwei Asymptoten, die sich unter demselben Winkel schneiden. Zwei Kreise, die sich in dem Pol O und in einem anderen Punkte A schneiden, werden mithin in zwei Gerade projicirt, die denselben Winkel in A_1 mit einander bilden. Also ist, wie Dandelin folgert, die Abbildung winkeltreu**). Man lege jetzt von einem beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ aus die Tangenten $\mathfrak{P}A$, $\mathfrak{P}B$, $\mathfrak{P}C$, ... an die Kugel; sie projiciren sich von O aus in Kugel-Kreise, die den Punkt O selbst und den zweiten Schnittpunkt P von $O\mathfrak{P}$ enthalten und den Kreis ABC.. senkrecht schneiden. Dieser Kreisbüschel bildet sich als ein Strahlbüschel mit dem Mittelpunkt P_1 ab, der Kreis ABC.. in eine Curve, die alle seine Strahlen senkrecht schneidet, also in einen Kreis mit dem Mittelpunkt P_1. [S. 20]. Man sieht, jeder Kreis wird in einen Kreis, und, — das ist der dritte Hauptsatz —, der Pol seiner Ebene in den Mittelpunkt des letzteren projicirt. Chasles hat diesen Satz, wie oben angemerkt wurde [XIII, 3], schon 1817 gegeben.

7. Gerade aus diesem dritten Hauptsatz hat Dandelin merkwürdige Resultate gefolgert. Eine Ebene, welche die Pole der Ebenen zweier Kugelkreise A und B enthält, schneidet einen Kreis aus, der A und B orthogonal schneidet und also in einen Ortho-

*) Klügel, Geometrische Entwickelung der Eigenschaften der stereographischen Projection, Halle 1788. Der erste Hauptsatz wird von Klügel, wie gewöhnlich, aus dem Satz von der sectio subcontraria abgeleitet. Man vergleiche übrigens noch: Klügel, Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik etc., fortgesetzt von Mollweide, Bd. 4, Leipzig 1823, Artikel: Stereographische Projection. Der Artikel enthält eine geschichtliche Übersicht, die mir für das Obige von grofsem Nutzen gewesen ist.

**) Dandelin, Mémoire sur l'emploi des projections stéréographiques en géométrie, Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 11—47. Zwei Auszüge der Arbeit sind von Gergonne und Quetelet veröffentlicht worden: Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 322—327 und Quet. Corr., Bd. 1, 1825, S. 256—264, 316—322.

gonalkreis der Abbilder A_1 und B_1 projicirt wird. Die Linien, welche die Schnittpunkte auf A_1 mit denen auf B_1 verbinden, gehen durch die Ähnlichkeitspunkte von A_1 und B_1; projicirt man sie auf die Ebene des Kugelkreises zurück, so entstehen Gerade, die A und B zugleich treffen und zwei feste Punkte der Verbindungslinie ihrer Pole enthalten. Zwei Kugelkreise liegen daher stets auf zwei Kegeln, deren Spitzen bei stereographischer Projection in die Ähnlichkeitspunkte der Bilder übergehen [§ III]. Andererseits ist der Ort der Pole der Kugelkreise, die zwei gegebene, A und B, zugleich berühren, die Durchdringung der längs A und B umschriebenen Kegel; er wird also in den Ort der Mittelpunkte der Kreise projicirt, welche die Abbilder A_1 und B_1 zugleich berühren. Diese Projection zerfällt in zwei Kegelschnitte, deren Brennpunkte mit den Mittelpunkten von A_1 und B_1, den Projectionen der Spitzen der längs A und B umschriebenen Kegel, zusammenfallen. Also ergiebt sich: „Zwei einer Kugel umschriebene Kegel durchdringen sich in zwei Kegelschnitten. Ihre stereographischen Projectionen haben zu Brennpunkten die Projectionen der Kegelspitzen (S. 40). Artet der eine umschriebene Kegel in eine Tangentialebene aus, so wird ihr Berührungspunkt der eine Brennpunkt des Kegelschnittes, den sie aus dem umschriebenen Kegel herausschneidet; von seiner Spitze aus wird der Berührungspunkt der parallelen Tangentialebene in den zweiten Brennpunkt projicirt." Man kommt so auf Dandelin's schöne Bestimmung der Brennpunkte zurück.*)

8. Die Regel zur Bestimmung des Mittelpunktes der stereographischen Projection eines Kreises giebt ein leichtes Mittel, einen Kreis A so in einen Kreis A_1 zu projiciren, daſs ein Punkt innerhalb A in den Mittelpunkt von A_1 übergeht; man legt durch A eine Kugel, verbindet den Pol der Ebene von A mit dem gegebenen Punkt und projicirt stereographisch von einem Schnittpunkt dieser Geraden mit der Kugel. Dies benutzt Dandelin, wie ich bemerkt habe [II, 10], zum Beweise des Pascal'schen und Brianchon'schen Satzes.**)

XIV. Kreis- und Kugel-Verwandtschaft.

1. Die stereographische Projection erschlieſst sich dem Verständnis bekanntlich am leichtesten, wenn man sie einer Transformation des Gesammt-Raumes durch reciproke Radien einordnet. Betrachtet

*) In der S. 91** erwähnten Arbeit dehnt ihn Dandelin auf Rotationsflächen aus; der Beweis folgt, wie er anführt, aus den Gesetzen der stereographischen Projection.

**) In verwandter Richtung bewegt sich eine Abhandlung von Le François: De l'application des projections stéréographiques aux lignes du second ordre, Quet. Corr., Bd. 9, 1837, S. 161—180.

man auf allen von einem Punkt O ausgehenden Strahlen die Punktepaare A, A_1; B, B_1; C, C_1; ... als einander entsprechend, für die

$$OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = \cdots$$

ist, so wird bekanntlich jede durch O hindurchgehende Kugel in eine Ebene, jede andere Kugel wieder in eine Kugel verwandelt. Je nachdem das Product einen positiven oder einen negativen Wert besitzt, ist O der äufsere oder innere Ähnlichkeitspunkt der beiden Kugeln. Fermat*) hat dies Gesetz für den Raum ausgesprochen, nachdem Vieta**) es für den Fall der Ebene entwickelt hatte. Für den Fall zweier gleichen Kreise benutzt es Pappus***) in derselben Art wie Vieta, um einen Kreis zu zeichnen, der zwei gegebene von gleicher Gröfse ungleichartig berührt und einen Punkt enthält. Fermat benutzt die Thatsache, dafs die Schnittcurve zweier Flächen in die Schnittcurve der entsprechenden Flächen transformirt wird. Er macht davon freilich nur den indirecten Gebrauch, dafs, wenn eine Kugel in sich transformirt wird, eine berührende Kugel wieder in eine berührende Kugel umgeformt wird; die entsprechenden Schlüsse für die Ebene finden sich bei Vieta und Pappus.

2. Auch im allgemeinen Fall wird einem Kugelpaar ein Kugelpaar, d. h. einem beliebigen Kreise ein Kreis entsprechen. Man kann hieraus mit Baltzer folgern, dafs ein Kegel und eine Kugel, die einen gegebenen Kreis enthalten, sich in einem zweiten Kreise begegnen. Die Kugel ist hinsichtlich der Spitze des Kegels zu sich selbst invers. Dem ersten Kreise entspricht also eine zweite, ihr und dem Kegel angehörige Curve, die notwendig ein Kreis ist. Andererseits sind eine Ebene und eine Kugel zu einander invers, und zwar kann als Pol jeder der beiden Endpunkte des Durchmessers der Kugel betrachtet werden, der zur Ebene senkrecht steht. Jeder durch den Pol gelegte Kegel schneidet also auf Kugel und Ebene entsprechende Curven aus, und es wird deshalb jeder Kreis der ersteren in einen Kreis der letzteren projicirt.†) Die Kugel wird in jedem ihrer Kreise von einer zweiten Kugel senkrecht geschnitten, deren Mittelpunkt die Spitze des umschriebenen Kegels ist. Diese Kugel geht, wenn man das Gesetz der Winkel-Erhaltung voraussetzt, in die Kugel über, welche die Ebene in dem entsprechenden Kreise senkrecht

*) Varia opera mathematica D. Petri de Fermat, Tolosae 1679 (De contactibus sphaericis, S. 74—88).

**) Francisci Vietae Apollonius Gallus seu exuscitata Apollonii Pergaei περὶ ἐπαφῶν geometria ad v. c. Adrianum Romanum Belgam, Paris 1600.

***) Pappi collectionis etc. ed. Hultsch, Bd. 1, S. 195 (liber IV, Prop. 8).

†) Baltzer, Über eine Reihe von Sätzen, die Durchschnitte von Cylindern und Kegeln durch Kugeln betreffend, Crelle's Journ., Bd. 54, 1867, S. 162—169.

schneidet. Ihr Mittelpunkt, welcher mit dem des Kreises zusammenfällt, mufs mit dem der entsprechenden Kugel auf einem Projectionsstrahl liegen. Man erkennt somit das dritte Gesetz der stereographischen Projection — wie natürlich das zweite Gesetz — als einen Specialfall der Thatsache, dafs bei der Transformation durch reciproke Radien die Winkel ungeändert bleiben.*)

3. Aber gerade der umgekehrte Weg des natürlichen ist, wie sich sogleich zeigen wird, eingeschlagen worden. Man hat sich verhältnismäfsig sehr spät dazu entschlossen, das bei der Aufgabe des Apollonius auf einzelne Kreise angewendete Princip auf die Gesamtheit aller Kreise auszudehnen und neue Wahrheiten durch Übersetzung alter abzuleiten. Als einen ersten Schritt in dieser Richtung kann man Steiner's Untersuchungen über Kreis- und Kugellehre betrachten. Man kann ganz besonders auf die Art und Weise aufmerksam machen, in der er seinen schönen Schliefsungssatz über Kreisreihen beweist.**) Da er ferner ausdrücklich (S. 21) von der Lösung der Aufgabe spricht, drei Kreise durch einen vierten unter gegebenen Winkeln zu schneiden, und von der analogen räumlichen Aufgabe, so mufs entschieden angenommen werden, dafs das Gesetz der Winkel-Erhaltung ihm nicht blofs für den Fall der Berührung und des rechtwinkeligen Schneidens geläufig war. Ausdrücklich ausgesprochen hat er, soviel mir bekannt geworden, das allgemeine Gesetz nicht.

4. Projicirt man die Kugel von den Endpunkten eines Durchmessers aus auf eine zu ihm senkrechte Ebene, so entsteht offenbar eine Beziehung der Ebene in sich, bei der Kreise im allgemeinen in Kreise, wenn sie den Schnittpunkt des Durchmessers enthalten, in Gerade verwandelt werden. Dandelin hat diese Überlegung bei der Untersuchung einer speciellen bicircularen Curve dritter Ordnung, der „focale à noeud“, angestellt.***) Quetelet†) hatte als „Focale“ den Ort der Brennpunkte aller Schnitte eines Kegels bezeichnet, deren Ebenen auf einer Durchmesserebene senkrecht stehen und durch einen Punkt einer ihrer Mantellinien hindurchgehen. Aus dem Rotationskegel erhält man die „focale à noeud“, die Fufspunktcurve einer Parabel. Dandelin beobachtet nun, dafs die Kreise,

*) Diesen Beweis für den dritten Hauptsatz teilt P. Serret mit. Vgl.: Des méthodes en géométrie, Paris 1855, (S. 25).

**) Vgl. Nr. 22 (Ges. W., Bd. 1, S. 42) der oft citirten Abhandlung: Einige geometrische Betrachtungen, Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 161—184, 252—288.

***) Dandelin, Mémoires sur quelques propriétés remarquables de la focale parabolique, Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 2, 1822, S. 169—200.

†) Quetelet, Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali, Gandavi 1819. Die Abhandlung (Dissertation) ist mir nicht zugänglich geworden.

welche den Pol enthalten, in ähnlicher Beziehung zu seiner Curve stehen, wie die Tangenten zu einem Kegelschnitt. Es läfst sich z. B. aus sechs solchen berührenden Kreisen ein Sechsseit bilden, dessen Kreis-Diagonalen aufser in dem Pol der Curve sich in noch einem anderen Punkte schneiden. Er beobachtet, dafs bei der beschriebenen Transformation ein Kreis, wenn er den Pol enthält, in eine Gerade, sonst in einen Kreis transformirt wird, und schliefst daraus, dafs zu seiner Curve ein Kegelschnitt, und zwar eine gleichseitige Hyperbel, invers ist. Er stellt in Tabellenform Eigenschaften des Kegelschnittes den entsprechenden der Fufspunktcurve gegenüber, bei denen Gerade durch Kreise, die den Pol der letzteren enthalten, vertreten werden (S. 190), und dehnt dies später*) auf die Fufspunktcurve eines beliebigen Kegelschnittes aus, beweist, dafs auch diese Curve durch zweimalige stereographische Projection in einen Kegelschnitt verwandelt werden kann. Er macht überdies die Bemerkung, dafs entsprechende Punkte auf Geraden eines Büschels liegen, und dafs das Product ihrer Entfernungen vom Centrum desselben constant ist (S. 9). Dandelin mufs deshalb, scheint mir, als Erfinder der Kreis-Verwandtschaft bezeichnet werden. Dafs bei der Verwandlung die Winkel ungeändert bleiben, kann ihm unmöglich entgangen sein; ausdrücklich ausgesprochen hat er es nicht.

5. Hier kann ein Satz von Quetelet**) Erwähnung finden. Zieht man von einem leuchtenden Punkte S aus Radien vectoren SA, SB, SC, .. nach den Punkten einer Curve und beschreibt um $A, B, C, \dots$ Kreise mit den Radien $\varepsilon \cdot SA$, $\varepsilon \cdot SB$, $\varepsilon \cdot SC, \dots$, so stehen zu ihrer Hüllcurve senkrecht alle Strahlen, die nach einem bestimmten Exponenten durch Brechung der Strahlen SA, SB, $SC, \dots$ an der gegebenen Curve entstehen. Bei einer Geraden ist diese „caustique secondaire par réfraction" ein Kegelschnitt, und es ergiebt sich, von Quetelet auf Gergonne und de la Rive zurückgeführt, der Satz, dafs die Strahlen eines Büschels an einer Geraden in die Normalen eines Kegelschnittes gebrochen werden. Es ergiebt sich ferner mit Leichtigkeit das von Descartes***) und Huygens†) ausgesprochene Theorem, dafs eine in bipolaren Coordinaten durch die Gleichung

---

*) Dandelin, Sur les intersections de la sphère et d'un cône du second degré, Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 1—10.

**) Quetelet, Mémoire sur une nouvelle manière de considérer les caustiques, produites, soit par réflexion soit par réfraction, Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 3, 1826, S. 87—140. Quetelet, Résumé d'une nouvelle théorie des caustiques etc., Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 4, 1827, S. 79—109.

***) La géométrie de René Descartes, Nouvelle édition, Paris 1886: Explication de quatre nouveaux genres d'ovales qui servent à l'optique, S. 41 ff.

†) Christian Huyghens, Traité de la lumière, Leyden 1690, S. 101 ff. Die Zeit, welche bei einer Curve vom Gesetz $\alpha r_1 + \beta r_2 = 2a$

$$\alpha r_1 + \beta r_2 = 2a$$

gegebene Curve (Cartesisches Oval) die von einem Pol ausgehenden Strahlen in solche bricht, die in dem anderen Pol zusammenlaufen. Die „caustique secondaire par réflexion" ($\varepsilon = 1$) entsteht durch Vergrößerung im Verhältnis 2:1 aus der Fußpunktcurve, und es ergiebt sich für Quetelet der allgemeine Satz: „Sucht man von einer Curve die „caustique secondaire par réflexion" hinsichtlich eines Punktes und ihre polarreciproke Curve hinsichtlich eines Kreises um diesen Punkt, so gelangt man zu zwei inversen Curven" — S. 101 der zweiten Arbeit —, ein Satz, den Hirst auf die von Roberts*) eingeführte Reihe der Fußpunktcurven und negativen Fußpunktcurven einer gegebenen ausgedehnt hat. Die „caustique secondaire par réflexion" des Kegelschnittes ist somit zu einem Kegelschnitt invers.

6. Nachdem Plücker zunächst 1828**) erwiesen hatte, daß je zwei hinsichtlich eines Kreises conjugirte und mit seinem Mittelpunkte M auf einer Geraden liegende Punkte in einer Verwandtschaft einander entsprechen, in der zu einem Kreise ein Kreis, bez. eine Gerade gehört, beweist er später, daß auch die Winkel erhalten bleiben; einer Geraden entspricht ein Kreis, dessen Tangente in M zu ihr selbst parallel ist, einem Geradenpaar ein Kreispaar, das sich in M und also auch im dem zweiten Schnittpunkt unter demselben Winkel schneidet. Er erläutert nun dies Princip an einer Reihe von Beispielen***), nachdem er schon in einer früheren Abhandlung eine elegante Lösung der Aufgabe des Apollonius nach dieser Methode gegeben hatte.†) „Die Absicht dieses Aufsatzes ist," wie er sagt, „Analogien zwischen Sätzen über Kreise und Sätzen über gerade Linien nachzuweisen."

Man sieht in Plücker's Nachweis der Winkelgleichheit dasselbe Princip wieder hervortreten, das schon bei der stereographischen

---

erforderlich ist, um über zwei Brennstrahlen von einem Brennpunkt zum anderen zu gelangen, bleibt constant, wenn man die Geschwindigkeit auf dem einen Brennstrahl zu $\frac{1}{\alpha}$, auf dem anderen zu $\frac{1}{\beta}$ proportional nimmt. Aus einer ähnlichen Entwickelung folgert Huygens, daß Strahlen, die parallel zur Hauptaxe auf eine Ellipse oder Hyperbel fallen, bei einem bestimmten Brechungsexponenten nach einem Brennpunkte gebrochen werden.

*) William Roberts, Application de la théorie des transcendantes elliptiques etc., Liouv. Journ., Bd. 10, 1845, S. 177—193.

**) Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. 1, Essen 1828, Nr. 181 ff.

***) Über ein neues Übertragungsprincip, Analytisch-geometrische Aphorismen V, Crelle's Journ., Bd. 11, 1834, S. 219—225. Julius Plücker's gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen, Erster Band, Mathematische Abhandlungen. Herausgegeben von A. Schönflies, Leipzig 1895, S. 277—283. (Abh., Bd. 1.)

†) J. Plücker, Analytisch-geometrische Aphorismen II, Crelle's Journ., Bd. 10, 1833, S. 293—299 (Abh., Bd. 1, S. 246—252).

Projection beobachtet wurde, und das man ohne weiteres auf die räumliche Transformation durch reciproke Radien anwenden könnte, nachdem einmal gezeigt ist, dafs Kugeln in Kugeln übergeführt werden, und dafs an irgend zwei entsprechenden Punkten, z. B. im Pol und dem unendlich fernen Gebilde, Winkelgleichheit herrscht. Man kann auch daran anknüpfen, dafs die Centrale zweier entsprechenden Kugeln, weil sie den Pol der Inversion enthält, zwei Paare entsprechender Punkte mit parallelen Tangentialebenen ausschneidet, in denen offenbar Winkelgleichheit stattfindet. Es werden deshalb je zwei entsprechende Kugeln conform auf einander abgebildet, und folglich wird der ganze Raum in den kleinsten Teilen ähnlich transformirt.

7. Als derjenige, der die Transformation durch reciproke Radien zuerst auf Flächen anwendete, wird von englischer Seite wiederholt Stubbs*) genannt; er wendet dieselbe auf Curven und Flächen zweiter Ordnung an, beobachtet in beiden Fällen die Winkelgleichheit, stellt fest, dafs den Kreisscharen und Nabelpunkten des Ellipsoids analoge Gebilde einer Fläche vierter Ordnung entsprechen etc. Dem schliefsen sich zwei Arbeiten von Liouville an.**) In der ersten Arbeit beobachtet er, dafs die von Thomson als „Princip der elektrischen Bilder“***) eingeführte Transformation durch reciproke Radien jedes unendlich kleine Dreieck in ein ähnliches überführt, in der zweiten weist er nach, dafs diese Transformation in Verbindung mit der Ähnlichkeit das einzige Mittel zur conformen Raumtransformation bildet. Hiermit war für den Raum allerdings jene Quelle schönster Entwickelungen von vorne herein verstopft, die aus der conformen Abbildung von Oberflächen auf die Ebene und der Ebene in sich entspringen.†) Etwas später liegen Schriften von Hart††),

---

*) Stubbs, On the application of a new Method to the Geometry of Curves and Curve Surfaces, Phil. Mag., Bd. 23, 1843, S. 338—347.

**) Liouville, Note au sujet de l'article précedent (von Thomson), Liouv. Journ., Bd. 12, 1847, S. 265—290. Liouville, Extension au cas des trois dimensions de la question du tracé géographique, Note VI, S. 609—616 von: Monge, Application de l'analyse à la géométrie, cinquième édition, revue, annotée et corrigée par M. Liouville, Paris 1850.

***) Thomson, Note sur les lois élémentaires de l'électricité statique, Liouv. Journ., Bd. 10, 1845, S. 209—221 und Extraits de deux lettres adressées à M. Liouville, Liouv. Journ., Bd. 12, 1847, S. 256—264.

†) Den klassischen Untersuchungen von Euler, Lagrange, Gaufs geht als ein erster Vorläufer die Abbildung der Kugeloberfläche auf eine Sichel voran, durch welche Lambert die Brücke zwischen der stereographischen und der Mercator'schen Projection schuf. Vgl. Lambert, Beyträge zum Gebrauche der Mathematik etc., Bd. 3, Berlin 1772 (VI, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten, S. 105—199).

††) Hart, An account of some transformations of Curves, Camb. Dubl. Journ., Bd. 8 (12), 1853, S. 47—50.

Ferrers*), Hirst**), sowie die schon erwähnte Schrift von P. Serret (XIV, 2). Hirst giebt in der erstgenannten Schrift eine Verallgemeinerung des Quetelet'schen Satzes auf Flächen: „Man nehme zuerst zu einer Fläche die polarreciproke hinsichtlich einer Kugel, sodann von der ersten die negative $(n-1)$ te, von der zweiten die positive $n$te Fufspunktfläche des Mittelpunktes; alsdann entstehen hinsichtlich der Kugel inverse Flächen". Für ein Ellipsoid und seinen Mittelpunkt ist die Fufspunktfläche mit Fresnel's Elasticitätsfläche identisch; die negative Fufspunktfläche ist nach Cayley von der zehnten Ordnung, folglich ist, wie Hirst schliefst, die zweite Fufspunktfläche des Ellipsoids „wahrscheinlich" von der 20. Ordnung. Die zweite Abhandlung ist insofern nicht ohne Interesse, als Hirst aus der Erhaltung der Winkel und der Thatsache, dafs Gerade in Kreise durch den Anfangspunkt übergeführt werden, den Schlufs zieht, dafs jede Kugel in eine Kugel übergeführt wird.

8. Zu einem ersten Abschlufs gelangt die Lehre von der Kreis- und Kugel-Verwandtschaft durch die Abhandlungen von Möbius. In der ersten derselben***) wendet er das Princip an, dafs eine Beziehung zwischen Strecken einer Geraden in Beziehungen zwischen Strecken und Winkeln einer Ebene umgesetzt werden kann, wenn man als Entfernung zweier Punkte $x + iy$ und $x' + iy'$ der complexen Zahlenebene die Gröfse $x' - x + i(y' - y)$ einführt. In seiner zweiten Abhandlung†) gelangt er zur „Kreis-Verwandtschaft". Hat man zwischen $u = x + iy$ und $v = \xi + i\eta$ die allgemeinste bilineare Gleichung angenommen, so besteht zwischen irgend zwei homologen Quadrupeln Doppelverhältnis-Gleichheit, und hieraus folgt, dafs zu jedem Kreise der einen Ebene ein solcher der anderen Ebene gehört, sowie dafs entsprechende Winkel einander gleich sind.

Im Gewand des Rechnens mit Aequipollenzen war Bellavitis schon 1836 zu Entwickelungen ähnlicher Art gelangt.††) Die Plücker'sche Auffassungsweise der Inversion, nach der die Punktepaare conjugirt sind hinsichtlich eines Kreises und mit seinem

---

*) Ferrers, On the inversion of curves, Quart. Journ., Bd. 1, London 1857, S. 32—36.

**) Hirst, Sur la courbure d'une série de surfaces et de lignes, Annali di Mat., Bd. 2, 1859, S. 95—112, 148—167. (Die Gesetze der Inversion, S. 163—164, Note 1). T. A. Hirst, On equally attracting Bodies, Phil. Mag., Bd. 16, 1858, S. 161—177.

***) Möbius, Über eine Methode, um von Relationen, welche der Longimetrie angehören, zu entsprechenden Sätzen der Planimetrie zu gelangen, Leipz. Ber., Bd. 4, 1852, S. 41—54; August Ferdinand Möbius' Gesammelte Werke, herausgegeben von F. Klein, Bd. 2, Leipzig 1886, S. 188—204.

†) Möbius, Über eine neue Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren, Leipz. Ber., Bd. 5, 1853, S. 14—24 (Ges. W., Bd. 2, S. 205—217).

††) Bellavitis, Teoria delle figure inverse e loro uso nella Geometria elementare, Ann. d. sc. del regno lombardo-veneto, Bd. 6, 1836, S. 126—141.

Centrum auf Geraden liegen, dehnte er 1838 auf einen beliebigen Kegelschnitt aus*), eine Form der quadratischen Verwandtschaft, die später durch Schriften von Hirst allgemeiner bekannt wurde, und deren räumliche Form Geiser untersucht hat. Ich komme hierauf zurück.

9. Kehren wir aber zu Möbius zurück. Schon am Schlufs seiner ersten Abhandlung stellt er den Satz auf: „Jede Verwandtschaft, bei der Kreise in Kreise übergeführt werden, ist eine winkeltreue Abbildung, und analoge Sätze gelten im Raum". In einer Abhandlung aus dem Jahre 1855**) führt er dies näher aus. Die Geraden einer Ebene können mit der unendlich fernen Geraden zusammen als Kreise, die durch einen Punkt gehen, angesehen werden, ihnen entsprechen in einer kreisverwandten Ebene entweder die den „Centralpunkt" enthaltenden Kreise, oder die Geraden derselben. Im zweiten Fall mufs jedem Rechteck, als einem Parallelogramm mit umschriebenem Kreise, ein Rechteck, jedem Quadrat, als einem Parallelogramm mit auf einander senkrechten Diagonalen, ein Quadrat entsprechen; einem Rechteck, dessen Seiten im Verhältnis $m:n$ stehen, entspricht, da es aus $m.n$ Quadraten zusammengesetzt ist, ein analoges Rechteck; da die Diagonalen solcher Rechtecke einander entsprechen, so herrscht in je zwei entsprechenden Punkten Winkelgleichheit, und die Verwandtschaft ist mit der Ähnlichkeit identisch. Auf den allgemeinen Fall überträgt Möbius seine Entwickelung, indem er als Gerade zweier unendlich kleiner Gebiete die Kreise betrachtet, die aus den Gebieten zu zwei endlich entfernten entsprechenden Punkten führen.

Zwei entsprechende Winkel sind nicht nur absolut, sondern, wenn man in jeder Ebene einen positiven Drehungssinn passend einführt, dem Vorzeichen nach einander gleich. Sind M und N' die „Centralpunkte" der beiden Ebenen, so dafs den Geraden AB und $A'B'$ die Kreise $A'B'N'$ und ABM entsprechen, so kann man die Winkelvergleichungen

$$MAB = N'B'A', \quad ABM = B'A'N, \quad AMB = -A'N'B'$$

machen (§ 9). Man kann hieraus schliefsen, dafs ABM und $B'A'N'$ ähnlich sind, also $AM.A'N'$ constant ist. Die entsprechende Betrachtung wird auf räumliche Figuren angewendet (§ 32 ff.). Zwei ebene kreisverwandte Figuren können stets in inverse Lage gebracht werden. Bei zwei räumlichen kreisverwandten Figuren kann entweder die erste selbst, oder ihr Spiegelbild in die inverse Lage zur zweiten gelangen. Um diesen Gegenstand zu erledigen, erwähne ich sogleich die Arbeit von Möbius über Involutionen in

*) Bellavitis, Saggio di geometria derivata, Nuovi Saggi dell' acc. di Padova, Bd. 4, 1838, S. 243—288.

**) Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Behandlung, Leipz. Abh., Bd. 2, 1855, S. 529—595 (Ges. W., Bd. 2, S. 243—314).

der Ebene.*) Nach seinem ursprünglichen Princip ergiebt sich aus der involutorischen Beziehung in der Geraden eine involutorische Beziehung in der Ebene, dargestellt durch die Punktepaare, in denen die Kreise mit zwei gemeinsamen Punkten, welche die Doppelpunkte der Involution sind, von den Orthogonalkreisen geschnitten werden.

Die drei Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits bestimmen z. B. eine solche Involution. An ihren Doppelpunkten bestimmt das Vierseit circulare Involutionen; es ergiebt sich also beiläufig, dafs die Kreise, die über den Verbindungsstrecken gegenüberliegender Ecken des Vierseits als Durchmesser beschrieben sind, zwei Punkte gemeinschaftlich haben. Möbius führt diesen Satz auf Bodenmiller**) zurück. Ich finde ihn in etwas anderer Form 1820***) erwähnt. Das räumliche Analogon wird von P. Serret 1864†), in anderer Form von Townsend 1867††) gegeben. Es mag hier endlich noch ein schönes Resultat von Siebeck Erwähnung finden. Die Paare conjugirter senkrechter Strahlen eines Kegelschnittes schneiden auf beiden Axen Involutionen aus, die einer Involution der Ebene angehören, deren Doppelpunkte die Brennpunkte sind. Siebeck verallgemeinert dies in folgender Weise: „Die Punktreihen, welche auf irgend zwei Tangenten eines Kegelschnittes durch die übrigen Tangenten ausgeschnitten werden, führen auf eine Kreisverwandtschaft, als deren Doppelpunkte die Brennpunkte anzusehen sind".†††)

*) Möbius, Über die Involution von Punkten in einer Ebene, Leipz. Ber., Bd. 5, 1853, S. 176—190; (Ges. W., Bd. 2, S. 219—236).

**) Möbius, Zwei rein geometrische Beweise des Bodenmiller'schen Satzes, Leipz. Ber., Bd. 6, 1854, S. 87—91 (Ges. W., Bd. 2, S. 237—242). Der Satz wird unter Bodenmiller's Namen 1830 von Gudermann mitgeteilt: Gudermann, Analytische Sphärik, Köln 1830, S. 138.

***) Questions proposées, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 132. Die Kreise, bez. Kugeln, welche die Verbindungsstrecken der Paare von Ähnlichkeitspunkten von drei Kreisen oder von vier Kugeln zu Durchmessern haben, gehören zu einem Büschel, bez. Bündel.

†) P. Serret, Théorèmes, Nouv. Ann. de Math., II, Bd. 3, 1864, S. 251. Die Kugeln über den Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken eines Sechsflachs besitzen eine gemeinschaftliche Orthogonalkugel.

††) Townsend, On a property of the director spheres of a system of quadrics touching a common system of planes, Quart. Journ., Bd. 8, 1867, S. 10—14. Werden die Ebenen ABC, BCD, CAD, ABD von einer Geraden in den Punkten A_1, B_1, C_1, D_1 geschnitten, so gehen die Kugeln über den Durchmessern AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 durch dieselben beiden Punkte. Sowohl Townsend als auch P. Serret gehen von dem allgemeineren Theorem aus: „Die Monge'schen Kugeln der Flächen zweiter Ordnung, welche $9-n$ Ebenen berühren, bilden ein lineares System $n$ter Stufe". Ich komme hierauf zurück.

†††) Siebeck, Die Brennpunkte eines Kegelschnitts als solche Punkte der Ebene aufgefafst, in welchen je zwei entsprechende Punkte zweier kreisverwandter Systeme vereinigt sind, Grunert's Arch., Bd. 33, 1859, S. 462—474.

XV. Die Aufgabe des Apollonius.

1. Meine Darstellung würde ganz unvollständig sein, wenn ich nicht zum Schlufs die altberühmte Aufgabe des Apollonius behandeln wollte, die Kreise zu finden, welche drei gegebene berühren. Grade der Beschäftigung mit dieser Aufgabe verdankt die Kreislehre ihre bedeutendsten Fortschritte. Die merkwürdigen Gesetze, die hier zu Tage traten, waren es zumeist, die zum Schlufs den Kreis als eine Curve zweiter Ordnung erkennen lehrten, der durch zwei feste Punkte hindurchgeht.

Dieser Entwickelung sollte eigentlich eine zweite an die Seite gestellt werden über jene berühmte andere, weit schwierigere Aufgabe, drei Kreise zu zeichnen, welche einander und je zwei Seiten eines Dreieckes berühren. Schon 1803 hatte Malfatti*) eine einfache Lösung dieser Aufgabe herausgegeben, deren Bestätigung bereits wiederholte Veröffentlichungen von Gergonne, Lechmütz und anderen hervorgerufen hatte, als Steiner 1826**) eine äufserst elegante Lösung ohne Beweis erscheinen liefs. Schröter hat 1874 diese Construction in einfachster Weise begründet. Seine Veröffentlichung ist mit eingehenden Litteraturnachweisen versehen; ich glaube mich mit dem Hinweis auf diese Arbeit begnügen zu sollen.***)

2. Aus dem siebenten Buch der collectanea des Pappus†) wissen wir, dafs Apollonius zwei Bücher „Über Berührungen" hinterlassen hat, in welchen er die Aufgabe, an drei Kreise den berührenden zu zeichnen, mit den Specialfällen löst, wo einzelne Kreise in Punkte oder Gerade ausarten. Specialfälle dieser Aufgabe beschäftigen Pappus im vierten Buche seiner Sammlung. Gerade, die durch den Mittelpunkt M der Centrale zweier gleicher Kreise hindurchgehen, treffen sie in Punktepaaren A, A_1; B, B_1; C, C_1; ..., für die

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1 = \cdots$$

ist; ein Kreis, der beide ungleichartig berührt, hat hinsichtlich M die Potenz $MA \cdot MA_1$. Aus einem gegebenen Punkte E ergiebt sich ein zweiter mittels der Festsetzung

$$ME \cdot ME_1 = MA \cdot MA_1.$$

Der Kreis, welcher durch E und E_1 hindurchgeht und einen der gegebenen berührt, wird von selbst den anderen berühren. Der Berührungspunkt F mufs aber so bestimmt sein, dafs die zweiten

*) Malfatti, Memoria sopra un problema stereotomico, Mem. d. soc. It., Bd. 10, Th. 1, Modena 1803, S. 235—244.

**) Steiner, Einige geometrische Betrachtungen etc. (Ges. W., Bd. 1, S. 35.)

***) Schröter, Die Steiner'sche Auflösung der Malfatti'schen Aufgabe, Crelle's Journ., Bd. 77, 1874, S. 230—244.

†) Pappi collectionis etc. ed. Hultsch, Bd. 2, S. 647.

Schnittpunkte von FE und FE_1 auf einer Parallelen zu EE_1 liegen; die Aufgabe ist auf einen speciellen Fall der anderen zurückgeführt, einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten drei gegebene Punkte einer Geraden enthalten.*) In äuſserst sprunghafter Weise führt Pappus auf diesen Specialfall die allgemeinere Aufgabe zurück, um drei sich berührende Kreise einen berührenden Kreis zu legen. Der Zweck der Aufgabe ist an dieser Stelle freilich nur, zu zeigen, daſs ein Punkt durch die Unterschiede seiner Entfernungen von drei Punkten gegeben ist.

Für den allgemeinen Fall der Aufgabe begnügt sich Pappus damit, ein Lemma anzuführen**); er löst nämlich die Aufgabe, einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten eine Gerade in gegebenen Punkten schneiden. Zeuthen***) giebt den Weg an, auf welchem möglicher Weise die Zurückführung der einen Aufgabe auf die andere erfolgt ist. Berührt nämlich ein Kreis drei andere, A, B, C, in den Punkten P, Q, R, so gehen PQ, PR durch Ähnlichkeitspunkte F und E der Kreispaare A, B; A, C; schneiden sie den Kreis A nochmals in S und T, so ist ST parallel zu QR und schneidet deshalb EF in einem dritten festen Punkte.

3. Die Art, in der Vieta†) die Aufgabe des Apollonius löst, ist genau dem Verfahren angepaſst, das Pappus im Fall zweier gleicher Kreise einschlug. Jeder Kreis, der zwei gegebene berührt, hat für einen der beiden Ähnlichkeitspunkte, durch welchen die Verbindungslinie der Berührungspunkte hindurchgeht, die gemeinschaftliche Potenz der beiden Kreise zur Potenz. Mit Hülfe dieses Satzes kann man aus einem gegebenen Punkt einen zweiten ableiten und hat durch beide einen Kreis zu legen, der einen der gegebenen berührt. Mittels einer neuen Transformation durch reciproke Radien kann man die Aufgabe auf die andere zurückführen, durch zwei Punkte einen Kreis zu legen, der eine gegebene Gerade berührt. Soll ferner

---

*) Ibidem, Bd. 1, S. 195 und 201 (liber 4, Propp. 9 und 16).

**) Ibidem, Bd. 2, S. 849, (liber VII, Prop. 117). Nach Hultsch's Angabe hat jedoch bereits Haumann die Vermutung ausgesprochen, daſs dieses Lemma von einem Interpreten hinzugefügt sei. Vgl. Haumann, Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von den Berührungen, Breslau 1817, S. 69. Sobald man den Satz von der gemeinsamen Potenz voraussetzt, kommt ja in der That dem allgemeinen Fall genau dieselbe Lösung zu, welche Pappus im Falle gleicher Kreise anwendet.

***) Zeuthen-Benzon, Kegelschnitte im Altertum, S. 381. Den Hülfssatz über die Berührungssehnen kann Pappus, wie Zeuthen hervorhebt, sehr wohl gekannt haben, da er einen speciellen Fall anführt (liber IV, Prop. 3, Ed. Hultsch, Bd. 1, S. 211).

†) A. a. O. S. 99**. Man vergleiche auch: Apollonii de tactionibus quae supersunt etc., herausgegeben von Camerer, Gotha und Amsterdam 1795. Im zweiten Teil (S. 113 ff.) ist Vieta's Apollonius Gallus abgedruckt.

ein Kreis drei gegebene berühren, so wird ein concentrischer Kreis, der einen der Mittelpunkte enthält, zwei gegebene, zu den beiden anderen concentrische Kreise berühren. Vieta polemisirt ziemlich scharf gegen Adrianus Romanus, weil er die Aufgabe mit unangemessenen Mitteln, mit Hülfe von Kegelschnitten, gelöst habe. Adrianus hatte beobachtet, daſs die Mittelpunkte aller Kreise, die zwei gegebene berühren, zwei Kegelschnitten angehören, deren Brennpunkte in die gegebenen Mittelpunkte fallen, so daſs man, mit Lambert zu sprechen, „mit Hülfe dreyer Schnüre die Aufgabe hurtig lösen kann“. Newton hat indessen gezeigt, wie einfach man von dieser Seite her zu einer Lösung mit Zirkel und Lineal gelangen kann. Soll ein Punkt Z so bestimmt werden, daſs $ZA - ZB$ und $ZA - ZC$ gegebene Werte erhalten, so ist er ein Schnittpunkt zweier Hyperbeln, für deren jede zu dem Brennpunkt A eine bestimmte Directrix gehört. Fällt man auf dieselben die Lote ZP und ZQ, so müssen ZP, ZQ, ZA in gegebenem Verhältnis stehen. Deshalb ist zunächst eine vom Kreuzungspunkt R der Directrices ausgehende Gerade ein Ort für den gesuchten Punkt, und da nun auch ZR zu ZA in einem gegebenen Verhältnis steht, so ergiebt sich als zweiter Ort für denselben ein Kreis.*)

4. Das räumliche Gegenstück zu Vieta's Lösung bietet Fermat.**) Eine Transformation durch reciproke Radien, welche eine Kugel in sich überführt, muſs notwendig eine berührende Kugel in eine andere berührende Kugel oder Ebene überführen. Hätte nämlich die zweite Kugel eine Curve mit der gegebenen gemeinschaftlich, so würde auch die erste Kugel mit ihr, anstatt eines Punktes, eine Curve gemein haben. Genau in der Art, wie es Vieta im Fall der Ebene macht, kann nun die Aufgabe, die berührende Kugel zu vier gegebenen zu finden, auf die andere zurückgeführt werden, durch drei Punkte eine Kugel zu legen, die eine gegebene Ebene berührt.

5. Bezeichnet man mit A, B, C die Mittelpunkte, mit a, b, c die Radien dreier Kreise, mit x und M Radius und Centrum eines sie berührenden Kreises, so sind $\underline{+}\, x \underline{+}\, a$, $\underline{+}\, x \underline{+}\, b$, $\underline{+}\, x \underline{+}\, c$ die Entfernungen MA, MB, MC; zwischen ihnen besteht eine Beziehung, aus der sofort eine quadratische Gleichung für x entspringt. Diese Erwägung liegt den meisten Behandlungen des Problems, bis in den Anfang unseres Jahrhunderts hinein, zu Grunde. Gewöhnlich wird

---

*) Newton, Principia, Liber I, Lemma 16. Auch l'Hospital wird durch die Aufgabe, einen Kegelschnitt aus drei Punkten und einem Brennpunkt zu construiren, zu der Aufgabe des Apollonius geführt. Er löst die Aufgabe auf rechnendem Wege und giebt eine Construction für die Mittelpunkte: Sections coniques, S. 379, art. 434.

**) A. a. O. S. 99*. Eine Übersetzung von Hachette findet sich: Journ. de l'éc. pol., Heft 7 u. 8, 1812, S. 279—289.

eine scheinbare Vereinfachung durch Einführung eines Winkels und zweier anliegender Seiten des Dreiecks ABC erzielt, so dafs eine sehr unsymmetrische Form der Gleichung herauskommt. Die älteste Erörterung dieser Art ist die von Descartes*), verwandter Natur sind die von Newton**), Euler***), Fufs†) und Lambert.††) Eine symmetrische Lösung der Aufgabe hat, wie es scheint, zuerst Oberreit angegeben.†††) Er stellt den Radius x in der Form

$$Ax = -C \pm \sqrt{B}$$

dar und giebt symmetrische Werte von A, B, C als Functionen der Radien und Centralen der Kreise. Nachdem Carnot die Beziehung unter den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks aufgestellt hat, gewinnt er sofort eine möglichst symmetrische Lösung der Aufgabe in der Ebene*†). An die Beziehungen unter den sechs Seiten eines sphärischen Vierseits knüpft er einmal eine Lösung der Aufgabe auf der Kugel*††), sodann, unter Bevorzugung einer Ecke des Mittelpunkttetraeders, eine Lösung des Problems, zu vier Kugeln die berührende zu finden.*†††)

Derselbe Gedankengang liegt Abhandlungen von Euler†*), Poisson†**), Binet†***) und Hachette**†) über diesen Gegen-

*) Descartes, A Mme. la princesse Elisabeth etc. touchant le problème, trois cercles étant donnés, trouver le quatrième qui touche les trois. Oeuvres de Descartes, Ed. Cousin, Bd. 9, Paris 1825, S. 143—154. (Die Briefe sind undatirt.)

**) Newton, Arithmetica universalis, Cambridge 1707, (Problemata geometrica etc., Probl. 43—47, Ed. Gravesande, Leyden 1732, S. 141 ff.

***) Euler, Solutio facilis problematis, quo quaeritur circulus, qui datos tres circulos tangat, Nova Acta Ac. sc. imp. Petropolitanae, Bd. 6, 1790, S. 95—101 (Conv. exh. d. 4 Novembr. 1779).

†) Fufs, Solution du problème de trouver un cercle qui touche trois cercles donnés de grandeur et de position, Nova Acta Ac. sc. imp. Petropolitanae, Bd. 6, 1790, S. 100—113.

††) J. H. Lambert's etc. deutscher gelehrter Briefwechsel, herausgegeben von Joh. Bernoulli, Bd. 1, Berlin 1781, S. 310—314; Brief von Lambert an Holland vom 11. Dec. 1768 (Grunert's Arch., Bd. 28, 1857, S. 354—363). Holland stellt (S. 308) Lambert die Aufgabe mit dem Bemerken, dafs er selbst eine „bis zum Ekel" complicirte biquadratische Gleichung erhalten habe.

†††) Ibidem, Bd. 5, zweiter Teil, Berlin 1787, S. 254—256.

*†) Carnot, Géométrie de position, Paris 1803, S. 390.

*††) Ibidem, S. 415.

*†††) Ibidem, S. 416.

†*) Euler, Solutio facilis problematis, quo quaeritur sphaera quae datas quatuor sphaeras utcunque dispositas contingat, Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg, Bd. 2, 1810, S. 17—28, (conv. exh. d. 15 Nov. 1779).

†**) Poisson, Solution analytique du problème d'une sphère qui en touche quatre autres, Nouv. Bull. d. sc., par la Soc. Philomatique de France, Bd. 3, 1812, S. 141—144.

†***) Binet, Sur la détermination analytique d'une sphère tangente à quatre autres, Journ. de l'éc. pol., Heft 17, 1815, S. 113—128.

**†) Hachette, Solution analytique de ce problème: Déterminer le

stand zu Grunde. Endlich entwickelt Carnot die Beziehung unter den 10 Kanten eines räumlichen Fünfecks in voller Länge und bemerkt, daſs aus ihr eine symmetrische Form der Gleichung für den Radius einer Kugel*) folge, die vier vorliegende berührt oder unter gegebenen Winkeln schneidet.

6. Die ersten geometrischen Behandlungen unserer Aufgabe sind von Hachette veröffentlicht worden.**) Den Ausgangspunkt bildet die Untersuchung der Kugeln, welche drei gegebene berühren; die Verbindungslinien $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$ dreier Berührungspunkte gehen durch drei in einer Geraden liegende Ähnlichkeitspunkte; es ergeben sich auf diese Art vier solche Kugelscharen. Bei zwei Kugeln derselben Schar liegen die Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ auf einer Kugel, deren Schnittkreis mit der ersten Kugel z. B. die Kreise $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha'\beta'\gamma'$ in α und α' berührt, so daſs die Tangenten der letzteren in einem Punkte der Ähnlichkeitsaxe zusammenlaufen. Die Berührungspunkte $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ gehören mithin einem Kreise an, der zur Centralebene senkrecht steht.***) Der Ort der Mittelpunkte der berührenden Kugeln ist also ein Kegelschnitt, da er in einer zur Ähnlichkeitsaxe senkrechten Ebene liegt und von den Mittelpunkten der drei Kugeln aus durch gerade Kegel projicirt wird. Ich habe dies schon an früherer Stelle angeführt, um zu zeigen, wie Dupin zu seinem schönen Satz von der Focalen gelangte. Des Zusammenhangs wegen führe ich es nochmals an. Die vier so entstandenen Kegelschnitte schneiden die Centralebene in acht Punkten, den Mittelpunkten der Kreise, welche die in der Centralebene liegenden Kreise der drei gegebenen Kugeln zugleich berühren. Um zu vier Kugeln A, B, C, D die berührenden zu finden, werden auf einer von ihnen, etwa A, die Orte k, l, m, n und k', l', m', n' der Berührungspunkte der Kugeln hergestellt, die A, B, C und A, B, D zugleich berühren. Sechzehn unter den Schnittpunkten der ersteren mit den letzteren Kreisen sind die gesuchten Berührungspunkte.†) Auf den Schnittkreisen der Kugeln A, B, C mit ihrer Centralebene schneiden der Kreis k und die beiden entsprechenden auf B und C die Berührungspunkte zweier Kreise aus,

---

centre et le rayon d'une sphère qui touche quatre sphères données, Journ. de l'éc. pol., Heft 17, 1815, S. 129—136.

*) Carnot, Mémoire sur la relation etc., Paris 1806, S. 48 ff.

**) Mémoire sur le contact des sphères, (travaux de l'école), mitgeteilt von Hachette, Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, Nr. 2, 1804, S. 17—28. Hachette, Supplément de la géométrie descriptive, Paris 1812, S. 21—36.

***) Einen analytischen Beweis für dies Theorem giebt Hachette in der Abhandlung: Théorème de géométrie, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 425—429.

†) In der ersten Auflage der Corr. de l'éc. pol. (1804) war jeder Schnittpunkt eines Kreises k, l, m, n mit einem Kreise k', l', m', n' als ein Berührungspunkt bezeichnet und die Zahl der berührenden Kugeln auf 32 angegeben worden (Corr. de l'éc. pol., Bd. 1, zweite Auflage, S. 40).

die alle drei berühren. Dandelin*) hat hieraus eine Lösung der Aufgabe abgeleitet. Ich schliefse hier eine Arbeit von Français**) an, in welcher auf analytischem Wege dargethan wird, dafs Rotationsflächen mit einem gemeinsamen Brennpunkt sich in zwei ebenen Curven durchschneiden, die von ersterem aus durch gerade Kegel projicirt werden. Ich mufs ferner auf eine bereits erwähnte Arbeit von Dupin***) nochmals zurückkommen. Er führt nämlich auf Dupuis†) die Sätze zurück, dafs die Mittelpunkte aller drei gegebene berührenden Kugeln eine ebene Curve beschreiben, und dafs jeder der drei Berührungspunkte ebenfalls eine ebene Curve, einen Kreis, beschreibt. Er selbst fügt hinzu, dafs die Ebenen dieser Kreise eine Gerade gemein haben, dafs ferner die Tangentialebenen zweier Kugeln in ihren Berührungspunkten mit einer dritten sich in Geraden einer bestimmten Ebene schneiden. Aus drei Kugeln erhält man so drei Ebenen, die sich in der oben erwähnten Geraden schneiden; den Rest seiner Notiz bildet die Betrachtung der Beziehungen zwischen zwei zusammengehörigen Focalen.

7. Man erkennt in diesen Notizen, die nach Dupin's Versicherung über zehn Jahre, also bis etwa 1803, zurückreichen, einen guten Teil der Schlüsse, auf denen die endgültige Lösung des Problems bei Gaultier††) beruht. Für diese war neben dem Satz von der Ähnlichkeitsaxe, den, wie wir sahen, Monge mit Hülfe dreier Kugeln über den gegebenen Kreisen evident gemacht hatte,†††) besonders der Satz von dem Potenzpunkt dreier Kreise von Bedeutung. Carnot*†) hat zuerst den Satz aufgestellt: „Die Sehnen, welche

---

*) Dandelin, Étant donnés trois cercles c, c', c'', trouver une quatrième circonférence qui leur soit tangente, Corr. de l'éc. pol., Bd. 3, Nr. 2, 1815, S. 204—205.

**) Français, Premier problème: Construire une sphère tangente à quatre sphères données de grandeur et de position, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 2, 1810, S. 63—66.

***) Dupin, Mémoire sur la Sphère tangente à trois ou à quatre autres, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 5, 1813, S. 420—425.

†) Eine Arbeit von Dupuis habe ich nicht aufgefunden.

††) Gaultier de Tours, Mémoire sur les moyens généraux de construire graphiquement un Cercle déterminé par trois conditions et une Sphère déterminée par quatre conditions, Journ. de l'éc. pol., Heft 16, 1813, S. 124—214.

†††) Vgl. XII, 1. Von Grunert ist bemerkt worden, dafs Fufs die an der genannten Stelle angeführte Betrachtung Monge's mitteilt und auf d'Alembert zurückführt. (Nova Acta ac. sc. imp. Petropolitanae, Bd. 14, 1805, S. 139—152.)

*†) Carnot, géométrie de position, S. 347, Nr. 305. Sarrus hat meines Wissens zuerst für den Fall imaginärer Schnittpunkte anschaulich bewiesen, dafs der Ort der Punkte gleicher Potenzen zweier Kreise eine Gerade ist, indem er die Kreise als Schnitte zweier gleichen Kugeln betrachtet. Von hier aus kann man dann zur Radicalebene zweier beliebigen Kugeln gelangen, etc.: Note sur les axes, plans et centres radicaux, Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 378—380.

drei Kreise paarweise gemeinsam haben, schneiden sich in einem Punkte". Zur Begründung genügt ihm, daſs die Schnittpunkte der drei Kugeln über den Kreisen, wenn sie reell vorhanden sind, sich in einen derartigen Punkt projiciren. Erst bei Gaultier wird ausdrücklich hervorgehoben, daſs zwei Kreise unter allen Umständen eine „axe radical" besitzen, aus deren Punkten sie entweder Tangenten oder kürzeste Sehnen von gleicher Länge erhalten. Ganz ähnlich wie später Steiner*) bestätigt Gaultier dies auf rechnendem Wege. Für Gaultier ist es nunmehr evident, daſs die drei Kreisen paarweise gemeinschaftlichen Sehnen in einem Punkte („point radical") zusammenlaufen; er gewinnt auſserdem die Sätze über die Büschel einander senkrecht durchschneidender Kreise, von denen jeder die Radicalaxe des anderen zur Centrale hat. Jede der beiden Reihen von Kreisen, die zwei gegebene berühren, hat nun mit den sie senkrecht schneidenden Kreisen einen der beiden Ähnlichkeitspunkte zum gemeinschaftlichen Radicalpunkt und einen um diesen Ähnlichkeitspunkt beschriebenen Hülfskreis zum gemeinschaftlichen Orthogonalkreis. Hieraus flieſst (S. 201) die uns jetzt so geläufige Construction für die Paare von Kreisen, die drei gegebene berühren. Man schneide die Sehnen, welche sie mit ihrem gemeinschaftlichen Orthogonalkreis bestimmen, mit einer Ähnlichkeitsaxe. Die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich von diesen Punkten aus an die gegebenen Kreise legen lassen, sind zugleich die der gesuchten Kreise. Da die oben eingeführten Hülfskreise auch den Orthogonalkreis senkrecht treffen, so liegt, wie Gaultier bemerkt, jedes Paar von Berührungspunkten mit dem Radicalpunkt auf einer Geraden, die beiden Mittelpunkte finden sich auf dem vom Radicalpunkt aus auf die Ähnlichkeitsaxe gefällten Lote. Die ganz analoge Entwickelung giebt Gaultier für den Fall von vier Kugeln.

Poncelet hat dies in glücklicher Weise ergänzt.**) Man bezeichne als umgekehrt (inversement) homolog in Bezug auf einen Ähnlichkeitspunkt Punkte zweier Kreise, die mit ihm auf einer Geraden liegen, aber nicht parallele Tangenten besitzen. Wählt man nun drei in einer Geraden liegende Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise aus und sucht zu einem beliebigen Punkte A_1 des ersten den invers-homologen B_1 auf dem zweiten Kreise, zu diesem den invers-homologen C_1 auf dem dritten Kreise, gelangt man dann zu einem Punkte A_2 des ersten Kreises, so wird man nach Vollendung eines

*) Steiner, Einige geometrische Betrachtungen, Nr. 3. (Ges. W., Bd. 1, S. 23.)

**) Poncelet, Construction géométrique d'un cercle qui en touche trois autres donnés sur un plan ou sur une sphère, d'un cône droit, qui en touche trois autres de même sommet, et d'une sphère qui en touche quatre autres dans l'espace, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 317—322. Im Traité kommt er hierauf zurück. Vgl. auch: Poncelet, Problème de Géométrie, Corr. de l'éc. pol., Bd. 2, Nr. 3, 1811, S. 271—274.

zweiten Umlaufs zu A_1 zurückgeführt; diese sechs Punkte gehören einem Kreise an, der in Gaultier's Construction für das eine Kreispaar den Orthogonalkreis vertreten kann; er schneidet sich mit diesem auf der Ähnlichkeitsaxe. Offenbar hat man es mit einem Kreise zu thun, welcher die drei gegebenen unter gleichen Winkeln schneidet.

8. Ungefähr gleichzeitig mit Gaultier's Lösung und dieser nahe verwandt ist diejenige von Gergonne.*) Es seien c, c', c'' drei beliebige Kreise, man verstehe unter $(c, c')^l$ die Polare des äufseren, unter $(c, c')^i$ die des inneren Ähnlichkeitspunktes von c und c' hinsichtlich c. Zu irgend zwei der sechs Ähnlichkeitspunkte, etwa l und i, gehört dann ein Punktepaar wie $[(c, c')^l, (c, c'')^i]$; $[(c', c)^l, (c'', c)^i]$. Nimmt man die Punkte einer Ähnlichkeitsaxe paarweise zusammen, so entstehen für c, c', c'' drei Punktepaare, deren Verbindungslinien ihre Berührungspunkte mit einem der gesuchten Kreispaare ausschneiden. Um zu Gaultier's Lösung zu gelangen, braucht man nur zu bemerken, dafs der erste der bezeichneten Punkte mit dem Pol von c hinsichtlich der Ähnlichkeitsaxe zusammenfällt, und dafs die Radicalaxe von c und c' die Mittellinie für die beiden Parallelen $(c, c')^l$ und $(c', c)^l$ ist, so dafs der Radicalpunkt den Abstand zwischen je zwei zusammengehörenden Punkten Gergonne's halbirt. Die genau entsprechende Vorschrift giebt Gergonne für den Fall von vier Kugeln.

9. In anderer Form kommt Durrande**) auf die Lösung; er stellt fest, dafs die Pole der Ähnlichkeitsaxe hinsichtlich der drei Kreise ähnlich zu ihnen liegen, wie der Radicalpunkt zu den beiden Kreisen, welche der betreffenden Axe entsprechen. Deshalb müssen die Verbindungslinien der Pole mit dem letzteren Punkte durch die Ähnlichkeitspunkte jedes der beiden gesuchten Kreise gegen die gegebenen, d. h. seine Berührungspunkte mit ihnen, hindurchgehen. (S. 45, die entsprechende räumliche Betrachtung findet sich auf S. 55). Frobenius***) hat aus der determinantenmäfsigen Behandlung des Problems

*) Gergonne, Mémoire sur le cercle tangent à trois cercles donnés, et sur la sphère tangente à quatre sphères données (Lu le 2 mai 1814), Mém. de l'Ac. d. sc. de Turin, Bd. 22, 1816. Gergonne, Recherche du cercle qui en touche trois autres sur un plan, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 289—303.

**) Durrande, Théorie élémentaire des contacts des cercles, des sphères, des cylindres et des cônes, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 1—67.

***) Frobenius, Anwendung der Determinantentheorie auf die Geometrie des Mafses, Crelle's Journ., Bd. 79, 1875, S. 185—247 (datirt vom Mai 1874). Als ein besonderer Vorzug der Frobenius'schen Schrift mufs es bezeichnet werden, dafs mit Consequenz negative und positive Radien bei den Kreisen unterschieden werden, je nachdem die vom Mittelpunkte abgekehrte oder die ihm zugewendete Richtung eines Radius als positiv bezeichnet wird, und dafs im Zusammenhang damit eine einheitliche Festsetzung über den positiven Umlaufssinn auf einem Kreise getroffen wird. Zwei durch Mittelpunkt und Radius gegebene Kreise haben nur eine gemeinschaftliche Tangente, einen Schnittwinkel, drei Kreise nur eine Ähnlich-

Regeln gefolgert, welche die vollständige Ausführung des Durrande'schen Gedankens bieten. Man schneide z. B. eine Ähnlichkeitsaxe einmal mit dem Orthogonalkreise, lege ferner durch seinen Mittelpunkt zwei Gerade, welche gegen die Ähnlichkeitsaxe ebenso geneigt sind, wie die drei gegebenen Kreise; die gesuchten Kreise berühren die letzteren Geraden und gehen durch die ersteren Punkte hindurch; die analoge Entwickelung gilt für den Raum (S. 234). Die soeben angeführte Regel wird in der allgemeineren, auf drei Kugelkreise bezüglichen Form auf S. 204 mitgeteilt.

10. Wenden wir uns nach Deutschland, so haben wir neben der oben erwähnten Schrift von Camerer und einer anderen mir nicht zugänglich gewordenen von Christmann*) die oft erwähnte Abhandlung Steiner's und die ziemlich gleichzeitige Schrift Neumann's**) hervorzuheben. In der letzteren wird wohl zum ersten Mal das Schneiden unter gegebenem Winkel in's Auge gefaßt. Für die Aufgabe des Apollonius selbst giebt Neumann die Gaultier'sche Lösung, indem er die Radicalaxe zweier Kreise als die Mittellinie der Polaren bestimmt, die dem äußeren oder inneren Ähnlichkeitspunkt zugehören. Die Kreise, welche an zwei gegebenen gleiten, schneiden nun diese Gerade und jeden anderen Kreis des Büschels, den die gegebenen bestimmen, unter je einem constanten Winkel. Unter den Kreisen, die zwei gegebene von den Radien r_1 und r_2 in gleicher Art unter den Winkeln α_1, α_2 schneiden, befinden sich zwei Gerade; dieselben berühren concentrische Hülfskreise von den Radien $r_1 \cos \alpha_1$ und $r_2 \cos \alpha_2$. Die beiden Kreise des Büschels, welche diese Geraden berühren, werden auch von allen anderen Kreisen berührt, die der Forderung genügen. Sollen nun Kreise construirt werden, welche drei gegebene unter den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ schneiden, so ergiebt die obige Regel sechs neue Hülfskreise, die den Orthogonalkreis senkrecht schneiden und mit den drei ersten eine Ähnlichkeitsaxe gemein haben. Die beiden Kreise, welche irgend drei von ihnen berühren und der Ähnlichkeitaxe zugehören, berühren auch die drei anderen und lösen die Aufgabe. Aus der Anordnung ginge übrigens hervor, daſs ein Kreis, der unter den Winkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ drei gegebene schneidet, einen Büschel beschreibt, wenn $\cos \alpha_1 : \cos \alpha_2 : \cos \alpha_3$ ein constantes Verhältnis ist. Denn die Ähnlichkeitsaxe und der Orthogonalkreis der sechs Hülfskreise sind als-

keitsaxe etc. Durch diese und die entsprechenden räumlichen Definitionen gewinnen seine Constructionen eine groſse Bestimmtheit.

*) Christmann, Apollonius suevus, sive tactionum problema nunc demum restitutum, accedente censura in Vietam, Tubingae 1821.

**) Fr. Neumann, De tactionibus atque intersectionibus circulorum et in plano et in sphaera sitorum, sphaerarum atque conorum ex eodem vertice pergentium commentatio geometrica, Isis (von Oken redigirte Zeitschrift), Berlin 1826, S. 349—367, 466—489. Die Arbeit trägt, wie man wohl annehmen darf, versehentlich, die Jahreszahl 1815 (statt 1825).

dann unveränderlich. Ich übergehe die entsprechenden räumlichen Sätze und bemerke nur noch, dafs die Gesetze über concentrische gerade Kegel aus denen über Kugeln gefolgert werden, die eine gegebene orthogonal schneiden, dafs dann hieraus wieder die Geometrie der Kugeln gefolgert wird.

Der angeführte Neumann'sche Hauptsatz erklärt sich nun in der That mit Leichtigkeit auf Grund der Steiner'schen Principien, wenn man an die Art denkt, wie Steiner seinen Satz von den Kreisreihen erweist.*) Projicirt man nämlich die Schnittpunkte A, A_1; B, B_1; C, C_1; ... eines Kreises mit denen eines Büschels von einem Punkt O der gemeinschaftlichen Sehne aus auf die Kreise zurück, so liegen die neuen Punkte A', A_1'; B', B_1'; C', C_1'; ... ebenfalls auf einem Kreise, weil die Kreise des Büschels selbst hinsichtlich O „potenzhaltend" sind. Fallen A, A_1 zusammen, so ist dasselbe mit A', A_1' der Fall, der Kreis gleitet also, wenn O über die Linie gleicher Potenzen geführt wird, an zwei Kreisen des Büschels und schneidet, wenn man das Gesetz der Winkelerhaltung bei der Inversion hinzunimmt, jeden anderen Kreis des Büschels unter einem und demselben Winkel. Dafs ferner der Orthogonalkreis mit jeder der Ähnlichkeitsaxen einen Büschel von Kreisen bestimmt, welche die drei gegebenen unter gleichen Winkeln schneiden, kann leicht daraus abgeleitet werden, dafs die neuen Kreise durch die Transformationen an den Ähnlichkeitspunkten der Axe in sich übergeführt werden, die zwei der gegebenen Kreise in einander überführen.**)

11. Mit besonderer Vorliebe hat sich Plücker mit der Aufgabe beschäftigt, und zwar knüpft er an seine erste Begründung***) der

*) Steiner, Einige geometrische Betrachtungen etc., Nr. 20ff. (Ges. W., Bd. 1, S. 40ff.).

**) Sehr wohl möglich ist freilich, dafs Neumann und Steiner Winkel-Relationen mit Hülfe der stereographischen Projection eingeschaltet haben. Steiner hat z. B. den Satz, dafs vier Kreise einer Ebene als stereographische Projectionen gleicher Kugelkreise aufgefafst werden können (Geometrische Lehrsätze, Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 190—193, Ges. W., Bd. 1, S. 133); drei gleiche Kugelkreise werden aber von einer Schar von Parallelkreisen unter gleichen Winkeln geschnitten, die sich in einen Büschel von Kreisen projicirt, welche drei Kreise der Ebene unter gleichen Winkeln schneiden. Es seien hier zwei Notizen von Serret und Mannheim angeführt: Serret, Note sur le cercle tangent à trois cercles donnés, Nouv. Ann. de Math., II, Bd. 2, 1863, S. 95—96. Mannheim, Lieu des centres des circonférences coupants sous des angles égaux trois circonférences données, Nouv. Ann. de Math., Bd. 12, 1853, S. 113—116.

***) Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. 1, Essen 1828. In den §§ 202—206 giebt Plücker drei von einander verschiedene Modificationen für seine Lösung der Aufgabe des Apollonius. In § 221 giebt er die Lösung für die allgemeinere Aufgabe. Wenig von dieser Entwickelung verschieden ist die andere, ziemlich gleichzeitige: Mémoire sur les contacts et sur les intersections des cercles, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 29—47 (Abh., Bd. 1, S. 63—75).

Gaultier'schen Lösung sogleich die Aufgabe, einen Kreis so zu zeichnen, dafs die cos. seiner Schnittwinkel mit vier gegebenen Kreisen in gegebenen Verhältnissen stehen. Zunächst wird das oben bei Besprechung der Neumann'schen Arbeit hervorgehobene Resultat entwickelt. Bei je dreien der vier Kreise schneidet alsdann der betreffende Orthogonalkreis eine Ähnlichkeitsaxe der drei concentrischen Hülfskreise in zwei Punkten des gesuchten Kreises. Auf die Bestimmung der Gesamtzahl der Lösungen geht er nur flüchtig ein. Bemerkenswert ist besonders die Art, wie als Orte für die Mittelpunkte der gesuchten Kreise im ersten Fall die Geraden, welche man vom Potenzpunkt aus auf die Ähnlichkeitsaxen fällen kann, nachgewiesen werden. Setzt man an die Stelle der ursprünglichen Kreise mit den Radien a, b, c concentrische mit den Radien $a \pm x$, $b \pm x$, $c \pm x$, und hält man die Vorzeichen fest, so wandert der Punkt gleicher Potenzen über eine Gerade, die offenbar der Ort der Mittelpunkte für zwei bestimmte der drei Kreise ist. Dieser Art der Begründung begegnet man in späteren Behandlungen vielfach.

Sind drei Kreise einander gleich, so fällt offenbar für zwei sie berührende Kreise der Mittelpunkt mit dem Punkt gleicher Potenzen zusammen, ihre Berührungspunkte werden durch die Durchmesser der Kreise ausgeschnitten, welche diesen „Chordalpunkt" enthalten. Aus einer Transformation durch reciproke Radien erhält man folgende Vorschrift für den allgemeinen Fall. Man halbire durch Kreise die Winkel, welche die gegebenen, paarweise genommen, mit einander bilden. Diese sechs Kreise gehen zu drei und drei durch vier Punktepaare; durch jedes lege man Kreise, welche die gegebenen senkrecht schneiden; sie schneiden die Punkte aus, in denen ein Kreispaar die gegebenen berührt.**) Endlich folgert er aus dem Reciprocitätsgesetz eine andere Construction. Die Mittelpunkte der Kreise gehören zwei Kegelschnitten zugleich an, welche einen der gegebenen Mittelpunkte zum gemeinsamen Brennpunkt haben. Hinsichtlich eines Kreises um diesen Punkt sind zwei Kreise zu ihnen

*) Es möge hier auf zwei Notizen über die Aufgabe hingewiesen werden, einen Kreis zu zeichnen, der auf drei Geraden gegebene Strecken ausschneidet oder von drei Punkten aus unter gegebenen Winkeln erblickt wird. Während bei der ersten Aufgabe die gesuchten Mittelpunkte die Schnittpunkte zweier gleichseitigen Hyperbeln sind, läfst die zweite Aufgabe nur zwei Lösungen zu; die Mittelpunkte sind gemeinsame Punkte der Kreise über den Paaren von Ähnlichkeitspunkten dreier Kreise um die gegebenen Punkte, deren Radien den cosec. der Winkel proportional sind. Vgl. Questions résolues par un Abonné, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 175—181. Die entsprechenden räumlichen Aufgaben werden die erste von einem Abonné, die zweite von Pagliani gelöst. Vgl.: Questions résolues, Gerg. Ann., Bd. 20, 1829 u. 1830, S. 84—88.

**) Diese elegante Construction giebt Plücker in der schon citirten Abhandlung: Analytisch-geometrische Aphorismen II, Crelle's Journ., Bd. 10, 1833, S. 293—299, (Abh., Bd. 1, S. 251).

reciprok; die gesuchten Mittelpunkte sind also die Pole zweier gemeinschaftlichen Tangenten derselben.*) Diese Entwickelung findet sich übrigens auch in einer Arbeit von Dandelin.**)

12. Die Aufgabe, zu drei Schnitten einer Oberfläche zweiter Ordnung den berührenden Kegelschnitt zu suchen, fanden wir im genauesten Zusammenhang mit der Aufgabe des Apollonius; die Lösungen von Chasles, Durrande, Olivier wurden erörtert; es ergab sich, daſs auch Steiner den genauen Zusammenhang beider Gruppen von Aufgaben erkannt hatte. Ich hatte mich bemüht, aus dieser Quelle heraus die schönen Betrachtungen Fiedler's und Darboux's zu erläutern [XII, 3]. Noch eine andere Entwickelung läſst sich hier anknüpfen. Projicirt man die Kreise der Ebene stereographisch auf eine Kugel, und projicirt man alsdann die Kugel auf eine andere Ebene von einem beliebigen Punkte aus, so wird die Geometrie der Kreise einer Ebene, oder allgemeiner, der zwei Punkte enthaltenden Kegelschnitte übergeführt in die Geometrie der Kegelschnitte, welche einen gegebenen doppelt berühren. Ein Symptom dieses von Poncelet ausdrücklich hervorgehobenen Übertragungsprincipes ist, daſs die Geometrie der geraden Kegel mit gemeinsamer Spitze in vollem Parallelismus zu der der Kreise einer Ebene steht, wie dies bei Neumann und Durrande, später bei Frobenius, hervortritt. Im Gebiet der Kegelschnitte, die einen gegebenen doppelt berühren, ist also die Aufgabe des Apollonius ohne weiteres lösbar. Cayley hat die hierher gehörige Entwickelung***) für sich durchgeführt.

13. Aber auch von der Theorie der bicircularen Curven und Flächen her trat dieser Zusammenhang hervor. Die Hüllcurve der Kreise, welche einen gegebenen orthogonal schneiden, oder allgemeiner einem Netz zweiter Stufe angehören, und deren Mittelpunkte auf einem Kegelschnitte liegen, ist eine bicirculare Curve vierter Ordnung. Steht der Kegelschnitt in doppelter Berührung mit dem Kreise, so zerfällt die Hüllcurve in zwei Kreise. Die Aufgabe des Apollonius kommt also darauf zurück, durch die drei Mittelpunkte doppelt berührende Kegelschnitte an den Orthogonalkreis zu legen und die zugehörigen Enveloppen aufzusuchen. Ganz Analoges gilt im Raume. Die vier Kegelschnitte werden von vier anderen Kegelschnitten berührt, welche den Orthogonalkreis doppelt berühren. Die vier aus

---

*) Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 273 (Nr. 716) und: Aufgaben und Lehrsätze etc., Crelle's Journ., Bd. 6, 1830, S. 210—212, (Abh., Bd. 1, S. 220).

**) Dandelin, Sur quelques applications de la théorie des polaires, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 277—281.

***) Cayley, Sur le problème des contacts, Crelle's Journ., Bd. 39, 1850, S. 4—13. Das räumliche Analogon hat, wie später erörtert wird, Chasles behandelt.

ihnen entstehenden Hüllcurven müssen die ursprünglichen Hüllcurven doppelt berühren; es entstehen also acht Kreise, von denen jeder vier aus verschiedenen Paaren entnommene von den Kreisen berührt, welche den drei ursprünglich gegebenen umschrieben sind. Daneben existiren noch sechs weitere Kreise, von denen jeder zwei Paare berührt, um einen letzten Schnittpunkt zweier Mittelpunktkegelschnitte beschrieben ist und den Orthogonalkreis senkrecht schneidet. Diese von Casey*) ausführlich erörterten Beziehungen waren aber durch einen Satz von Hart**) und durch einen Beweis, den Salmon***) von demselben gegeben hatte, vorbereitet bez. hervorgerufen worden. In der Absicht, das Feuerbach'sche Theorem auf die Kugel zu übertragen, war ersterer zu dem Theorem gelangt: Die vier Kreise, welche einem sphärischen Dreieck angeschrieben, bez. eingeschrieben sind, werden ausschließend, bez. einschließend von einem vierten Kreise berührt. Salmon bestätigt diesen Satz, indem er ihn vermöge eines sphärischen Coordinatensystems auf den oben genannten Satz im Gebiet der Kegelschnitte, die einen gegebenen doppelt berühren, zurückführt. Da man stereographisch drei größte Kreise einer Kugel in drei beliebige Kreise der Ebene projiciren kann, so war hierdurch von dem Theorem von Feuerbach aus zu Beziehungen unter den acht Kreisen, die drei gegebene berühren, eine Brücke geschlagen.

Casey hatte seinen Satz schon in einer früheren Abhandlung ausgesprochen.†) Werden vier Kreise von einem und demselben fünften berührt, so besteht zwischen den gemeinschaftlichen Tangenten, die sie paarweise bestimmen, eine Beziehung, die dem Ptolemäus'schen Lehrsatz beim Kreisviereck entspricht, nämlich

$$t_{23}\, t_{14} \pm t_{31}\, t_{24} \pm t_{12}\, t_{34} = 0;$$

ob man die äußere oder innere gemeinschaftliche Tangente zu nehmen hat, wird durch die Art der Berührung entschieden. Zwischen je vier Kreisen, die drei gegebene berühren, entstehen drei derartige Beziehungen, aus welchen, wenn man passende Kreise zusammennimmt, sich durch Elimination noch eine andere gleicher Art entwickeln läßt, welche zeigt, daß die vier Kreise noch von einem vierten Kreise berührt werden. Doch waren bei dieser Art der Herleitung Schwierigkeiten bei der Vorzeichen-Bestimmung unvermeidlich.

*) Casey, On bicircular Quartics, Trans. of the Irish Ac., Bd. 24, 1871, S. 457—569.

**) Hart, Extension of Terquem's theorem respecting the circle which bisects three sides of a triangle, Quart. Journ., Bd. 4, 1861, S. 260—261.

***) Salmon, On the circle which touches the four circles which touch the sides of a given spherical triangle, Quart. Journ., Bd. 6, 1864, S. 67—73.

†) Casey, On the equations and properties — (1) of the system of circles touching three circles in a plane; (2) of the system of spheres etc., Proc. of Irish Ac., Bd. 9, 1867, S. 396—423.

14. Die oben erwähnte Beziehung ist von Casey aus einer identischen Beziehung zwischen vier Punkten einer Geraden,

$$DA \cdot BC + DB \cdot CA + DC \cdot AB = 0,$$

durch Inversion abgeleitet worden. Sie ist die irrationale Form einer Beziehung in Determinantenform zwischen den Quadraten von sechs gemeinschaftlichen Tangenten, die vier von einem fünften berührte Kreise bestimmen. Ich mufs mich damit begnügen, nachdrücklich hervorzuheben, in welchem Mafse die Kreislehre dadurch gefördert wurde, dafs den von Staudt, Baltzer, Cayley, Siebeck aufgestellten Beziehungen zwischen den Entfernungen zweier Gruppen von Punkten die entsprechenden Beziehungen zwischen den gemeinsamen Tangenten zweier Gruppen von Kreisen oder Kugeln, sowie unter den cos. ihrer Schnittwinkel an die Seite gestellt wurden. Es ist allgemein bekannt, mit welcher Leichtigkeit man auf diese Art die Gleichung eines Paares von Kugeln aufstellen kann, die vier gegebene Kugeln unter gegebenen Winkeln schneiden, oder mit ihnen Tangenten von gegebener Länge bestimmen, oder endlich fünf Kugeln so schneiden, dafs die cos. der Schnittwinkel gegebene Verhältnisse, die Quadrate der gemeinsamen Tangenten gegebene Differenzen aufweisen. In den grofsen Arbeiten von Darboux*) und Frobenius**) werden alle diese Aufgaben und die entsprechenden auf der Kugel und in der Ebene mit spielender Leichtigkeit gelöst. Frobenius besonders hat direct aus den Determinantengleichungen heraus schöne Constructionen abgeleitet, wofür ein Beispiel oben angeführt wurde. Die erste Betrachtung dieser Art ist wohl die Arbeit von Mertens***), in welcher die quadratische Gleichung für die Radien eines Kugelpaares, das vier gegebene berührt, wirklich aufgestellt wird, indem für ihre Coefficienten einfache Determinantenausdrücke gegeben werden.

Ich glaube, hier meine Entwickelung abbrechen zu können; es ist nicht meine Aufgabe, das Heer der Abhandlungen aufzuzählen, in denen mit gröfster Unermüdlichkeit, analytisch wie synthetisch, immer auf's neue Varianten der Constructionen aufgeführt werden, die seit den Entwickelungen von Gergonne, Gaultier, Poncelet und Steiner feststehen. Für die analytische Begründung der Gergonne-Gaultier'schen Construction hat sich eine Methode herausgebildet, die sich in den Lehrbüchern ziemlich genau wiederholt; als endgültige Form kann man wohl die Fassung, wie sie bei Hesse vorkommt, betrachten.†)

) a. a. O. S. 90.

) a. a. O. S. 114.

***) Mertens, Auszug aus einem Schreiben des Herrn Mertens an den Herausgeber, Crelle's Journ., Bd. 77, 1874, S. 102—104.

†) Hesse, Vorlesungen aus der analytischen Geometrie der geraden Linie, des Punktes und des Kreises in der Ebene (Leipzig 1865), Leipzig 1881, S. 224ff.

Zweiter Teil.

Von Poncelet bis auf Steiner (1822—1832).

Erster Abschnitt.

Der Traité und Entwickelungen, welche sich unmittelbar an ihn knüpfen.

XVI. Traité, Section I.

1. Bekanntlich hat Poncelet die ersten Entwürfe zu dem fundamentalen Werk, das er 1822 unter dem Titel: „Traité des propriétés projectives des figures" veröffentlichte, als russischer Kriegsgefangener in Saratoff in den Jahren 1812 und 1813 verfafst. Während der folgenden Jahre haben seine ursprünglich vielfach analytischen Entwickelungen die Form angenommen, die wir jetzt bewundern.*)

Die Aufmerksamkeit lenkt sich zunächst auf die Stelle der Einleitung, in der das Continuitätsprincip ausgesprochen wird (S. XIV). „Ist eine Figur aus einer anderen durch eine stetige Veränderung hervorgegangen und „ebenso allgemein als diese", so kann eine an der ersten Figur erwiesene Eigenschaft ohne weiteres auf die andere Figur übertragen werden." Die einzige Schwierigkeit besteht darin, genau zu entscheiden, ob der Zustand einer Figur ein allgemeiner oder ein besonderer ist. In speciellen Fällen ist dies jedoch stets mit Leichtigkeit zu erkennen. Zu einer ebenen Curve stehen z. B. die Geraden nicht in engerer Beziehung, welche sie in reellen Punkten treffen, als diejenigen, welche sie überhaupt nicht schneiden. Beim Beweise einer Eigenschaft der Curve kann man sich also auf eine beliebige der überhaupt möglichen Anordnungen stützen. Von

*) Die so entstandenen Hefte sind später, 1862 und 1864, wohl wesentlich aus polemischen Rücksichten, herausgegeben worden. Vielfach werden Gegenstände behandelt, die Poncelet in späteren Abhandlungen, im engsten Anschlufs an den Traité, in teilweise stark veränderter Gestalt in den Jahren 1822—1832 veröffentlicht hat. Vgl. Poncelet, Applications d'analyse et de Géométrie qui ont servi de principal fondement au traité des propriétés projectives des figures, Bd. 1 u. 2, Paris 1862 u. 1864.

einer eigentlichen Begründung des Princips kann der Natur der Sache nach nicht die Rede sein. Einige der Sätze Poncelet's, welche für seine Denkweise bezeichnend sind, will ich anführen. Aus welchem Grunde, fragt er, soll die rationelle Geometrie ein Hülfsmittel verschmähen, das in der Analysis, dann bei der Anwendung derselben ohne weiteres zugelassen wird? Nimmt man das Ergebnis einer Rechnung blindlings als richtig an, auch wenn Quadratwurzeln im Laufe derselben eingeführt werden, von deren Realität man sich nicht ausdrücklich überzeugt hat, so kann man niemandem verwehren, entsprechende Erleichterungen auch bei rein geometrischen Begründungen anzuwenden. „Wenn nicht als Beweismittel, mufs man das Continuitätsprincip doch wenigstens als Mittel zur Entdeckung und Erfindung zulassen. Ist es nicht ebenso wichtig, die Hülfsmittel kennen zu lernen, welche geniale Männer zur Auffindung der Wahrheit gebraucht haben, als die Anstrengungen, welche sie machen mufsten, um sie nach dem Geschmack der furchtsamen Geister, die sich auf ihre Höhe nicht erheben können, zu erweisen?“

Wenn auch die Rücksicht auf das Imaginäre ganz wesentlich zur Aufstellung des Continuitätsprincips genötigt hatte, so war damit nach Poncelet's Ansicht sein Inhalt keineswegs erschöpft, in ihm ist z. B. schon das vorgebildet, was man jetzt Princip der Erhaltung der Anzahl nennt. Aus dem Continuitätsprincip folgert er unter anderem, dafs zwei Curven m^{ter} und n^{ter} Ordnung mn Schnittpunkte mit einander gemein haben, weil zwei Gruppen von m bez. n Geraden sich in $m \cdot n$ Punkten begegnen.*)

---

*) Ursprünglich war den Entwickelungen über das Continuitätsprincip ein viel gröfserer Raum zugedacht. Die Abhandlung, die Poncelet später unter dem Titel: Considérations philosophiques et techniques sur le principe de continuité dans les lois géométriques (a. a. O., Bd. 2, S. 296—362) veröffentlicht hat, sollte mit einer ganz kurzen Übersicht über die Haupteigenschaften der Kegelschnitte erscheinen (1818). Infolge eines Briefwechsels mit Terquem, Servois und Brianchon (a. a. O., S. 530—552) nahm Poncelet von dieser Veröffentlichung Abstand. Im Zusammenhang mit diesen Entwickelungen steht das 1815 verfafste dritte Heft (a. a. O., S. 167—295), in welchem Poncelet die Stellung seines Continuitätsprincips zu dem Correlationsprincip Carnot's erörtert. Das fünfte Heft (S. 365—454) bildet den Text der Arbeit, welche Poncelet unter dem Titel: Essai sur les propriétés projectives des sections coniques am 1. Mai 1820 der Pariser Akademie vorlegte. Es schliefst sich ziemlich genau dem Traité an. Poncelet führt hier den Namen „principe de continuité“ erst ganz zum Schlufs (S. 451) ein, nachdem er auseinandergesetzt hat, dafs zwei Kegelschnitte „im allgemeinen“ als Projectionen zweier Kreise angesehen werden können, und hervorgehoben hat, dafs projectivische Eigenschaften eines Kreispaares sich ohne weiteres auf zwei beliebige Kegelschnitte ausdehnen lassen. So schüchtern Poncelet hier sein Princip aussprach, so erregte es doch Cauchy's Bedenken, der in seinem Bericht über die Poncelet'sche Abhandlung ausdrücklich vor zu voreiliger Anwendung des Princips warnt: Rapport à l'académie royale

2. Die Dreiteilung welche bei den Untersuchungen der ersten Epoche hervortrat, läfst sich auch in dem Traité beobachten. Man kann Poncelet's Untersuchungen einteilen in solche zur Kegelschnittlehre, zur Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung, die im Supplément behandelt werden, und zur Kreislehre. Im ersten Capitel der section I., — das ganze Werk zerfällt in vier sections — beschäftigt sich Poncelet mit den Gesetzen der projectivischen Beziehung. Da die descriptiven Beziehungen perspectivischer Ebenen später erörtert werden, handelt es sich zunächst um Merkmale, an denen metrische Beziehungen als projectivisch zu erkennen sind. Man projicire eine aus den Punkten $A, B, C, \ldots$ bestehende Figur von einem beliebigen Punkte S aus. Man kann alsdann jede einzelne Strecke AB in der Form $\frac{SA \cdot SB \sin ASB}{p}$ ausdrücken; p ist hierbei das von S auf AB gefällte Lot. Eine Beziehung zwischen AB, AC, $BC, \ldots$ kann nun so beschaffen sein, dafs nach Einsetzung obiger Ausdrücke SA, SB, $SC, \ldots$ und die p von selbst herausfallen. In diesem Fall ist die Beziehung projectivisch und besteht in der neuen

---

des sciences; par M. Cauchy; sur un mémoire relatif aux propriétés projectives des sections coniques, par M. Poncelet, capitaine du génie, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 69—83. Gergonne hat diesen Abdruck des Rapports mit Anmerkungen begleitet, in deren einer er das Princip als ein kostbares Mittel zur Entdeckung neuer Wahrheiten, das aber gleichwohl unanfechtbare Beweise nicht erspare, bezeichnet. Cauchy's Bericht hat — wie mir scheint, mit Unrecht — Poncelet's Entrüstung verursacht, der er mehrere Jahrzehnte später in mafsloser Weise Ausdruck gegeben hat, (a. a. O., Bd. 2, S. 553—569), nachdem er es schon früher an gelegentlichen Hinweisen nicht hatte fehlen lassen. Man kann ihm vielleicht zugeben, dafs Cauchy, anstatt in lange analytische Entwickelungen über die ideellen gemeinschaftlichen Sehnen zweier Kegelschnitte sich einzulassen, genauer auf Poncelet's Sätze eingehen konnte. Man wird ferner seine Einwendungen gegen das Continuitätsprincip nicht für sehr glücklich halten. In seiner Anwendung auf das Imaginäre ist es, nach Hankel's glücklichem Ausdruck, nichts als „ein Geschenk, das die Geometrie von der Analysis empfangen hatte". Als die synthetische Geometrie freilich aus dem ersten Stadium ihrer Entwickelung herausgetreten war, ihre Aufgabe nicht mehr in der Abkürzung der Beweise, selbst auf Kosten der Reinheit der Methode, erblickte, sondern in der völligen Aufdeckung der eigentlichen Quellen der Sätze, mufste selbstverständlich das Continuitätsprincip in seiner ursprünglichen Form unbefriedigend erscheinen. Wir sehen verhältnismäfsig früh, zuerst bei Seydewitz und Paulus, das Streben, mit Hülfe der Polareigenschaften des Kegelschnittes Paare imaginärer Punkte oder Strahlen durch elliptische Involutionen zu ersetzen und diejenigen Betrachtungen mit rein geometrischen Mitteln zu erledigen, bei denen imaginäre Elemente nur paarweise auftreten. Erst Staudt gelingt es, die imaginären Elemente eines Paares in einfacher Weise zu trennen, die imaginären Elemente dem Fundamentalsatz der projectivischen Geometrie unterthan zu machen und so das Geschenk, das unter den Händen der Geometer zu den schönsten Ergebnissen geführt hatte, der analytischen Geometrie zurückzustellen.

trigonometrischen Form bei einer räumlichen oder ebenen Figur, die zu der gegebenen hinsichtlich S perspectivisch ist. (11 und 17)*). Wird noch jeder Geraden der einen eine Gerade der zweiten Figur zugeordnet, so überträgt sich eine projectivische Beziehung unter den Entfernungen der ersten Figur auf die entsprechenden Entfernungen der neuen Figur. Poncelet erläutert dies unter Hinweis auf Brianchon an dem Doppelverhältnis (21), ferner überträgt er die schon oben benutzte Beziehung

$$\prod \frac{AB_1 \cdot AB_2}{AC_1 \cdot AC_2} = 1$$

unter den sechs Schnittpunkten eines Kreises mit den Seiten eines Dreiecks als projectivisch auf den Kegelschnitt.**) Besonders bei den Transversalen-Betrachtungen, die das erste Capitel der Section II bringt, macht Poncelet von seiner Auffassung Gebrauch. Liegen auf den Seiten AB, BC, CD, . . . eines Polygons die Punkte m, n, o, . . ., so ist der Ausdruck

$$\frac{mA \cdot nB \cdot oC \cdots}{nA \cdot oB \cdot pC \cdots}$$

projectivischer Natur, behält also seinen Wert auch für ein perspectivisches Polygon $A'B'C'D'\ldots$, wenn $m', n', o', \ldots$ die Projectionen der Punkte $m, n, o, \ldots$ auf die neuen Seiten sind. Liegen $m, n, o, \ldots$ mit dem projicirenden Centrum in einer Ebene, und projicirt man die Figur in eine zu ihr parallele Ebene, so werden $n'A'$ und $n'B'$ gleichzeitig unendlich grofs; ihr Quotient und also auch der ursprüngliche Ausdruck hat daher den Wert 1.***)

Aus Transversalensätzen wird der Desargues'sche Satz von den perspectivischen Dreiecken abgeleitet; sodann folgt im engsten Anschlufs an Brianchon's Mémoire die Behandlung der Involution. Die Ableitung des Desargues'schen Involutionssatzes erfährt eine erhebliche Abkürzung. Ich habe [II, 15] das Bewegungsgesetz angegeben, in das Poncelet den Satz überführt. In der Folge werden sich die Folgerungen zeigen, die sich aus ihm ziehen lassen.

---

*) Die Zahlen dieses Abschnitts beziehen sich auf die Paragraphen der zweiten Auflage (Bd. 1, Paris 1865), die Lesern dieses Berichtes jedenfalls leichter zugänglich ist, als die erste. Poncelet hat die wenigen Abweichungen gegen die erste Auflage genau aufgeführt. Wo es durch die Umstände geboten war, habe ich natürlich die erste Auflage verglichen. Eine solche Stelle kommt z. B. in VI, 7 vor.

**) Carnot hatte einen solchen Beweis angestrebt; Brianchon bediente sich des Umweges über die Involutionsbeziehung [II, 11].

***) Bereits Carnot hatte den räumlichen Satz durch Parallelprojection längs einer Geraden der Hülfsebene aus einem Satz der Ebene abgeleitet, diesen selbst durch Combination von Dreiecken gewonnen. Vgl. Carnot, mémoire sur la relation etc., Paris 1806, S. 71. Der Fall des Dreiecks wird von Ptolemäus im Almagest behandelt.

3. Hiermit habe ich freilich vorgegriffen und mufs zunächst zu Sect. I, Cap. II und III zurückkehren, die uns die grundlegenden Entwickelungen des Werkes darbieten. Cap. II ist zum einen Teil der Betrachtung ideeller gemeinschaftlicher Sehnen zweier Kegelschnitte gewidmet. Die Relation

$$OM^2 = p \cdot OA \cdot OB$$

ergiebt, wenn O die Gerade AB durchläuft, OM in bestimmter Richtung aufgetragen und auf das Vorzeichen keine Rücksicht genommen wird, zwei verschiedene Kegelschnitte, die sich in den Punkten A und B berühren. Jeder dieser beiden Kegelschnitte stellt die imaginären Punktepaare des anderen dar, deren reelle Verbindungslinien zu der Richtung von OM parallel sind.

Eine ideelle Secante zweier Kegelschnitte enthält also zwei reelle Schnittpunkte der für ihre Richtung den beiden Kegelschnitten conjugirten Kegelschnitte. In einem ihrer Punkte, O, schneiden sich die zu ihrer Richtung conjugirten Durchmesser der beiden Kegelschnitte, und es ist aufserdem für ihn

$$p \cdot OA \cdot OB = p' \cdot OA' \cdot OB',$$

wenn man auf den zweiten Kegelschnitt die gestrichenen Buchstaben bezieht (56). Zwei Kegelschnitte in einer Ebene haben, wenn sie sich nicht in reellen Punkten treffen, sicherlich ideelle Secanten mit einander gemein. Die Durchmesser der beiden Kegelschnitte, welche zu derselben Richtung paralleler Sehnen conjugirt sind, ergeben in ihren Schnittpunkten einen Ort für den Punkt O, welcher auch die Mittelpunkte der beiden Kegelschnitte enthält. Handelt es sich z. B. um zwei Ellipsen, von denen eine die andere ausschliefst, so mufs die Hülfscurve jede der beiden Ellipsen mehrmals treffen. Durchläuft O den Bogen von einem Austritt aus der einen bis zum nächsten Eintritt in die zweite Ellipse, so verändern sich die Gröfse $p \cdot OA \cdot OB$ und $p' \cdot OA' \cdot OB'$ stetig in der Art, dafs erstere mit dem Werte 0 beginnt, letztere hingegen endigt. Inzwischen giebt es wenigstens eine Lage mit gleichen Werten, die eine ideelle Secante bestimmen.*) Das Ergebnis solcher Stetigkeitsbetrachtungen stellt Poncelet etwa folgendermafsen (59) dar: Zwei Kegelschnitte, welche in derselben Ebene liegen, haben „im allgemeinen", das heifst für Lagen, zu deren Herbeiführung keine Bedingungen erforderlich sind, eine ideelle Secante mit einander gemein, ganz genau so, wie sie „im allgemeinen"

*) Man wird gegen diese Betrachtung einwenden müssen, dafs der Ort der Punkte O, der später als Kegelschnitt erkannt wird, eine Hyperbel ist, deren Asymptoten die gemeinschaftlichen conjugirten Richtungen der beiden Ellipsen angeben. Es fragt sich also, ob solche Stücke der Curve, die Poncelet voraussetzt, existiren.

(pour des situations indéterminées) reelle Punkte und Secanten gemeinsam haben.

Das Continuitätsprincip gestattet, Eigenschaften, die der einen Mannigfaltigkeit zukommen, auf die andere zu übertragen.

4. Von den Kreiseigenschaften, die den Rest des Capitels füllen, kommen einige erst in der Folge zur Anwendung. Für zwei Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung ist die Schnittlinie ihrer Ebenen eine gemeinsame reelle oder ideelle Secante. Dreht man umgekehrt z. B. zwei Kreise mit gemeinsamer Secante um diese Gerade als Charnier, so gelangen sie auf dieselbe Kugel. Beide Kreise und alle, die mit ihnen die Secante gemein haben, erhalten also von jedem ihrer Punkte aus gleiche Tangenten; sie ist der Ort der Mittelpunkte der Kreise, welche alle Kreise des Büschels senkrecht schneiden. Schneiden sich zwei Kreise unter rechtem Winkel, so wird jeder Durchmesser des einen durch die auf ihm liegenden Punkte des anderen harmonisch getrennt. (79). Die Polaren eines beliebigen Punktes hinsichtlich der Kreise eines Büschels laufen deshalb in einem zweiten, dem reciproken, Punkte zusammen, der mit ihm einen Durchmesser eines Orthogonalkreises des Büschels begrenzt. Derselbe ist durch die Mittelpunkte K und L der Nullkreise des Büschels, falls es sich um eine ideelle Secante handelt, eindeutig festgelegt (81). Ein Orthogonalkreis des Büschels enthält zwei Punkte A, B einer Geraden und die zu ihnen reciproken Punkte A', B'. $A'B'$ bewegt sich so parallel zu AB, daſs ihr Mittelpunkt eine zur Secante parallele Gerade durchläuft und an ihrem Schnittpunkt S mit KL die Relation

$$SA' \cdot SB' = SK \cdot SL$$

erfüllt bleibt. Nach dem Potenzsatz des Apollonius ist also zu einer beliebigen Geraden ein Kegelschnitt reciprok, der die Grenzpunkte und überdies den unendlich fernen Punkt der gemeinschaftlichen Secante enthält (83 und 84). Da zwei reciproke Punkte an jedem der Grenzpunkte K, L einen rechten Winkel bestimmen und ihre Verbindungslinie durch die gemeinschaftliche Secante halbirt wird, artet dieser Kegelschnitt in eine Gerade aus, sobald die gegebene einen der Grenzpunkte oder den unendlich fernen Punkt der Secante enthält. Diese drei Punkte bilden das gemeinsame Polardreieck aller Kreise des Büschels. Bei der Übertragung auf die Kegelschnittlehre erweist sich dieser Kegelschnitt besonders in seiner zweiten Bedeutung — als Ort der Pole der Geraden in Bezug auf die Kreise des Büschels — als wichtig.

5. Zwei ähnliche und ähnlich gelegene Hyperbeln haben notwendig zwei durch ihre Asymptoten bestimmte unendlich ferne Punkte mit einander gemein. Zwei ähnlichen und ähnlich gelegenen Ellipsen entsprechen für eine beliebige Richtung conjugirte Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptotenrichtungen. Wir sind also zu der An-

schauung genötigt, dafs ähnliche und ähnlich gelegene Ellipsen eine ideelle unendlich ferne Sehne gemein haben, deren Richtung aber unbestimmt geworden ist, da die eben angeführte Betrachtung an jedes Paar conjugirter Hyperbeln angeknüpft werden kann. Sind die beiden Ellipsen concentrisch, so sind es auch zwei entsprechende conjugirte Hyperbeln. Man mufs also die Ellipsen als Kegelschnitte ansehen, die sich doppelt berühren; die Berührungssehne ist in's Unendliche hinausgerückt. Kreise sind immer ähnlich; man kann also aus dem Obigen die Anschauung ableiten, die ich mit Poncelet's Worten anführen will (94): „Des cercles placés arbitrairement sur un plan ne sont donc pas tout à fait indépendants entre eux . . .; ils ont idéalement deux points imaginaires communs à l'infini." Fügen wir hierzu noch die anderen Worte (96): Le principe de continuité . . . „veut que tous les points à l'infini d'un plan puissent être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, située elle-même à l'infini sur ce plan," so haben wir den Übergang von der älteren zur modernen synthetischen Geometrie gekennzeichnet.

6. Im dritten Capitel der Sect. I giebt nun Poncelet in der Entwickelung der Gesetze der Projection einer Ebene auf die andere gleichsam das Programm seines Werkes. Ein Punkt wird in einen Punkt, eine Gerade in eine Gerade, und folglich ein Strahlbüschel in einen Strahlbüschel projicirt. Aus einem System von Parallelen entsteht ebenfalls eine Gruppe von Strahlen, die von einem Punkte ausgehen. Enthält die erste Figur mehrere Gruppen von Parallelen so strahlen die entsprechenden Gruppen der zweiten Ebene von Punkten einer Geraden aus, und es folgt so aus den Gesetzen der Perspective die Bestätigung dessen, was sich auf „metaphysischem" Wege schon bei der Betrachtung ähnlicher Kegelschnitte gezeigt hatte, dafs alle unendlich fernen Punkte einer Ebene auf einer und derselben Geraden liegen (106, 107). Einen Kegelschnitt kann man so projiciren, dafs zwei bestimmte Punkte in's Unendliche sich entfernen. Als Specialfall ist das Gesetz anzusehen, dafs ein Kegelschnitt „im allgemeinen" derart in einen Kreis projicirt werden kann, dafs eine bestimmte Gerade ins Unendliche sich entfernt. In reeller Weise ist die Projection dann möglich, wenn die gegebene Gerade eine ideelle Sehne des Kegelschnittes ist. Alsdann ist der Ort des Projectionscentrums ein Kreis, dessen Ebene im Mittelpunkt der Sehne senkrecht steht; sein Radius ist halb so grofs als die Sehne, welche die Gerade mit dem ihrer Richtung zugehörigen conjugirten Kegelschnitt gemein hat. Zwei Kegelschnitte lassen sich „im allgemeinen" in zwei Kreise projiciren, der Ort des Projectionscentrums besteht aus sechs, den verschiedenen gemeinschaftlichen Sehnen entsprechenden Kreisen. Ich habe ganz im Beginn des Referates der Meinung Ausdruck gegeben, dafs diese Anschauung auf Monge's

mündliche Unterweisung zurückzuführen sei. Jedenfalls wird die eine oder andere Form derselben von verschiedenen Autoren, z. B von Brianchon*) und Gergonne**), als allgemein bekannt vorausgesetzt. Der erste Versuch einer analytischen Behandlung des Ortes der Projectionscentra, von denen aus zwei Kegelschnitte in zwei Kreise projicirt werden können, fällt in das Jahr 1817.***) Unbestritten aber bleibt das Verdienst Poncelet's, durch Einführung der unendlich fernen Kreispunkte die eigentliche Bedeutung des Satzes erst recht hervorgehoben zu haben. Poncelet leitet aus seinen Principien folgende Untersuchungsmethode ab. Der Kreis wird zunächst als Ort der Punkte eingeführt, die von einem Mittelpunkte gleiche Entfernung haben. Hat man auf dieser Grundlage eine Eigenschaft einer Kreisgruppe abgeleitet, bei welcher der Kreis nur in seiner Eigenschaft als Curve zweiter Ordnung auftritt, so kann man statt der Kreise eine Gruppe von Kegelschnitten einführen, die zwei — reelle oder conjugirt imaginäre — Punkte mit einander gemein haben. Concentrische Kreise werden hierbei durch Kegelschnitte ersetzt, die sich in den beiden genannten Punkten berühren. Aus diesem Hauptprincip wird, wie schon hervorgehoben (II, 8), der Pascal'sche Satz abgeleitet, ihm ist also auch die Kette von Entwickelungen untergeordnet, bei denen am Kegelschnitt selbst, als an einem dem Pascal'schen Satz unterworfenen Gebilde, die Lehrsätze entwickelt werden. In ihnen ist die dritte Stufe der Entwickelung der synthetischen Geometrie, welche den Kegelschnitt als Erzeugnis projectivischer Gebilde auffaſst, nahe vorgebildet, aber doch nicht vollständig erreicht.

Poncelet streift übrigens eine allgemeinere Frage. Soll die Projection eines Kegelschnitts zu einem zweiten gegebenen ähnlich sein, so ist, wenn eine bestimmte Gerade sich ins Unendliche entfernen soll, der Ort des Projectionscentrums eine Ringfläche, die ein Kreis der Kegelschnittebene bei der Rotation um die Gerade beschreibt. Sie geht in eine Kugel über, wenn die Projection eine gleichseitige Hyperbel ist.

---

*) Brianchon, Solution de plusieurs problèmes de géométrie, Journ. de l'éc. pol., Heft 10, 1810, S. 1—13 (Nr. XX).

**) Gergonne, Application de la doctrine des projections etc., Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 78—84. Gergonne benutzt zwei aufeinanderfolgende Projectionen, um einen Kegelschnitt in einen Kreis zu verwandeln und eine Gerade ins Unendliche zu entfernen.

***) Ebauche de solution du problème de géométrie, proposé à la page 128 de ce recueil; Par un Abonné; Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 373—379.

Januschke, Hans, k. k. Direktor der Staats-Oberrealschule in Teschen, das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. Gebunden n. ℳ 12.—

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik. I. Band: Mechanik. 4. Aufl. herausg. von Prof. Dr. W. Wien. Mit 18 Figuren im Text. [X u. 464 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 13.—

Klein, F., und **A. Sommerfeld,** über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8. geh.

I. Heft: Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. n. ℳ 5.60.

II. Heft: Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. n. ℳ 10.—

III. Heft in Vorbereitung.

Krause, Dr. **Martin,** Professor an der Königl. Sächs. Technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. (In 2 Bänden.) Zweiter Band. [XII u. 306 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 12.—

Kronecker's, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. (In 4 Bänden.) Zweiter Band. [VIII u. 540 S.] gr. 4. 1897. geh. n. ℳ 36.—

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 24.—

v. Lilienthal, Dr. **R.,** a. o. Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Minkowski, Dr. **Hermann,** o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. Erster Band. Mit eingedruckten Holzschnitten. [X u. 388 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Neumann, Dr. **C.,** Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorieen. Zweiter Theil: Ueber die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. [XXXVIII u. 462 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. Schoenflies u. Fr. Pockels. In 2 Bänden. gr. 8. 1895/96. geh. n. ℳ 50.—

I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. ℳ 20.—

II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. ℳ 30.—

Routh, John Edward, Sc. D., Ll. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Felix Klein. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Fig. im Text. [XII u. 472 S.] 1897. n. ℳ 10.—

II. Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Fig. im Text. [X u. 544 S.] 1898. n. ℳ 14.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zwei Theile. I. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 448 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 8.—

Schell, W., allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Curventheorie. 2. erweiterte Auflage. [VIII u. 163 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 5.—

Schlesinger, Ludwig, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bde. gr. 8. geh. n. ℳ 50.—
I. Band: [XX u. 487 S.] 1895. n. ℳ 16.—
II. Band: I. Teil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] 1897. n. ℳ 18.—
II. Band: II. Teil. Mit Figuren im Text. [XIV u. 446 S.] 1898. n. ℳ 16.—

Schubert, Dr. **Herm.,** fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. geb. n. ℳ. 4.—

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band: Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 10.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Tle. II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearb. von Heinrich Schröter. 3. Aufl. von Rudolf Sturm. Mit 103 Figuren im Text. [XVII u. 538 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. **Otto,** ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil: Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. III. Band: Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.— [Band IV: Die Lehre vom Licht in Vorbereitung.]

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Fünfter Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die Entwickelung der synthetischen Geometrie.

I. Teil: Von Monge bis auf Staudt, 1847.

Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

von

Ernst Kötter,
Professor an der technischen Hochschule zu Aachen.

2. (Schlufs-) Lieferung.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

A. Wangerin in Halle a. S.

A. Gutzmer in Jena.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1901.
Ausgegeben am 25. Juni 1901.

Hervorgegangen aus dem seit Jahren empfundenen Bedürfnisse nach einem engeren wissenschaftlichen und persönlichen Zusammenschlufs der Fachgenossen, hat sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung gebildet mit der Aufgabe: „in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem kollegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten".

Dementsprechend bringen die Jahresberichte u. a. über die geschäftlichen Angelegenheiten und über die auf den Jahresversammlungen gehaltenen Vorträge Berichte, ferner alljährlich ein Verzeichnis der Mitglieder mit genauer Adressenangabe, Nekrologe über die verstorbenen Mitglieder mit beigefügten Bildnissen und enthalten aufserdem gröfsere Referate über einzelne Zweige der gesamten mathematischen Wissenschaften. Diese Referate, welche den gegenwärtigen Stand unserer bez. Kenntnisse in historisch-kritischer Darstellung zusammenfassen, sind von anerkanntem wissenschaftlichen Werte; sie bieten jedem die Möglichkeit, einen Einblick in die geistigen Bestrebungen der Gegenwart zu gewinnen, wie ihn auch derjenige besitzen sollte, der durch seinen Beruf mehr oder weniger an der selbstthätigen Fortbildung der Wissenschaft gehindert ist.

In den bisher erschienenen Bänden [I. 1892. ℳ 7.60; II. 1893. ℳ 4.50; III. 1894. ℳ 16.—; IV. 1897. ℳ 16.—; V. 1897/98. ℳ 7.20; VI. 1899. ℳ 8.—; VII. 1899. ℳ 12.80; VIII. 1900. ℳ 16.—; IX. 1901. ℳ 9.—] kamen folgende gröfsere Referate zum Abdruck:

I: **W. Frz. Meyer:** Die Fortschritte der projectiven Invariantentheorie im letzten Vierteljahrhundert. 1892.
II: **Fr. Kötter:** Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. 1893.
III: **A. Brill** und **M. Noether:** Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. 1894.
III: **L. Henneberg:** Über die Entwicklung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. 1894.
IV: **D. Hilbert:** Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. 1897.
V: **E. Kötter:** Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. 1898.
VI: **G. Bohlmann:** Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. 1899.
S. Finsterwalder: 1) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. 2) Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. 1899.
VII: **E. Czuber:** Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. 1899.
VIII: **A. Schoenflies:** Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. 1900.
IX. **K. Heun:** Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. 1900.

In Vorbereitung für die nächsten Bände befinden sich:

Burckhardt: Die Ausbildung der Methode der Reihenentwicklungen an physikalischen Problemen. Erster Hauptteil. [Unter der Presse.]
R. Haussner: Numerische Auflösung von Gleichungen.
A. Kneser: Bericht über die Variationsrechnung.
E. Kötter: Die Entwicklung der synthetischen Geometrie. Teil II.
G. Kowalewski, G. Scheffers, F. Schur: Referate über die Arbeitsgebiete von Sophus Lie.
R. Mehmke: Bericht über die graphischen Methoden.
Müller-Breslau: Über die modernen Methoden zur statischen Berechnung der Bauconstructionen.
L. Schlesinger: Über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen.
A. Schoenflies: Über Curven- und Punktmannigfaltigkeiten. II.
P. Stäckel: Über die allgemeine Dynamik.
E. Steinitz: Bericht über die Theorie der endlichen Gruppen.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung zählt z. Z. rund 500 Mitglieder. Diese erhalten obige Publication bei directem Bezuge von der Mathematiker-Vereinigung zu einem Vorzugspreise. Anmeldungen zur Mitgliedschaft nimmt Prof. Dr. **A. Gutzmer** in Jena, Wildstrafse 2, entgegen. Der jährliche Mitgliedsbeitrag beträgt 2 Mark, kann aber auch durch einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

XVII. Poncelet's Traité, Section II und III.

1. Wie bereits hervorgehoben, ist das erste Capitel der Section II der Transversalentheorie gewidmet; das zweite Capitel beginnt mit einer Entwickelung, die schon vielfältig als Beispiel für die Schlufsweise des Traité wiedergegeben wurde. Zeichnet man einem Kreise ein Rechteck ein, zieht die zu seinen Seiten parallelen und die in seinen Eckpunkten berührenden Tangenten, die paarweise zu einander parallel sind, so sind die zu den Seiten des Rechtecks parallelen Durchmesser Symmetrie-Axen der Figur; es ergiebt sich deshalb durch Centralprojection ohne weiteres der Satz vom eingeschriebenen Viereck und dem zugehörigen umgeschriebenen Vierseit. Aus ihm fliefsen die Polareigenschaften des Kegelschnittes ab. Der Satz von dem Polardreieck, das mit einem eingeschriebenen Viereck gegeben ist, wird in folgendes Bewegungsgesetz umgeformt (192): „Ist jeder von drei Punkten der Pol der Verbindungslinie der beiden anderen, so kann man ein Dreieck derart verschieben, dafs seine Ecken auf dem Kegelschnitt fortschreiten und seine Seiten sich um die drei Punkte drehen."

Ein Kegelschnitt kann in ein Geradenpaar zerfallen, alsdann ist der Ort der vierten harmonischen Punkte eines festen Pols eine Gerade durch den Kreuzungspunkt der beiden gegebenen. Poncelet knüpft hieran einige Bemerkungen über die Geometrie der geraden Linie (197—199). Er löst zunächst die beiden Lambert'schen Aufgaben, durch einen Punkt eine Gerade zu legen, die den unzugänglichen Schnittpunkt zweier Geraden enthält; ferner die andere, unter alleiniger Benutzung eines festen Parallelogramms und des Lineals durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer Geraden zu ziehen. Poncelet führt die letztere Aufgabe auf die erstere zurück, indem er erst eine Parallele zur gegebenen Geraden zieht unter Benutzung des Desargues'schen Satzes von den perspectivischen Dreiecken; Lambert's Lösung der Aufgabe war etwas directer. Construirt man ein Viereck, dessen sechs Seiten die Schnittpunkte der Seiten und Diagonalen des Parallelogramms mit der gegebenen Geraden enthalten, so liegen zwei der drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten, von denen man einen mit dem gegebenen Punkte identisch machen kann, auf einer Parallelen zur Geraden.*) Poncelet's Lösung würde, projectivisch verallgemeinert, folgende Aufgabe lösen: Gegeben als Schnittpunkte gerader Linien zwei unzugängliche Punkte; man soll eine Gerade nach dem Schnittpunkt ihrer Verbindungslinie mit einer gegebenen Geraden

*) Lambert, freye Perspective, Zürich 1774, Zweiter Theil, S. 169. Eine andere Lösung des Problems führt Poncelet auf S'Gravesande zurück.

ziehen. Diese Aufgabe ist etwas allgemeiner als die schon von Servois auf mehrfache Art gelöste, Punkte der Geraden, wenn solche zugänglich sind, anzugeben.*) Auch Lambert hat schon die Ergänzungen dieses Kreises von Aufgaben, — Teilung einer Strecke in eine Anzahl gleicher Teile, wenn eine Parallele vorliegt etc. —, gegeben.

2. Es folgt jetzt ein Abschnitt über den Pascal'schen und Brianchon'schen Satz. Ersterer wird genau nach der Gergonne'schen Methode — Projection des Sechsecks in ein Kreis-Sechseck mit drei Paaren paralleler Seiten — abgeleitet, letzterer nach Brianchon's ursprünglicher Methode unter Benutzung der Polareigenschaften des Kegelschnittes entwickelt. Die linearen Constructionen des Kegelschnittes aus fünf Punkten und Tangenten und deren Grenzfälle werden erörtert (201—214). Aus dem Brianchon'schen Satz läſst sich ein sehr bemerkenswerter Transversalensatz ableiten: Man bilde aus vier Tangenten ein umgeschriebenes Vierseit $ABCD$; schneidet eine fünfte Tangente AB und CD in L und N, eine sechste BC und DA in M und P, so ist (215):

$$AL \,.\, BM \,.\, CN \,.\, DP = BL \,.\, CM \,.\, DN \,.\, AP.$$

Die Tangente gleitet also an dem Kegelschnitt nach dem Gesetz:

$$\frac{AL}{BL} : \frac{DN}{CN} = \frac{CM}{BM} : \frac{DP}{AP}.$$

Für den Fall der Parabel kann sich die sechste Tangente ganz ins Unendliche entfernen, man erhält die Beziehung:

$$\frac{AL}{BL} : \frac{CN}{DN} = 1,$$

aus welcher sofort die Erzeugung durch ähnliche Punktreihen sich ergiebt (222). Auch im allgemeinen Fall behält die linke Seite, wenn LN am Kegelschnitt gleitet, einen constanten Wert. Offenbar drückt die Relation das fundamentale Theorem aus, daſs vier Tangenten eines Kegelschnittes von allen übrigen in Gruppen von gleichem Doppelverhältnis geschnitten werden. Doch bleibt diese Erkenntnis bei Poncelet und ebenso bei den ersten hierhergehörigen Entwickelungen Chasles' ein totes Capital; zur Erkenntnis der ganzen Tragweite dieser und der dualen Eigenschaft des Kegelschnittes, die an sich zuerst von Chasles aufgefunden wurde, gelangte man erst nach Möbius' und Steiner's Entdeckungen durch den Satz, daſs projectivische Gebilde durch drei Paare homologer Elemente eindeutig gegeben sind.

*) Servois, Solutions peu connues, Metz 1804, S. 38.

3. Der Rest des Capitels ist der „théorie des polaires réciproques" gewidmet. Genauer geht Poncelet auch hier, wie in seiner grundlegenden Arbeit*), nur auf die gegenseitigen Beziehungen zwischen zwei polarreciproken Curven ein. Der Ort der Pole aller Tangenten einer gegebenen Curve ist zugleich die Hüllcurve der Polaren ihrer Punkte. Sie hat deshalb mit einer Geraden höchstens so viel Punkte gemeinsam, als die gegebene Curve Tangenten aus einem Punkt erhält. Ihre Doppeltangenten und Wendetangenten sind zu den Doppelpunkten und Spitzen der Grundcurve reciprok. Des Dualismus, welcher die Geometrie der Ebene beherrscht, gedenkt er indes ausdrücklich mit den folgenden Worten (S. 235): „il n'existe aucune relation descriptive d'une figure donnée sur un plan qui n'ait sa réciproque dans une autre figure." Er hebt ferner hervor, daſs im Raume ein ähnliches Übertragungsprincip hervortritt, wenn man von den Polareigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung Gebrauch macht. Wiederholt hebt Poncelet im Verlauf seiner Entwickelungen dieses allgemeine Gesetz hervor und giebt an den verschiedensten Stellen Anwendungen desselben. Als eine der schönsten kann die Herleitung des Newton'schen Mittelpunktsatzes gelten. Aus dem speciellen Satz über Kreisbüschel [XVI, 4] folgt durch Projection: „Die Polaren eines Punktes hinsichtlich der Kegelschnitte eines Büschels gehen durch einen Punkt, welcher einen Kegelschnitt durchläuft, wenn der erstere eine Gerade beschreibt." Wenn man die polarreciproke Figur nimmt und bedenkt, daſs Pol und Polare in Polare und Pol übergeführt werden, so entsteht der Satz: „Gleitet ein Kegelschnitt an vier Tangenten, so durchläuft sein Pol hinsichtlich einer festen Geraden eine Gerade. Rückt die gegebene Gerade in's Unendliche hinaus, so wird die zweite zum Ort der Mittelpunkte; sie enthält speciell die Mittelpunkte der Strecken, welche die drei Paare gegenüberliegender Ecken des gegebenen Vierseits begrenzen (397, 398).

4. Das dritte Capitel der Section II enthält Betrachtungen aus der Kreislehre, die zur Vorbereitung der Homologie-Beziehung bestimmt sind. Zwei Kreise kann man in Bezug auf einen bestimmten Ähnlichkeitspunkt noch in doppelter Weise homolog — so, daſs entsprechende Punkte mit ihm in einer Geraden liegen — beziehen. Die Beziehung ist direct homolog, wenn die Endpunkte paralleler Radien auf einander bezogen werden, invers-homolog, wenn stets die Endpunkte nichtparalleler Radien einander zugewiesen sind. Weist man jeder Sehne des einen Kreises die Verbindungslinie der zu ihren Endpunkten homologen Punkte zu, so entspricht jedem

*) Ich habe (V, 10) Poncelet's Arbeit und die Schriften von Encontre und Brianchon besprochen, die sich zur Entwickelung geometrischer Wahrheiten der Polareigenschaften des Kegelschnittes bedienen.

Strahlenbüschel ein Strahlenbüschel und somit auch jedem Punkte ein Punkt. In zwei homologen Figuren liegen je zwei entsprechende Punkte mit dem Ähnlichkeitspunkte, dem Centrum der Homologie, auf einer Geraden, während die Schnittpunkte entsprechender Geraden einer festen Geraden, der Axe der Homologie, angehören. Für die invers-homologe Beziehung fällt sie mit der gemeinschaftlichen reellen oder ideellen Secante der beiden Kreise zusammen; für die direct-homologe Beziehung, bei der je zwei entsprechende Geraden parallel sind, fällt sie in's Unendliche hinaus, ist also ebenfalls eine gemeinschaftliche Sehne der beiden Kreise.

Hinsichtlich dreier auf einer Ähnlichkeitsaxe liegenden Ähnlichkeitspunkte der Kreise c, c', c'' kann man c' auf c, c'' auf c', endlich c auf c'' invers-homolog beziehen und so fortfahren, bis man zum zweiten Mal zu c zurückkehrt; die Operation erreicht dann ihren Abschlufs, da alle Punkte und Geraden der Ebene von c in sich übergeführt werden. Das Ergebnis dreier auf einander folgenden Operationen ist eine invers-homologe Beziehung, die einen der drei Kreise c, c', c'' in sich überführt, das Centrum gehört der Ähnlichkeits-Axe an, die Homologie-Axe ist die Polare dieses Punktes c hinsichtlich des betreffenden Kreises. Geraden, welche vom Centrum ausgehen, sowie Punkte, welche der Axe der Homologie angehören, werden durch die Folge der drei Operationen in sich übergeführt. Die Verbindungslinien gegenüberliegender Punkte bez. die Schnittpunkte gegenüberliegender Geraden eines Cyklus der einen oder anderen Art sind derartige Elemente. Die Axen der drei neuen Homologie-Beziehungen schneiden die Berührungspunkte der beiden Kreise aus, welche die drei gegebenen berühren und zur Ähnlichkeitsaxe gehören; je drei zusammengehörige dieser Punkte bilden einen in sich geschlossenen Cyklus. Wählt man den Ausgangspunkt auf c, so werden die sechs Punkte durch einen bestimmten Kreis auf c, c', c'' ausgeschnitten, der anstatt des Orthogonalkreises für das eine Kreispaar in die Gaultier'sche Construction eingesetzt werden kann*) und offenbar die drei gegebenen Kreise unter einem und demselben Winkel schneidet. Andererseits gestatten diese Entwickelungen mannigfache Modificationen dieser Construction. Sind die drei Kreislinien gegeben, und ist durch irgend eine Vorkehrung, etwa den Mittelpunkt des einen Kreises, ein Paar von Parallelen, eine durch einen Ähnlichkeitspunkt gehende Gerade etc., die unendlich ferne Gerade eingeführt, so kann die Construction mit alleiniger Hülfe des Lineals erfolgen (269 ff.).

5. Zwei Kegelschnitte kann man hiernach (Sect. III, Cap. 1) auf zwölf Arten in Homologie-Beziehung bringen. Ist nämlich die Axe

---

*) Ohne Beweis hatte Poncelet, wie bereits bemerkt (XV, 5), diese Construction schon früher angeführt (Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 317—322).

eine von zwei gegenüberliegenden Seiten des beiden eingeschriebenen Vierecks, so muſs das Centrum der Homologie eine von zwei gegenüberliegenden Ecken des umgeschriebenen Vierseits sein, und zwar sind der Schnittpunkt der beiden Axen und die Verbindungslinie der beiden Centra gegenüberliegende Stücke des gemeinschaftlichen Polardreiecks. Eine anschauliche Umschreibung des Satzes bildet das Theorem (293): „Zwei Kegelschnitte in einer Ebene können auf zwei Arten als Projectionen zweier Schnitte eines Kegels so aufgefaſst werden, daſs der scheinbare Umriſs des Kegels mit zwei gemeinschaftlichen Tangenten zusammenfällt."*)

Von den fünf Bestimmungsstücken eines Kegelschnittes kann man ein Tangentenpaar durch das Centrum, ein Punktepaar durch die Axe der Homologie gegen einen bekannten Kegelschnitt festlegen. So entstehen neue Aufgaben, deren groſse principielle Bedeutung, obgleich die Lösungen ziemlich schwerfällig sind, in der Möglichkeit liegt, Paare conjugirt imaginärer Bestimmungsstücke bei der Construction eines Kegelschnittes in Betracht zu ziehen. Als Beispiel diene die Construction aus einer reellen Tangente und vier imaginären Punkten, die als Schnittpunkte eines Kegelschnittes mit zwei Geraden gegeben sind. Jeder der beiden gesuchten Kegelschnitte kann mit Hülfe von vier Homologie-Beziehungen aus dem gegebenen abgeleitet werden, jede derselben hat eine der beiden vorliegenden Geraden zur Axe und einen von zwei Punkten zum Centrum. Die vorliegende Tangente ist hierbei aus einer der vier Tangenten entstanden, welche der gegebene Kegelschnitt aus ihren Schnittpunkten mit den Axen erhält. Die vier Geraden, welche die beiden so entstehenden Paare von Berührungspunkten verbinden, treffen sich mithin einmal paarweise in den Berührungspunkten der Tan-

*) In der Arbeit: Mémoire sur les propriétés des systèmes de sections coniques, situées dans un même plan, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 277—301, knüpft Chasles an die Untersuchungen Poncelet's an, indem er das System von Kegelschnitten mit einem gemeinschaftlichen Homologie-Centrum als polarreciprokes Gebilde zu einem System „homothetischer" (ähnlicher und ähnlich gelegener) Kegelschnitte einführt Er beanstandet hierbei die Bezeichnung „corde idéale" als unzweckmäſsig und will das, was den Ähnlichkeitspunkten homothetischer Kegelschnitte entspricht, als „axe de symptose" bezeichnen. Den Namen „centre d'homologie" will er auf die Schnittpunkte solcher gemeinsamen Tangentenpaare eingeschränkt wissen, gegen welche die beiden Kegelschnitte gleichartig liegen (Nr. 2, 9, 14, 18 etc.), so daſs eine von ihrem Kreuzungspunkt ausgehende Gerade beide oder keinen von beiden trifft. Zwei Kegelschnitte haben demnach sechs Homologie-Centren und sechs zugehörige „axes de symptose", wenn sie vier reelle Punkte und Tangenten gemein haben, in jedem anderen Fall nur zwei Paare, wie Chasles in einer zweiten Abhandlung genauer ausführt: Chasles, Additions et corrections au mémoire sur les propriétés d'un système de coniques, inséré à la page 277 du précédent volume, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 26—32. Poncelet hat gegen diese Unterscheidung mit Heftigkeit protestirt (Traité, Bd. 2, Paris 1866, S. 431 ff.).

gente mit den beiden Kegelschnitten und schneiden andererseits auf der Polare des Kreuzungspunktes der Secanten die beiden Centrapaare aus, mit deren Hülfe die gesuchten aus dem gegebenen Kegelschnitt entstehen (343). Bezieht man einen Kegelschnitt homolog auf einen Kreis, so werden Aufgaben metrischer Art, Auffindung der Axen, zweier conjugirten Durchmesser, die einen vorgeschriebenen Winkel mit einander bilden etc., in leichter Weise ausführbar. Als Homologie-Centrum wird dann vorteilhaft ein gemeinschaftlicher Punkt gewählt, in dem sich Kreis und Kegelschnitt berühren.

6. Andererseits verbreitet sich Poncelet im Anschluſs an diese Entwickelungen über die Möglichkeit, die Aufgaben zweiten Grades mit Hülfe eines festen Kreises und des Lineals zu bewerkstelligen. Die Art der Lösung ist freilich sehr verschieden von der, die man jetzt zu geben pflegt. Jede bestimmte Aufgabe zweiten Grades läſst sich auf die Aufgabe zurückführen, die Doppelpunkte zweier projectivischen Punktreihen aufzufinden, die einer gegebenen Kegelschnittlinie angehören. Ihre Doppelpunkte liegen auf der Directrix dieser Projectivität; betrachtet man die unendlich ferne Gerade als absolut gegeben, so scheiden vorläufig alle Probleme von der Betrachtung aus, bei deren Formulirung dieselbe in Betracht gezogen wird; z. B. die Aufgabe, von einem Punkte aus auf eine Gerade ein Lot zu fällen. Erst wenn sie irgendwie als unzugängliche Gerade gekennzeichnet ist durch ihren Pol hinsichtlich der gegebenen Kegelschnitt-Linie, durch zwei Paare von Geraden, deren unzugängliche Schnittpunkte ihr angehören, also durch zwei Paare von Parallelen, werden solche Aufgaben auszuführen sein. Poncelet drückt dies (255) in der Form aus: Kennt man bloſs eine Kreislinie ohne ihren Mittelpunkt, so ist man eigentlich nicht besser daran, als wenn der Kreis gar nicht vorläge. Hat man hingegen einen Kreis und dessen Mittelpunkt, so ist jede Aufgabe zweiten Grades mit alleiniger Hülfe des Lineals lösbar; sie führt ja jedenfalls darauf zurück, eine Gerade mit einem Kreis zu schneiden, der durch drei Bestimmungsstücke, Punkte und Tangenten, festgelegt ist. Die unendlich ferne Gerade ist für beide Kreise eine Homologie-Axe, deren Centrum mit Hülfe des Lineals allein aufgefunden werden kann. Die gesuchten Schnittpunkte können jetzt durch Abbildung der Geraden gefunden werden (353). Es schlieſst sich eine Reihe von Bemerkungen über Constructionen an, die allein mit Hülfe einer „fausse équerre", eines Winkels von constanter Gröſse, ausgeführt werden können.

7. Hier ergiebt sich nun die günstigste Gelegenheit, auf Steiner's gelegentlich schon angeführte Schrift über denselben Gegenstand einzugehen.*) Jeder, der dieselbe kennt, schätzt in ihr ein wahres

*) Steiner, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren

Muster eleganter und klarer geometrischer Darstellung. Freilich mufs man es tadeln, wenn Steiner in der Vorrede sich die Aufgabe stellt, „die Vermutung zu bestätigen, welche einige französische Geometer ausgesprochen haben", dafs es möglich sei, alle Aufgaben zweiten Grades mittelst eines festen Kreises und des Lineals zu lösen. Poncelet hat später mit Recht hervorgehoben*), dafs er sich an der besprochenen Stelle mit genügender Ausführlichkeit über die Möglichkeit verbreitet habe, alle Constructionen mit Hülfe des Lineals und eines festen Kreises auszuführen. Aber er giebt mit einer bei ihm seltenen Mäfsigung zu, dafs Steiner die Frage vertieft habe. In den ersten drei Abschnitten folgt Steiner genau Poncelet's Spuren. Er zeigt zuerst, dafs man mit Hülfe einer Curve mit Mittelpunkt und eines Lineals zu jeder Geraden eine Parallele ziehen kann. Er erörtert dann im zweiten Abschnitt die Gesetze der Ähnlichkeit und kommt im dritten Abschnitt auf den Kernpunkt der Frage zu sprechen. Eine geometrische Construction, wie verwickelt sie sei, bestehe aus der steten Wiederholung der Aufgaben, „die Schnittpunkte einer Geraden und eines Kreises" und die Schnittpunkte zweier Kreise zu finden. Ist nun ein Fundamentalkreis mit Mittelpunkt bekannt, und ist im ersten Falle der Kreis durch Mittelpunkt und Radius gegeben, so kann man zunächst mit alleiniger Hülfe des Lineals, auf Grund des Ziehens von Parallelen, seine Ähnlichkeitspunkte gegen den Fundamentalkreis finden und so die gesuchten Schnittpunkte mit einer Geraden auf den Kreis abbilden. Im zweiten Fall kann man zuerst die Ähnlichkeitspunkte der beiden Kreise gegen den Fundamentalkreis, sodann ihre Ähnlichkeitspunkte gegen einander auffinden. Nachdem man alsdann die Schnittpunkte mit zwei von einem Ähnlichkeitspunkt ausgehenden Geraden gefunden hat, kann man die im Endlichen liegende gemeinschaftliche Secante der beiden Kreise als Ort der Schnittpunkte invers-homologer Strahlen auffinden und so die Aufgabe auf die vorige zurückführen. Die Lösung der Aufgabe ermöglicht sich auch dann, wenn der Mittelpunkt nur als unzugänglich gekennzeichnet und von der Peripherie des Kreises ein Punkt gegeben ist. Kann man in dem Vorigen nur eine weitere Ausführung der Poncelet'schen Ideen erblicken, so giebt Steiner in dem „Anhang" überschriebenen Schlufscapitel an einer Reihe von Beispielen eine wirkliche Vertiefung, indem er Aufgaben zweiten Grades projectivischer Natur systematisch auf die Aufsuchung der Doppelelemente in einander liegender projectivischer Gebilde zurückführt und diese Aufgabe mit Hülfe einer Kreislinie, deren Mittelpunkt nicht mehr erforderlich ist,

---

Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung, Berlin 1833 (Ges. W., Bd. 1, S. 461—522).

*) Vgl. die 1862 hinzugefügte Anmerkung zu 357 (S. 414).

zur Lösung bringt. Beiläufig mag noch erwähnt werden, dafs die Construction eines Kegelschnittes aus vier Tangenten und einem Punkte hier zum ersten Mal mit Hülfe der Involutionseigenschaft des vollständigen Vierseits gelöst wird. Sind AA_1, BB_1, CC_1 die drei Paare gegenüberliegender Ecken des Vierseits, so hat man mit Hülfe des festen Kreises die Doppelelemente der beiden Strahlenbüschel

$$P(ABC\ldots) \barwedge P(A_1B_1C_1\ldots)$$

zu suchen, um die Tangenten der beiden gesuchten Kegelschnitte im Punkte P zu finden (Ges. W., S. 514).

8. Ich kehre nach dieser Abschweifung zu Poncelet zurück. Wird als Homologie-Centrum ein Punkt P eines Kegelschnitts gewählt, so hat der transformirte Kegelschnitt mit ihm eine einfache Berührung, die in eine dreipunktige bez. vierpunktige Osculation übergeht, wenn die Axe der Homologie durch P hindurchgeht oder zur Tangente dieses Punktes wird. Im ersten Fall kann man noch zwei Punkte A_1, B_1 des neuen Kegelschnittes willkürlich annehmen; sind A, B die zweiten Schnittpunkte von PA_1 und PB_1 mit dem gegebenen Kegelschnitt, so ist durch den Schnittpunkt von AB und A_1B_1 die Homologie-Axe festgelegt. Betrachtet man A_1 als gegeben und führt den Schnittpunkt über die Tangente in P, so beschreibt B_1 den Kegelschnitt, der in P vierpunktig berührt und durch A_1 eindeutig festgelegt ist. Die soeben angedeutete Construction hatte Poncelet schon früher ohne Beweis gegeben*) (320—325). Entsprechende Entwickelungen kann man an die Axe der Homologie knüpfen.

Da drei Kegelschnitte, welche zwei Punkte mit einander gemein haben, „im allgemeinen" die Projectionen dreier Kreise sind, so treffen sie sich noch paarweise in Punktepaaren, deren Verbindungslinien in einem Punkt zusammenlaufen. Oder anders ausgedrückt: Enthält ein Kegelschnitt zwei Grundpunkte eines Büschels, so schneidet er die einzelnen Curven desselben in Punktepaaren, deren Verbindungslinien in einem Punkt zusammenlaufen; derselbe liegt mit den beiden anderen Grundpunkten auf einer Geraden (403). Mit Hülfe dieses Satzes kann man mit Leichtigkeit einen Kegelschnitt so variiren, dafs er eine vorgeschriebene Osculation mit einem vorliegenden eingeht. Ein Specialfall ist der Satz: ein Kreisbüschel, dessen Grundpunkte einem Kegelschnitt angehören, trifft denselben in Punktepaaren, deren Verbindungslinien zu einander parallel sind. Der Satz folgt übrigens unmittelbar aus dem erst später allgemeiner

---

*) Poncelet, Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie. Suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de la géométrie de la règle, Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 141—155 (S. 153).

bekannt gewordenen Theorem (394). „Zwei Gerade sind gegen die Axen eines Kegelschnittes gleich geneigt, sobald sie seine Schnittpunkte mit einem beliebigen Kreise enthalten.“ Nach einem Specialfall eines Lamé'schen Theorems giebt es nämlich für alle Kegelschnitte eines Büschels ein gemeinschaftliches Paar von Richtungen conjugirter Durchmesser, von Geraden dieser Richtung werden auch die Geradenpaare des Büschels harmonisch getrennt; enthält der Büschel einen Kreis, so sind die Richtungen diejenigen der Axen aller Kegelschnitte des Büschels und der Winkelhalbirenden seiner drei Geradenpaare. Die hieraus abfließende Construction des Krümmungskreises eines Kegelschnittes wird besonders einfach, wenn man die Axen des Kegelschnittes kennt, und ist für diesen Fall schon von Simson gegeben worden.*)

9. An die dargelegten Entwickelungen knüpft sich noch ein nicht sehr angenehmes Nachspiel; ich habe der in ihrer Maßlosigkeit jedenfalls unberechtigten Angriffe Poncelet's auf zwei Arbeiten von Plücker zu gedenken. Die eine ist lediglich analytischer Natur**) und gehört zu Plücker's Erstlingsarbeiten auf dem Gebiete der modernen analytischen Geometrie. Er stellt die Gleichung des Krümmungskreises in einem Kegelschnittpunkt auf, in den der Anfangspunkt der Coordinaten verlegt ist, während die y-Axe mit der Tangente zusammenfällt. Die andere hingegen arbeitet mit rein geometrischen Mitteln***). Den Ausgangspunkt Plücker's bildet ein Specialfall des letzterwähnten Theorems, das aber den allgemeinen Satz sofort wieder zur Folge hat. In moderner Ausdrucksweise würde es lauten: „Die Kegelschnitte eines Büschels schneiden zwei von zwei verschiedenen Grundpunkten ausgehende Geraden in perspectivischen Punktreihen, auch die Verbindungslinie der beiden anderen Grundpunkte enthält zwei homologe Punkte dieser Reihen“. Plücker beweist diesen Satz in sehr ansprechender Weise mittels des Pascal'schen Satzes, der die vier Grundpunkte und je zwei homologe Punkte der beiden Reihen verknüpft. Aus diesem Satz und seinem dual entsprechenden werden nun Constructionen für Kegelschnitte abgeleitet, welche mit einem gegebenen eine Folge unendlich naher Elemente gemein haben. Das 1817 [136*] von Poncelet ausgesprochene Theorem wird ausdrücklich auf denselben zurückgeführt. Obgleich nun Plücker's Constructionen sich größtenteils als Homologie-Beziehungen des neuen Kegelschnittes auf den gegebenen darstellen, findet sich nur im Anfang des Auf-

*) Simson, Sectiones conicae, Buch V, Prop. 39.

**) Plücker, Recherche graphique du cercle osculateur, pour les lignes du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 69—72 (Abh., Bd. 1, S. 60—62).

***) Plücker, Théorèmes et problèmes, sur le contact des sections coniques, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 37—59 (Abh., Bd. 1, S. 43—59).

satzes ein sehr unbestimmt gehaltener, ganz flüchtiger Hinweis auf den Traité. Hiernach ist die Erregung immerhin verständlich, mit welcher Poncelet sich gegen Plücker's Verfahren auflehnte.*) Freilich stellte sich später heraus, dafs Plücker bei Abfassung seiner Arbeit den Traité nur dem Namen nach gekannt hatte, dafs der Hinweis auf denselben von Gergonne herrührte, der den Aufsatz in sehr eigenmächtiger Weise wesentlich den „doubles colonnes" zu Liebe umgearbeitet hatte, so dafs ihn Plücker nur an dem Titel als seine Arbeit erkannte. Hiermit fiel freilich Poncelet's Beschuldigung eines Plagiats in sich zusammen.

10. Das zweite Capitel der Section III beschäftigt sich mit der Auffindung der Schnittpunkte und gemeinschaftlichen Tangenten zweier Kegelschnitte. Geht ein Punkt über eine Gerade, so beschreibt der Schnittpunkt der Polaren nach zwei Kegelschnitten, wie aus dem entsprechenden Kreissatz folgt, einen Kegelschnitt. Die zu zwei Geraden reciproken Kegelschnitte haben den zu ihrem Schnittpunkt reciproken Punkt gemeinsam, aufserdem noch wenigstens einen Punkt (oder deren drei), der für beide Kegelschnitte dieselbe Polare besitzt. Auf letzterer ergehen sich „im allgemeinen" noch zwei wei-

---

*) Der Abhandlung: Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 265—272 hatte Poncelet eine Reclamation gegen Plücker beigefügt; die Unterdrückung derselben, sowie die willkürliche Abschwächung der Einleitung, die ihre Spitze gegen Gergonne kehrte, gab zu der Gergonne-Poncelet'schen Fehde Veranlassung. Auf Poncelet's ersten Artikel hin (Note sur divers articles du bulletin des sciences de 1826 et 1827, Bull. de Férussac, Bd. 8, 1827, S. 109—117 (Traité, Bd. 2, 1866, S. 363—368) gab Gergonne Einleitung und Nachschrift nachträglich heraus: Postscriptum supprimé etc., Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 145—149. Gergonne hebt zwar in einer Note (S. 148) hervor, er halte es für sehr möglich, dafs Plücker den Traité überhaupt nicht geöffnet habe. Hiermit läfst sich schlecht der Umstand vereinigen, dafs im Anfang der Abhandlung der Traité, allerdings sehr obenhin, citirt ist. Poncelet macht hierauf mit Entschiedenheit in seiner zweiten Reclamation aufmerksam: Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques etc., Bull. de Férussac, Bd. 9, 1828, S. 292—302, (Traité, Bd. 2, S. 369—376 (S. 373)). Erst durch Plücker's Erwiderung kam der wirkliche Thatbestand zu Tage, dafs Gergonne den Plücker'schen Artikel einer sehr willkürlichen Umarbeitung unterzogen, den Hinweis auf Poncelet's Traité hinzugefügt hatte. Plücker versichert nachdrücklich, den Traité erst viel später kennen gelernt zu haben. Vgl. den Artikel: Réclamation de M. Plücker, Bull. de Férussac, Bd. 10, 1828, S. 330—332. In seiner Erwiderung zieht Poncelet seinen Haupt-Vorwurf zurück und erklärt, nur noch mit Gergonne zu thun zu haben. Réponse de M. Poncelet aux réclamations de M. Plücker etc., Bull. de Férussac, Bd. 11, 1829, S. 330—333 (Traité, Bd. 2, S. 376—379). Schönflies hat diese Polemik in seiner schon citirten Ausgabe von Plücker's Abhandlungen abgedruckt (S. 592—595). „Mit Entschiedenheit", wie Schönflies es ausdrückt, ist nun wohl Gergonne nicht dafür eingetreten, dafs Plücker den Traité nicht kannte.

tere Punkte dieser Art, die nur dann imaginär werden, wenn die gegebenen Kegelschnitte die Polare in zwei sich trennenden Punktepaaren treffen. Poncelet bemerkt nun, dafs jedes Paar reeller oder ideeller Secanten zwei Seiten des Polardreiecks und irgend ein Paar für beide Kegelschnitte zugleich conjugirter Punkte harmonisch trennt, findet, dafs im Fall eines reellen Polardreiecks entweder vier reelle Schnittpunkte auf sechs Secanten oder vier imaginäre Schnittpunkte auf zwei Secanten vorhanden sind, dafs zwei reelle und zwei imaginäre Schnittpunkte auftreten, wenn nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite des Polardreiecks reell sind, er beobachtet, dafs die Secanten in diesem Fall die Doppelpunkte der Involution projiciren, welche die beiden Kegelschnitte auf der gegenüberliegenden reellen Geraden des Polardreiecks ausschneiden; das duale Problem wird entsprechend behandelt (358—390). Augenscheinlich ist die obige Lösung genau diejenige, welche wir heute in der synthetischen Geometrie zu geben pflegen. Aber bei ihrer Entwickelung wird vorausgesetzt, dafs man zwei Kegelschnitte in zwei Kreise projiciren kann. Man hat also bei Poncelet nicht einen Nachweis der Schnittpunkte, sondern nur eine Methode zu ihrer wirklichen Auffindung, nachdem ihre Existenz gesichert ist.

11. Cap. III beschäftigt sich mit Kegelschnitten in doppelter Berührung. Zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte lassen sich im allgemeinen in zwei concentrische Kreise projiciren; aus den Symmetrieen der so entstehenden Figur folgt: „Die Kegelschnitte, welche zwei Punkte enthalten und einen Kegelschnitt doppelt berühren, gehören in zwei getrennte Scharen; für jede dreht sich die Berührungssehne um einen der beiden Punkte, welche das Punktepaar und der Kegelschnitt zugleich harmonisch trennen“ (413). Hiernach läfst sich die Newton'sche Construction für einen Kegelschnitt aus drei Punkten und zwei Tangenten auf den Fall ausdehnen, wo eine doppelte Berührung mit einem Kegelschnitt verlangt wird.

Man kann einen Kegelschnitt in einen Kreis und die Pole der Sehnen, längs deren er von zwei anderen Kegelschnitten doppelt berührt wird, in's Unendliche hinaus projiciren; die Bilder der beiden anderen Kegelschnitte sind dann mit dem Kreise concentrisch. Es giebt also drei Scharen von Kegelschnitten, welche zwei gegebene doppelt berühren. Für jede dreht sich die Berührungssehne um eine Ecke des gemeinschaftlichen Polardreiecks, die für alle ihre Kegelschnitte dieselbe Polare hat, wie für die gegebenen. Chasles war, wie oben [XI, 2] angedeutet wurde und auch Poncelet hervorhebt, zu diesem Theorem wesentlich einfacher gelangt.

Bewegt sich der Scheitel eines Winkels von gegebener Gröfse über einen Kreis, so umhüllt die Sehne, welche die zweiten Schnittpunkte der Schenkel verbindet, einen concentrischen Kreis und be-

rührt denselben stets in ihrem Mittelpunkt. Läfst man die Schenkel sich selbst parallel bleiben, so erhält man folgenden allgemein gültigen Satz: „Bewegen sich die Ecken eines Dreiecks über einen Kegelschnitt und drehen sich zwei Seiten um feste Punkte, so gleitet die dritte Seite an einem Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt; die Berührungssehne fällt mit der Verbindungslinie der Drehpunkte zusammen und trennt mit dem jeweiligen Berührungspunkte zusammen die Endpunkte einer beliebigen Lage der dritten Seite harmonisch (431). Sind die beiden Drehpunkte conjugirt, so entsteht das oben [XVII, 1] angegebene Bewegungsgesetz.

Durchlaufen die Ecken eines Dreiecks $A_1A_2A_4$ einen Kegelschnitt K, dreht sich A_1A_2 um einen Punkt B_1 und gleitet A_2A_4 an einem doppelt berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$, so gleitet auch die dritte Seite A_1A_4 an einem doppelt berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$ (439). Man kann nämlich A_2A_4 als letzte Seite eines Dreiecks $A_2A_3A_4$ ansehen, dessen beide andere Seiten sich um feste Punkte B_2, B_3 der Berührungssehne von $\mathfrak{K}_1$ drehen. Einer von ihnen, z. B. B_2, ist auf derselben noch willkürlich, kann also mit dem Schnittpunkt der Polare von K hinsichtlich B_1 zusammenfallen. Alsdann dreht sich A_1A_3 um einen festen Punkt B'_3, und A_1A_4 gleitet an einem doppelt berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}_2$. Seine Berührungspunkte sind zwei bestimmte Schnittpunkte der von B_1 an $\mathfrak{K}_1$ gehenden Tangenten. Er berührt an einer Stelle vierpunktig, wenn B_1 dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}_1$ angehört. Die Aufsuchung eines K eingeschriebenen Kegelschnitts $\mathfrak{K}_1$, der zwei Sehnen von K berührt und einen Punkt enthält, kommt also auf die andere zurück, einen K vierpunktig berührenden Kegelschnitt zu suchen, der zwei gegebene Geraden berührt. Die Aufgabe besitzt deshalb vier verschiedene Lösungen (442).

XVIII. Poncelet's Traité, Section IV.

1. Section IV bietet (Cap. 1) zunächst die Lehre von den Brennpunkten. Dreht sich eine Seite eines Dreiecks, das einem Kreise eingeschrieben ist, um dessen Mittelpunkt M, eine andere um einen Punkt F, so umhüllt die dritte Seite einen Kegelschnitt, der in den Schnittpunkten von MF den Kreis berührt, und zwar schneidet eine durch F gelegte Parallele zur Hypotenuse den Berührungspunkt der dritten Seite aus. Zu dem gewählten Durchmesser gehört, nachdem man seine beiden Endpunkte vertauscht hat, noch eine zweite Tangente, deren Berührungspunkt auf derselben Parallelen liegt. Offenbar ist F für das Dreieck aus den Tangenten und dem Durchmesser der Kreuzungspunkt zweier Höhen. Die Verbindungslinie von F mit dem Kreuzungspunkt der Tangenten steht

also auf dem Durchmesser, mithin auf der Berührungssehne senkrecht. Auf diese Weise ordnet Poncelet die Sätze in sein System ein: „Die Lote, welche auf den Tangenten eines Kegelschnittes in ihren Schnittpunkten mit dem Scheitelkreise errichtet sind, laufen in zwei Punkten der Hauptaxe zusammen. Jede von einem dieser beiden Brennpunkte ausgehende Sehne steht senkrecht zu der Geraden, welche ihn mit dem Kreuzungspunkte der Tangenten in ihren Endpunkten verbindet."*) Eine Tangente erhält aus beiden Brennpunkten Lote, deren Fufspunkte dem Scheitelkreise angehören. Zu den zugehörigen Durchmessern sind die beiden Brennstrahlen des Berührungspunktes parallel und deshalb gegen Tangente und Normale gleich geneigt. Aus beiden Eigenschaften folgt auf die bekannte Art die Entfernungseigenschaft.

2. Haben zwei Kegelschnitte einen Brennpunkt gemeinsam, so liegen ihre Pole hinsichtlich eines beliebigen vom Brennpunkt ausgehenden Strahls nach dem Obigen auf einem zweiten, zu dem vorigen senkrechten Brennstrahl. Der Brennpunkt ist also für sie ein Homologie-Centrum. Diese Erkenntnis von fundamentaler Bedeutung fafst Poncelet in folgender Weise: „Le foyer commun au système de deux sections coniques, tracées sur un même plan, est pour elles un centre d'homologie ou de projection, c'est-à-dire un point de concours (ici nécessairement idéal) des tangentes communes aux deux courbes" (453). Als zweiten Kegelschnitt kann man einen Kreis wählen, dessen Mittelpunkt mit dem einen Brennpunkt des Kegelschnittes zusammenfällt. Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so entsteht die allerdings nicht direct ausgesprochene moderne Anschauung, dafs die Brennpunkte Kreuzungspunkte der Tangenten sind, welche von den unendlich fernen Kreispunkten aus sich an den Kegelschnitt legen lassen. Die neue Anschauung gestattet nun, eine Fülle der schönsten Eigenschaften aus ganz trivialen Kreiseigenschaften abzuleiten. Ein bekanntes Beispiel hierfür ist der Satz: Dreht sich ein Winkel von constanter Gröfse um seinen Scheitel, so umhüllt die Gerade, welche die Einschnitte seiner Schenkel in zwei feste Geraden verbindet, einen Kegelschnitt, der den Scheitel zum Brennpunkt hat und auch die beiden gegebenen Geraden berührt (464, 472). Nachdem die Umkehrung des Satzes ausgesprochen und auch der zweite Brennpunkt in die Betrachtung eingeführt ist, gelangt Poncelet auf ziemlich indirectem Wege zu einem Beweise für Newton's descriptio organica (474). Für die Parabel, bei welcher die Tangente sich ganz in's Unendliche entfernen kann und

*) Vgl. VI, 7. Poncelet führt schon in der ersten Auflage des Traité das fundamentale Theorem ganz richtig auf de la Hire zurück. Eine freundschaftliche Bemerkung Chasles', der Poncelet hier eine Unterlassung nachweisen zu können meinte, wird hierdurch gegenstandslos.

somit der bewegliche Winkel dem Tangentenwinkel gleich ist, gestattet dieser Satz die schönsten Folgerungen. Die Darstellung folgt hier genau der früheren schon besprochenen Abhandlung [VI, 7], wird jedoch durch die elegante Herleitung eines dort von l'Hospital*) entlehnten Satzes ergänzt. Wird ein Winkel von constanter Gröfse um einen Peripheriepunkt oder den Mittelpunkt eines Kreises gedreht, so umhüllt die zugehörige Sehne einen concentrischen Kreis. Die Homologiebeziehung ergiebt, dafs eine Sehne des Kegelschnitts an einem zweiten doppelt berührenden Kegelschnitt gleitet, wenn sie an einem Punkt der Peripherie oder aber an einem Brennpunkt einen gegebenen Winkel bestimmt. Die Berührungssehne ist im zweiten Fall die Directrix, ist aber auch im ersten Fall von der Gröfse des Winkels unabhängig; der Pol dieser Geraden gehört als Frégier'scher Punkt [IV, 8] zu den Rechtwinkelpaaren des Peripheriepunktes (481. 482). Bei der Parabel ist nun der Winkel aus zwei Brennstrahlen doppelt so grofs als der Winkel, den die zugehörigen Tangenten mit einander bilden. Wenn also ein Winkel von constanter Gröfse an der Parabel gleitet, so beschreibt sein Scheitel einen Kegelschnitt, der zu dem zweiten Ort polarreciprok ist und deshalb ebenfalls Brennpunkt und die zugehörige Directrix mit der Parabel gemein hat. Bei der Ellipse oder Hyperbel stöfst man nur für den Fall des rechten Winkels auf einen Kegelschnitt, den de la Hire'schen Kreis.**) Poncelet fafst dieses Theorem als Specialfall seines später zu erörternden Schliefsungsproblems für den Fall der Vierecke (488) und leitet aus derselben Quelle das Theorem ab: die Sehnen eines Kegelschnittes, welche von einem beliebigen Punkte aus unter einem rechten Winkel erblickt werden, umhüllen einen Kegelschnitt, der den ausgezeichneten Punkt zum Brennpunkt hat (491).***)

3. Die Betrachtung wendet sich im Cap. II der Braikenridge-Maclaurin'schen Erzeugungsweise der Kegelschnitte zu. Drehen sich die Seiten eines einfachen n-Ecks um feste Punkte und bewegen sich $n-1$ Ecken über gegebene Gerade, so beschreibt die letzte Ecke einen Kegelschnitt. Ich will Poncelet's Beweismethode im Falle $n = 4$ erläutern; er führt einen fünften Drehpunkt ein, der sowohl mit den beiden ersten als auch mit den letzten Drehpunkten in einer Geraden liegt, und projicirt von hier aus die dritte, der freien gegenüberliegende Ecke. Der neue Strahl erzeugt sowohl mit dem ersten wie auch mit dem vierten Strahl nach dem Desargues-Pappus'schen Theorem [I, 7] eine gerade Linie. Der fragliche Ort

*) Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 1—13, 68—71 (S. 12).

**) Vgl. I, 6 Fufsnote.

***) Diesen Satz hatte Poncelet ohne Beweis bereits in der eben citirten Abhandlung gegeben (S. 70). Später erscheint der Satz als duale Form des de la Hire'schen Satzes.

kann also als letzte Seite eines Dreiecks aufgefaſst werden, von dem zwei Ecken über gegebene Geraden fortschreiten, während sich seine Seiten um feste Punkte drehen, und ist deshalb ein Kegelschnitt (494). Ähnlich wird der allgemeine Fall behandelt.*)

Als Abschluſs dieser Entwickelung wird der Satz aufgestellt: „Bewegen sich die Ecken eines Polygons mit Ausnahme einer einzigen auf gegebenen Curven — der Ordnungen $m, n, o, \ldots$ — während seine Seiten sich um gegebene Punkte drehen, so durchläuft die letzte Ecke eine Curve von der Ordnung $2mno\ldots$; statt der Strahlen können constante Winkel eintreten, die sich um ihre Scheitel drehen. Der erste Teil des Satzes ergiebt sich genau nach der Schluſsweise, die Braikenridge auf den Fall des beweglichen Dreiecks angewandt hatte [I, 8]. Die Schenkel eines festen Winkels, der sich um seinen Scheitel dreht, werden als Strahlen aufgefaſst, welche die Einschnitte einer beweglichen Tangente eines Kegelschnittes in zwei feste von einem Brennpunkt aus projiciren; die Beziehung zwischen zwei solchen Einschnitten regelt der Brianchon'sche Satz. Der allgemeinere Fall wird in dieser Art auf den specielleren zurückgeführt, indem eine Anzahl von Drehpunkten und von ebenso vielen Geraden als leitenden Curven neu hinzutritt.

4. Poncelet geht nun zu der altberühmten Aufgabe über, ein n-Eck einem Kegelschnitt einzuschreiben, dessen Seiten der Ordnung nach durch vorgeschriebene Punkte gehen. Schreiten die Ecken eines offenen Polygons $A_1 A_2 \ldots A_{n+1}$ auf einem Kegelschnitt fort, während seine Seiten sich um die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ drehen, so beschreiben je zwei auf einander folgende Ecken, also auch A_1 und A_{n+1} projectivische Punktreihen. Entsprechen also den Anfangslagen A_1, B_1, C_1 die Endlagen $A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1}$, so hat man nur die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $ABC\ldots$ und $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} \ldots$ aufzusuchen, um die erste Ecke eines der gesuchten Polygone zu erhalten. Dieselbe liegt mit den drei Schnittpunkten (BC_{n+1}, CB_{n+1}); (CA_{n+1}, AC_{n+1}); (AB_{n+1}, BA_{n+1}) in einer geraden Linie. Diese Construction ist, freilich ohne Beweis, schon 1817 von Poncelet**) angegeben worden; es ist nicht ohne Reiz, seine Begründung etwas näher zu verfolgen. Man verbinde

*) Offenbar läſst das Poncelet'sche Verfahren folgenden Schluſs zu: Ist unter Vermittelung beliebig vieler Zwischenpunkte und -Geraden zwischen zwei Strahlbüscheln eine projectivische Beziehung eingeleitet, so kann man dieselbe Beziehung mittelst zweier Hülfsgeraden und eines vermittelnden Strahlbüschels herstellen, und zwar vor Einführung des Fundamentaltheorems, nur unter Benutzung des Desargues'schen Satzes.

**) Poncelet, Réflexions sur l'usage de l'analyse algébrique dans la géométrie; Suivies de la solution de quelques problèmes dépendant de

den Schnittpunkt $\mathfrak{P}$ von P_1P_2 und P_3P_4 mit A_3. $\mathfrak{A}$ sei der zweite Schnittpunkt dieser Geraden, alsdann drehen sich nach Poncelet's Umformung des Desargues'schen Involutionssatzes [II, 15] $A_1\mathfrak{A}$ und $A_5\mathfrak{A}$ um feste Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_4$ der Geraden P_1P_2 und P_3P_4. A_1A_5 umhüllt daher, ebenso wie A_1A_3, einen Kegelschnitt, der den gegebenen doppelt berührt; dasselbe gilt von A_1A_7, A_1A_9, ... Um dies auch auf A_1A_4, A_1A_6, ... wie jede Diagonale des Polygons zu übertragen, nenne man $\mathfrak{P}'$ den Schnittpunkt von P_1P_2 mit der Polare von P_3 und $\mathfrak{A}'$ den zweiten Schnittpunkt von $A_3\mathfrak{P}'$ mit dem Kegelschnitt; alsdann dreht sich $A_1\mathfrak{A}'$ um einen Punkt $\mathfrak{P}''$ von P_1P_2, $\mathfrak{A}'A_4$ um den Pol von $P_3\mathfrak{P}'$, also gleitet A_1A_4 an einem doppelt berührenden Kegelschnitt. Die wiederholte Anwendung der einen oder anderen Methode gestattet, die gegebenen Punkte P_1, P_2, ..., P_n durch zwei andere P_{n+1}, P_{n+2} so zu ergänzen, dafs ein mit ihrer Hülfe eingeschriebenes $(n+2)$-Eck $A_1A_2 \ldots A_{n+1}A_{n+2}$ sich unabhängig von der Lage der ersten Ecke A_1 schliefst. Gelangt A_1 in einen der Schnittpunkte der Geraden $P_{n+1}P_{n+2}$, so vereinigt er sich mit dem zugehörigen A_{n+1} und ist daher die erste Ecke eines der beiden gesuchten Polygone. Bei der praktischen Durchführung wird man auch wirklich am einfachsten zum Ziel kommen, wenn man mit Hülfe des obigen Verfahrens die Drehpunkte von A_1A_4, A_1A_6, ... aufsucht. Theoretisch überlegen ist die Lösung mit Hülfe dreier offener Polygone, die auch im Traité [559] angeführt wird. Zur Begründung in Poncelet's Sinne braucht man nur das Pascal'sche Sechseck $A_1A_{n+2}A_{n+1}B_1B_{n+2}B_{n+1}$ zu betrachten. Zwei Paare gegenüberliegender Seiten schneiden sich in P_{n+1} und P_{n+2}, der Verbindungslinie $P_{n+1}P_{n+2}$ gehört deshalb auch der Schnittpunkt von $A_{n+1}B_1$ und $B_{n+1}A_1$ an. Für das Problem, einem Kegelschnitt ein n-Seit zu umschreiben, dessen Ecken gegebenen Geraden angehören, bietet sich eine „indirecte" Lösung aus der „théorie des polaires réciproques".

Liegen P_1, P_2, ..., P_n auf einer Geraden, so dreht sich, wenn n eine ungerade Zahl ist, A_1A_{n+1} um einen letzten festen Punkt

---

la géométrie de la règle, Gerg. Ann., Bd. 8, 1817 u. 1818, S. 141—155 (S. 149). Nachdem Steiner gezeigt hat, wie bei einem durch fünf Bestimmungsstücke gegebenen Kegelschnitte die Aufgabe auf die entsprechende beim Kreise zurückgeführt werden kann verweist er auf die Poncelet'sche Lösung derselben: Constructionen mittelst der geraden Linie etc., Anhang, Aufgabe 21, (Ges. W., Bd. 1, S. 519). Möglicherweise ist er im Besitz der uns jetzt so geläufigen Begründung der Lösung gewesen, da er ganz allgemein zur Auffindung der Doppelpunkte projectivischer Reihen die Projection auf einen Kreis und die Aufsuchung der Directrix der so entstandenen Projectivität empfiehlt. Vgl. Systemat. Entwickelung, Nr. 17, II (Ges. W., Bd. 1, S. 285).

P_{n+1} derselben Geraden, die Berührungspunkte der von P_{n+1} ausgehenden Tangenten sind also die Anfangsecken der beiden gesuchten Polygone. Die Einschnitte eines Polygons von gerader Seitenanzahl in eine Gerade sind deshalb nicht unabhängig von einander, und die Aufgabe hat entweder überhaupt keine Lösung oder deren unendlich viele [563].

5. Es ist von Interesse, die Geschichte des Problems mit Bezug auf die eben dargelegte Poncelet'sche Lösung zu durchmustern.*) Bereits Pappus**) löst in einfacher Weise die Aufgabe, einem Kreise ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten durch vorgeschriebene Punkte P_1, P_2, P_3 einer Geraden l hindurch gehen. Seine Construction ließe sich in Poncelet's Sinne folgendermaßen darstellen: Ist von einem Kreisviereck $ABCD$ eine Seite AB zu einer Geraden parallel, und drehen sich BC und CD um feste Punkte L und M derselben, so dreht sich auch AD um einen festen Punkt N der Geraden; aus Ähnlichkeitssätzen folgt nämlich, daß $ML \cdot MN$ gleich der Potenz des Kreises hinsichtlich M ist. Wird nun ein offenes Polygon $A_1A_2A_3A_4$ dem Kreise eingeschrieben, dessen Seiten durch P_1, P_2, P_3 hindurchgehen, und $A_1\mathfrak{A}_2$ parallel zu l eingetragen, so dreht sich $A_3\mathfrak{A}_2$ nach dem obigen Satze ebenfalls um einen Punkt $\mathfrak{P}_2$ von l. Aus demselben Theorem folgt nun, daß A_1A_4 sich um einen vierten Punkt $\mathfrak{P}_4$ von l dreht; legt man von ihm aus die Tangenten an den Kreis, so erhält man — das ist Pappus' Resultat — die Anfangsecken der gesuchten Dreiecke.

Castillon***) machte zuerst die naheliegende Verallgemeinerung, die drei Punkte P_1, P_2, P_3 beliebig in der Ebene anzunehmen, er führte die Lösung in ziemlich schwerfälliger Weise auf die Aufgabe zurück, einem Kreise einen Winkel von gegebener Größe einzuschreiben, dessen Schenkel durch zwei gegebene Punkte hindurchgehen. Bei weitem einfacher ist die von Euler†) herrührende Behandlung, deren geometrischen Inhalt aber erst Fuß††) erkannte. Es sei wieder $A_1A_2A_3A_4$ ein eingeschriebenes offenes Polygon, dessen

*) Für die Geschichte desselben kann man die Notizen Poncelet's (Traité, Bd. 1, Nr. 562) vergleichen, ferner die Note XI (S. 328—329) in Chasles' Aperçu historique. Es sei überdies auf eine Abhandlung von Brückner hingewiesen: Das Ottajano'sche Problem, Programm-Abh., Zwickau 1892.

**) Pappi collectionis etc. ed. Hultsch, Bd. 2, S. 849 u. 831 (liber VII, Propp. 117 u. 105).

***) Castillon, Sur un problème de géométrie plane qu'on regarde comme fort difficile, Nouv. mém. de l'Ac. d. sc., Année 1776, Berlin 1779, S. 265—283.

†) Euler, Problematis cujusdam Pappi Alexandrini constructio, Acta Ac. sc. imp. Petropolitanae pro Anno 1780, Teil 1, 1783, S. 91—96.

††) Fuſs, Solutio problematis geometrici Pappi Alexandrini, ibidem, S. 97—104.

drei Seiten sich um feste Punkte P_1, P_2, P_3 drehen. Bewegt sich nun die Sehne $A_1\mathfrak{A}_2$ parallel zu P_1P_2, so dreht sich nach dem erwähnten Porisma des Pappus $\mathfrak{A}_2A_3$ um einen Punkt $\mathfrak{P}_2$ von P_1P_2; bewegt sich ferner die Sehne $A_4\mathfrak{A}_3$ parallel zu $\mathfrak{P}_2P_3$, so dreht sich nach demselben Gesetz $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ um einen Punkt $\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{P}_2P_3$, so daſs von dem Polygonzug $A_1\mathfrak{A}_2\ \mathfrak{A}_3A_4$ die erste und die letzte Seite feste Richtungen haben, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ durch einen festen Punkt geht. Legt man in bekannter Art eine der beiden Geraden durch $\mathfrak{P}_3$, denen der Peripheriewinkel $P_1\mathfrak{P}_3P_3$ zukommt, so fallen A_1 und A_4 zusammen, und man hat eine Lösung der Aufgabe. Die Verallgemeinerung der Fuſs'schen Lösung auf den Fall von n Punkten gab Ottajano.*) Während die Seiten des offenen Polygons $A_1A_2\dots A_{n+1}$ sich der Reihe nach um $P_1, P_2, \dots, P_n$ drehen und die Sehne $A_1\mathfrak{A}_2$ sich parallel zu P_1P_2 bewegt, dreht sich $\mathfrak{A}_2A_3$ um einen Punkt $\mathfrak{P}_2$ von P_1P_2; gleitet die Sehne $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$ parallel zu $\mathfrak{P}_2P_3$, so dreht sich $\mathfrak{A}_3A_4$ um einen Punkt $\mathfrak{P}_3$ von $\mathfrak{P}_2P_3$. So fortfahrend, erhält man schlieſslich einen neuen Polygonzug $A_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\dots\mathfrak{A}_nA_{n+1}$, dessen letzte Seite sich um einen festen Punkt $\mathfrak{P}_n$ dreht, während alle anderen Seiten sich selbst parallel bleiben. Bei ungeradem n ist $A_1\mathfrak{A}_n$ die Sehne eines bekannten Peripheriewinkels und gleitet an einem bestimmten, zu dem gegebenen concentrischen Kreise; die Tangenten, welche der letztere aus $\mathfrak{P}_n$ erhält, bestimmen die Anfangsecken der beiden Polygone, welche der Aufgabe genügen. Bei geradem n hat $A_1\mathfrak{A}_n$ eine bestimmte Richtung, und der durch $\mathfrak{P}_n$ gehende Strahl dieser Richtung schneidet die beiden Anfangspunkte der gesuchten Polygone aus. Mit Ottajano's Lösung nahe verwandt, obgleich von derselben unabhängig, ist eine andere von Malfatti.**)

6. Zu der Poncelet'schen Lösung gelangen wir jetzt aus der Erwägung, daſs ein Strahlenbüschel auf einem Kegelschnitt eine Involution ausschneidet, also die Zuordnung zwischen zwei mit einem festen Punkte auf einer Geraden liegenden beweglichen Punkten die projectivische ist. Die erste rechnende Behandlung des Problems, die von Lagrange herrührt und von Castillon***) mitgeteilt wird, macht von einer ähnlichen Überlegung Gebrauch. Eine Sehne A_1A_2 eines Kreises drehe sich um den Punkt P_1; man verstehe unter x und y die Winkel A_1CP_1 und A_2CP_1, wo C der Mittelpunkt des Kreises ist; alsdann besteht die Relation

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\frac{a-r}{a+r},$$

*) Ottajano, Considerazioni sintetiche sopra di un celebre problema etc., Mem. di Mat. e fis. d. soc. ital., Bd. 4, Verona 1788, S. 4—17.

**) Malfatti, Soluzione generale di un problema geometrico di Pappo Alexandrino, ibidem, S. 201—205.

***) a. a. O. S. 45*.

wenn r der Radius und a der Abstand CP_1 ist; werden A_3CP_1, P_2CP_1, P_3CP_1, CP_2, CP_3 mit z, m, n, b, c bezeichnet, so bestehen für ein eingeschriebenes Dreieck $A_1A_2A_3$, dessen Seiten der Reihe nach durch P_1, P_2, P_3 hindurchgehen, noch die Gleichungen

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(y-m)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z-m)=\frac{b-r}{b+r},\quad \operatorname{tg}\frac{1}{2}(x-n)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(z-n)=\frac{c-r}{c+r}.$$

Die Elimination von y und z ergiebt eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$. Lexell*) hat es unternommen, der hieraus entspringenden Construction eine geometrische Bedeutung abzugewinnen; man kann nicht sagen, dafs es ihm völlig gelungen ist. Die Lagrange'sche Betrachtung gestaltete Carnot**) symmetrischer, indem er sie zugleich auf den allgemeinen Fall ausdehnte. Von den Gröfsen $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1CP_1$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_2CP_2$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_3CP_3$, $\ldots$, $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1CP_1$ ist jede folgende eine gebrochene lineare Function der vorangehenden; hieraus folgt für jede einzelne eine quadratische Gleichung. L'Huilier***) hat Ottajano's geometrische und Carnot's analytische Lösung im wesentlichen ungeändert reproducirt. Nachdem er einem Kreise ein Dreieck eingeschrieben hat, dessen Seiten gegebene Richtungen haben, macht er die Bemerkung, dafs bei einem Viereck die entsprechende Aufgabe im allgemeinen nicht lösbar ist, weil die Richtung der vierten Seite durch die der drei anderen eindeutig gegeben ist, so dafs unendlich viele Vierecke dem Kreise eingeschrieben werden können, deren Seiten zu denen eines gegebenen parallel laufen. Man hat also hier das erste Beispiel des Schliefsungsproblems, das bei Poncelet sich zeigte. Die Verallgemeinerung auf einen Kegelschnitt vollzog zuerst Brianchon.†) Drehen sich die n Seiten eines n-Ecks um Punkte einer Geraden, schreiten $n-1$ Ecken auf einem Kegelschnitt fort, so beschreibt auch die letzte freie Ecke einen Kegelschnitt. Von seinen Einschnitten in den gegebenen sind zwei, für gerades n der Geraden angehörig, der Aufgabe fremd, die beiden anderen geben Ecken der gesuchten Polygone. Doch übersieht Brianchon, dafs im Fall eines geraden n die beiden Kegelschnitte sich in den beiden erwähnten Punkten berühren, so dafs im allgemeinen überhaupt keine, und, wenn die Kegelschnitte zusammenfallen, unendlich viele Lösungen sich ergeben. Zum Beweise seines Hülfssatzes projicirt Brianchon die

*) Lexell, Solutio problematis geometrici in Actis Academiae etc., Acta Ac. sc. imp. Petropolitanae pro Anno 1780, Teil 2, 1784, S. 70—90.

**) Carnot, géométrie de position, 1803, S. 383—387.

***) L'Huilier, Éléments d'analyse géométrique et d'analyse algébrique appliquées à la recherche des lieux géométriques, Paris und Genf 1809, (S. 277ff.).

†) Brianchon, Solution de plusieurs problèmes de géométrie, Journ. de l'éc. pol., Heft 10, 1810, S. 1—15.

Gerade ins Unendliche. Man hat dann, da alle Seiten des Polygons vorgeschriebene Richtungen besitzen, für die Coordinaten seiner Ecken $2n-2$ lineare und eine quadratische Gleichung, aus denen für die Coordinaten der freien Ecke eine quadratische Gleichung hervorgeht.

7. Ungefähr gleichzeitig stellte Gergonne*) die Aufgabe, einem Kreise ein n-Eck zu umschreiben, dessen Ecken auf gegebenen Geraden liegen. Encontre**) erkannte sofort, dafs die Geraden, welche die gesuchten Berührungspunkte verbinden, durch die Pole der gegebenen Geraden hindurch gehen, so dafs die neue Aufgabe auf die bereits gelöste zurückgeführt war. Gergonne gab hierauf für den Fall des umschriebenen Dreiecks eine Lösung***), die sogleich von Servois†) und Rochat††) bestätigt wurde. In der Form, in der er sie später für den Kegelschnitt wiederholte, lauten die Lösungen der beiden dualen Aufgaben folgendermafsen†††): Man suche zu den Verbindungslinien der drei gegebenen Punkte P_1, P_2, P_3 die Pole $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3$ und verbinde die Schnittpunkte der Geraden $P_1\mathfrak{P}_1$, $P_2\mathfrak{P}_2$, $P_3\mathfrak{P}_3$ mit den Seiten $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ unter einander; diese Geraden schneiden die 6 Ecken der gesuchten beiden Dreiecke aus (S. 332). Sieht man für den zweiten Fall p_1, p_2, p_3 oder P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 als gegeben an, so liegen die Berührungspunkte der gesuchten Dreiecke auf den Geraden, welche die Schnittpunkte p_1, $P_1\mathfrak{P}_1$; p_2, $P_2\mathfrak{P}_2$; p_3, $P_3\mathfrak{P}_3$ unter einander verbinden. Diese Lösung geht unmittelbar aus der dualen Form der anderen hervor. Poncelet hebt hervor, wie die Gergonne'sche Lösung sich mit seinen allgemeinen Principien in Einklang bringen läfst. Ein offenes eingeschriebenes Polygon $A_1A_2A_3A_4$, dessen Seiten sich der Reihe nach um P_1, P_2, P_3 drehen, kann zu einem eingeschriebenen Fünfeck $A_1A_2A_3A_4A_5$ ergänzt werden, dessen Seiten A_4A_5 und A_5A_1 sich

*) Gergonne, Questions proposées, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 17 (Aufgabe 1).

**) Encontre, Solution du problème I de la page 17 de ce volume, pris dans son énoncé le plus général, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 122—124.

***) Gergonne, Questions proposées, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 126—128 (Aufgabe 1).

†) Servois, Solution du premier des deux problèmes proposés à la page 259 de ce volume, et du problème proposé à la page 126 du même volume, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 337—341.

††) Rochat, Autre solution du même problème, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 u. 1811, S. 342.

†††) Gergonne, Solution et construction, par la géométrie analytique, de deux problèmes dépendant de la géométrie de la règle, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 325—334. Durrande bestätigte diese Lösung auf ähnliche Art, wie dies Servois gethan hatte, jedoch ist seine Herleitung etwas directer. Vgl.: Démonstration élémentaire des principales propriétés etc., Gerg. Ann., Bd. 14, 1823 u. 1824, S. 29—62 (§ 5).

um neue Punkte P_4 und P_5 drehen; als P_5 kann ein Punkt von $P_1 P_2$ gewählt werden. P_4 ist der Schnittpunkt der Polare $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ von P_3 mit der Geraden, welche P_3 und den Pol $\mathfrak{P}_3$ von $P_1 P_2$ verbindet; P_4 P_5 enthält auf Grund der allgemeinen Entwickelung die Anfangsecken der beiden gesuchten Dreiecke, und da augenscheinlich für diese Gerade P_3 und P_1 vertauscht werden können, so gelangt man zu Gergonne's Lösung. Die neuere synthetische Geometrie konnte Poncelet's Lösung durch eine elegantere nicht ersetzen, sie vermochte nur, dieselbe nach Steiner's Andeutungen einfacher zu begründen. Die Geschichte des Problems kann als abgeschlossen gelten, nachdem es gelungen war, den Involutionssatz, welcher sich in Frégier's Theorem ausspricht, als die eigentliche Quelle der Construction zu erkennen. Diese abschliefsende Entwickelung ist von Seydewitz gegeben worden.*) In seiner Arbeit findet sich der Satz, dafs zwei projectivische, einem Kegelschnitt angehörige Punktreihen einen zweiten doppelt berührenden Kegelschnitt erzeugen, und es wird die Aufgabe insofern erweitert, als an Stelle von Drehpunkten solche doppelt berührende Kegelschnitte eintreten können. An einer späteren Stelle werden mich die Arbeiten von Hamilton, Gardiner, Cayley und Townsend beschäftigen, in denen die entsprechende Aufgabe bei Oberflächen zweiter Ordnung behandelt wird.

8. In einer schon mehrfach erwähnten Abhandlung Poncelet's**) aus dem Jahre 1817 findet sich der Satz: Man kann einer Parabel unendlich viele n-Ecke umschreiben, deren Winkel einander gleich sind. Die Ecken derselben liegen sämtlich auf einem zweiten Kegelschnitt, welcher den Brennpunkt und dessen Directrix mit der Parabel gemein hat. Er mufs zu dieser Zeit noch nicht erkannt haben, dafs hier ein specieller Fall eines allgemeineren Satzes vorliegt; wenigstens stellt er (S. 154) die Aufgabe, ein n-Eck zu zeichnen, das einem Kegelschnitt eingeschrieben, einem anderen umschrieben ist. Der letzte Teil des Traité ist dem Nachweise gewidmet, dafs diese Aufgabe unlösbar ist, dafs entweder überhaupt kein derartiges n-Eck existirt oder mit jedem Punkt des einen Kegelschnitts als Anfangspunkt sich ein geschlossenes n-Eck bilden läfst. Eine solche Bedeutung legte Poncelet diesem Satz bei, dafs er sein Siegel mit Bezug auf ihn wählte. Unter der Umschrift „aut semper aut numquam" zeigt es drei Kegelschnitte und eine Reihe von Vierecken, die dem ersten ein-, dem zweiten umschrieben sind, andererseits eine Reihe offener Vierseite, die dem zweiten ein-, dem dritten umschrieben sind. Nach den Principien des Werkes genügt es, den Satz für zwei Kreise abzuleiten. Hier gründet ihn Poncelet, wie

*) Fr. Seydewitz, Über eine wesentliche Verallgemeinerung des Problems von den, den Kegelschnitten ein- oder umgeschriebenen Polygonen, Grunert's Archiv, Bd. 4, 1844, S. 421—430.

) Vgl. S. 143.

folgt, auf eine metrische Grundlage. Es seien A, A_1; B, B_1; C, C_1 die drei Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits, L, M, N die gegenseitigen Schnittpunkte von AA_1, BB_1, CC_1, endlich $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Mitten der Strecken AA_1, BB_1, CC_1, welche nach dem Newton'schen Satz in gerader Linie liegen. Da M, N und A, A_1 einander harmonisch trennen, so ist

$$\mathfrak{A}A^2 = \mathfrak{A}A_1^{\,2} = \mathfrak{A}M \cdot \mathfrak{A}N,$$

und es gelten die entsprechenden Relationen für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$. Sind nun A_1, B_1, C_1 drei nicht in gerader Linie liegende Punkte, so haben LA_1, MB_1, NC_1 einen Punkt gemein. Man hat also den Satz: „Eine Gerade möge die Seiten eines Dreiecks LMN in den Punkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ treffen. Bestehen für drei andere Punkte A, B, C der Geraden MN, NL, LM die Beziehungen

$$A\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}M \cdot \mathfrak{A}N, \quad B\mathfrak{B}^2 = \mathfrak{B}N \cdot \mathfrak{B}L, \quad C\mathfrak{C}^2 = \mathfrak{C}L \cdot \mathfrak{C}M,$$

so liegen A, B, C entweder in einer Geraden, oder ihre Verbindungslinien mit L, M, N laufen in einem Punkt zusammen." Es sei nun $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ die ideelle gemeinschaftliche Sehne eines Kreisbüschels und das Dreieck LMN einem Kreise K desselben eingeschrieben. Alsdann sind A, A_1; B, B_1; C, C_1 die Berührungspunkte von MN, NL, LM mit Kreisen K_1, K_2, K_3 des Büschels. Liegen die drei Berührungspunkte auf den Seiten des Dreiecks selbst, so schneiden sich nach dem Obigen LA, MB, NC in einem Punkt. Man lasse nun von dieser Anfangslage aus L, M, N sich so auf dem Kreise K bewegen, dafs MN und NL an anderen Kreisen K_1 und K_2 des Büschels gleiten. Zu Anfang ist ihre Bewegung als eine Drehung um die Berührungspunkte A und B aufzufassen. LM bewegt sich deshalb zu Anfang an einem Kegelschnitt, der den Kreis K in seinen Schnittpunkten mit AB berührt, C ist der Berührungspunkt von LM mit diesem Kegelschnitt, also auch mit der Enveloppe von LM, da C und AB die Punkte L und M harmonisch trennen: Die zu betrachtende Enveloppe ist also zugleich eine Enveloppe von Kreisen des Büschels und mufs deshalb mit einem Kreise des Büschels zusammenfallen. Gleiten also zwei Seiten eines Dreiecks, das einem Kreise eingeschrieben ist, an zwei Kreisen, die mit ihm zu einem Büschel gehören, so umhüllt auch die letzte Seite einen Kreis des Büschels. Eine unmittelbare Folge hiervon ist das Theorem: Ist ein n-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben, einem zweiten umschrieben, so können seine Ecken auf dem ersten Kegelschnitt so verschoben werden, dafs alle Seiten an dem zweiten Kegelschnitt gleiten; alle Diagonalen des Polygons bewegen sich als Tangenten von Kegelschnitten, die mit den beiden ersten zu einem Büschel gehören. Ist n eine gerade Zahl, so artet der Kegelschnitt, den die Hauptdiagonalen umhüllen, in eine Ecke des gemeinschaftlichen Polardreiecks aus, und gegenüberliegende

Seiten des Polygons schneiden sich auf der gegenüberliegenden Seite desselben. Lassen z. B. zwei Kreise unendlich viele Vierecke zu, die dem einen eingeschrieben, dem anderen umschrieben sind, so müssen sich nach diesem Satze die Verbindungslinien gegenüberliegender Berührungspunkte in einem der beiden Grenzpunkte treffen und auf einander senkrecht stehen.

9. Es ist bekannt, daſs sich an dieses schöne Theorem eine ganz ausgebreitete Litteratur geknüpft hat. Seine Geschichte beginnt mit der Euler*) zugeschriebenen einfachen Beziehung zwischen Radien und Centrale der beiden Kreise, die einem Dreieck ein- und umschrieben sind. Diese Relation hat die Mathematiker vielfach beschäftigt. Erst L'Huilier**) scheint jedoch das Resultat gewonnen zu haben, daſs zwei Kreise unendlich viele Dreiecke zulassen, die dem einen ein-, dem anderen umschrieben sind, sobald die Euler'sche Beziehung erfüllt ist. Fuſs***) hat diesen naheliegenden Schluſs nicht gezogen, obgleich er auch beim Fall des Vierecks, dem ein Kreis ein-, ein zweiter umschrieben ist, eine Beziehung zwischen den Radien und der Centrale der beiden Kreise allein auffand. Steiner†) stellt folgende Aufgabe: „Ist ein gegebenes n-Eck so beschaffen, daſs sich sowohl in als um dasselbe ein Kreis beschreiben läſst, so soll man zwischen den Radien R, r und dem Abstand ihrer Mittelpunkte von einander eine Gleichung finden; für das Dreieck hat Euler diese Gleichung gefunden.“ Noch in demselben Bande des

*) Nach Gino Loria (Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche, 2. Auflage, Turin 1896) ist die Entwickelung an folgender Stelle zu suchen: Novi Comment. ac. sc. imp. Petropolitanae, Bd. 2, 1751. Ich habe sie a. a. O. vergeblich gesucht. Auch führt Fuſs in der weiter unten erwähnten Abhandlung das Theorem nicht auf Euler zurück.

**) L'Huilier, Théorèmes sur le triangle, relatifs à la page 64 de ces Annales, Gerg. Ann., Bd. 1, 1810 und 1811, S. 149—158 (§ VI). In einer Fuſsnote weist Gergonne auf Beweise von Kramp und Maisonneuve hin. Die Aufgabe wird (S. 64) als Porisma etwa in folgender Form gestellt: Liegt im Innern eines Kreises ein Punkt, so ist der Radius eines um ihn beschriebenen Kreises gegeben, dem ein dem ersten Kreis eingeschriebenes Dreieck umschrieben werden kann. Gergonne scheint hiernach nahe daran gewesen zu sein, aus der Euler'schen Formel ein Schlieſsungsproblem abzuleiten.

***) Fuſs, de quadrilateris, quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet, Nova acta ac. sc. imp. Petropolitanae, f. 1792, Bd. 10, 1797, S. 103—125 (§ 30). Die Beziehung für das Dreieck wird im § 32 gegeben.

†) Steiner, Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen, Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 96—98, Ges. W., Bd. 1, S. 127, (3. Aufgabe). Die vierte Aufgabe fordert unter Hinweis auf die zugehörige Entwickelung (Ges. W., Bd. 1, S. 43) die Beziehung zwischen Radien und Centrale zweier Kreise, welche die Einschreibung einer Reihe von n einander berührenden Kreisen gestatten. Die im Text erwähnten Formeln finden sich: Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 287—292 (Vorgelegte Lehrsätze), Ges. W., Bd. 1, S. 159 (4. Lehrsatz).

Crelle'schen Journals teilt er diese Relationen für die Fälle $n = 3, 4, 5, 6, 8$ mit. Es scheint mir unzweifelhaft, dafs wir es bei Steiner nicht blos mit einer „aus Versehen richtigen" Problemstellung zu thun haben. Entweder hatte er das Gesetz auf seine Weise unabhängig als richtig erkannt, oder er hat es mit Hülfe des Schliefsungsproblems der Kreisreihen, welches er unmittelbar auf die Aufgabe folgen läfst, und mit Hülfe der Euler'schen Relation durch Induction geschlossen, und seine Resultate würden dann Erprobungen des Gesetzes sein.

10. In einer zweiten Arbeit hatte Fufs*) für die Fälle $n = 5, 6, 7, 8$ die Bedingung untersucht, welcher zwei Kreise genügen, die einem symmetrischen n-Eck ein- und umschrieben sind. Jacobi hat dieselben mit Steiner's Relationen verglichen und darauf aufmerksam gemacht, dafs sie in Folge des Poncelet'schen Schliefsungsproblems ebenso allgemein sind als Steiner's Formeln selbst. In seiner Arbeit weist Jacobi**) einen überraschenden Zusammenhang mit der Theorie der elliptischen Functionen nach. Es gelingt ihm, aus dem Additionstheorem von $\sin \operatorname{am} u$ einen eleganten Beweis des Poncelet'schen Hauptsatzes zu gewinnen und hieraus die Beziehung zwischen zwei Kreisen, die einem n-Eck ein- bez. umschrieben sind, in einfacher Weise darzulegen. An diese Arbeit knüpft eine umfangreiche Litteratur an, durch welche die Beziehung zwischen zwei Kegelschnitten, die eine unendliche Folge ein- und umschriebener n-Ecke zulassen, allseitig behandelt wurde, und, nachdem die Darstellung der Curven dritter Ordnung durch elliptische Functionen gewonnen war, der Zusammenhang des Problems mit anderen Schliefsungsproblemen, besonders dem Steiner'schen, nach allen Seiten erörtert wurde.***) Um so weniger brauche ich hierauf näher einzugehen, als Gino Loria†) eine zusammenfassende Darstellung über diesen Gegenstand gegeben hat. Hingegen werde ich ausführlich darzuthun haben, auf welchem Wege die synthetische Geometrie sich diesen Zusammenhang klar gemacht hat. Obgleich ich im zweiten Bande dieses Berichtes hierauf zurückkomme, kann ich es mir nicht versagen, schon jetzt auf die Arbeit von August††)

*) Fufs, De polygonis symmetrice irregularibus circulo simul inscriptis et circumscriptis (Conventui exhibita d. 19. April. 1798), Nova acta ac. sc. imp. Petropolitanae, Bd. 13, 1827, S. 166—189.

**) Jacobi, Über die Anwendung der elliptischen Transcendenten auf ein bekanntes Problem der Elementar-Geometrie, Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 376—389. C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke, herausgegeben von Weierstrafs, Bd. 1, Berlin 1881, [Ges. W.] S. 277—293.

***) Vor allen ist hier eine Abhandlung von Clebsch zu nennen: Über einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 63, 1864, S. 94—121.

†) Gino Loria, I poligoni di Poncelet, Turin 1889, und Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet, Bibliotheca mathematica 1889.

††) August, Über den Zusammenhang gewisser Sätze, welche sich

hinzuweisen, in der diese Entwickelung in elegantester Weise dargestellt wird. Die verschiedenen Probleme ergeben sich aus der Umbildung des folgenden Theorems. Die Ecken eines $2n$-Ecks $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{2n}$ können in der Art über eine Curve dritter Ordnung geführt werden, dafs alle seine Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_{2n} A_1$ sich um feste Punkte dieser Curve drehen. Einer von diesen Drehpunkten ist durch die anderen, die man ganz willkürlich wählen kann, eindeutig bestimmt. Auch die Geraden $A_1 A_4$, $A_1 A_6$, ..., $A_1 A_{2n}$, $A_2 A_5$, $A_2 A_7$, ..., $A_{2n-3} A_{2n}$ drehen sich um Punkte der Curve. Durch Einschaltung solcher Diagonalen kann man eben von dem speciellen Fall des Vierseits zu dem allgemeinen Satz übergehen. Bereits Poncelet*) weist, nachdem er das Bewegungsgesetz für den Fall des Vierseits entwickelt hat, auf diese Verallgemeinerung hin. Aus diesem Lehrsatz ergiebt sich das Theorem von den Steiner'schen Polygonen, wenn die Drehpunkte abwechselnd an die eine oder andere von 2 Stellen gelangen. Andererseits kann man dem Satze folgende räumliche Form geben: „Die Ecken eines räumlichen $2n$-Ecks können derart über die Grundcurve eines Büschels von Flächen zweiter Ordnung geführt werden, dafs seine Seiten sich auf Hyperboloiden bewegen, die dem Büschel angehören." Projicirt man diese räumliche Figur von einer Ecke des Polartetraeders aus, so entsteht das Poncelet'sche Bewegungsgesetz, projicirt man hingegen von einem Punkt der Grundcurve aus, so entsteht die obige Verallgemeinerung des Steiner'schen Schliefsungsproblems.

11. Zunächst erwies sich nur der erste Fall, der des Dreiecks, der geometrischen Behandlung zugänglich. Bereits Brianchon stellt den Satz auf, ohne Andeutung eines Beweises freilich, dafs zwei einem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke auch einem Kegelschnitt umschrieben sind.**) Aus den Lehrsätzen von Pascal und Brianchon hat Durrande***) das Theorem in einfacher Weise abgeleitet. Er überträgt dasselbe übrigens auf Kegel und gelangt zu folgender Erweiterung für den Raum: „Es giebt unendlich viele Tetraeder, die einer Oberfläche zweiter Ordnung eingeschrieben, einer zweiten umschrieben sind, sobald ein einziges Tetraeder dieser Art existirt." Sein Versuch, den Fall $n = 4$ des Poncelet'schen Schliefsungsproblems elementar zu erweisen, mufs als mifslungen bezeichnet werden.†)

---

auf geschlossene Reihen geometrischer Gebilde beziehen, Grunert's Arch., Bd. 59, 1876, S. 1—17.

*) Poncelet, Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques, Crelle's Journ., Bd. 8, 1832, S. 21—41, 117—137, 213—252, 370—410; (Traité, Bd. 2, 1866, Nr. 158, 159).

**) Brianchon, mémoire sur les lignes du second ordre etc., Paris, 1817.

***) a. a. O. S. 148†††(§ 6).

†) Durrande, Démonstration des propriétés des quadrilatères à la

Es ist bekannt, dafs sich aus der projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte der Dreiecks-Satz unmittelbar ablesen läfst. Die Thatsache, dafs A (BCB_1C_1) und A_1 (BCB_1C_1) projectivische Würfe sind, hat zur unmittelbaren Folge, dafs AB, AC, A_1B_1, A_1C_1 von BC und B_1C_1 unter gleichem Doppelverhältnis geschnitten werden. Eine ähnliche Herleitung findet sich in Steiner's systematischer Entwickelung sowohl als in einer der ersten Darstellungen Chasles', die auf dem Doppelverhältnis-Begriff beruhen. Der Satz erscheint hier in der ebenfalls von Steiner herrührenden Fassung, dafs zwei Polardreiecke eines Kegelschnitts in der soeben betrachteten Beziehung stehen.*) Ein specieller Fall dieses Satzes liefs sich in dem von Brianchon und Poncelet aufgestellten Theorem erkennen, dafs jeder einem Polardreieck einer gleichseitigen Hyperbel umschriebene Kreis ihren Mittelpunkt enthält.

Neben die besprochenen Schliefsungsprobleme stellen sich die elementaren, die in dem Capitel über cyklisch-projectivische Punktreihen erörtert werden. Zu diesen Problemen gehört das Poncelet'sche Schliefsungsproblem, wenn man die beiden Kegelschnitte eine doppelte Berührung eingehen läfst, ferner das Steiner'sche Kreisreihenproblem, das sich auf diesen Specialfall zurückführen läfst.

XIX. Poncelet's Traité, Supplément.

1. Ich gelange nunmehr zu den wichtigen Untersuchungen über Oberflächen zweiter Ordnung, die Poncelet in einem fünften, Supplément überschriebenen Abschnitt seines grofsen Werkes vereinigt hat. Zwei räumliche Figuren sind homolog, wenn den Punkten, Geraden und Ebenen der einen entsprechende Elemente der anderen zugewiesen werden, überdies entsprechende Punkte auf Strahlen eines Bündels liegen, entsprechende Gerade sich auf einer festen Ebene schneiden (576—579). Ähnliche und ähnlich gelegene Figuren sind homolog; man mufs also, da je zwei entsprechende Gerade parallel sind, den Schlufs ziehen: „Tous les points à l'infini de l'espace peuvent être censés appartenir à un seul et même plan, nécessairement indéterminé de situation" (580). Zwei Tetraeder, die einen Homologiepunkt aufweisen, besitzen auch eine Homologieebene (582). Zwei Ecken eines beweglichen Dreiecks, dessen Seiten sich um zwei zugeordnete Punkte und das Centrum der Homologie drehen, beschreiben, wenn die dritte auf der Homologieebene verbleibt, zwei homologe Figuren (583). Die Beziehung hat für die künstlerische Darstellung eine grofse Bedeutung. Ein Bas-Relief steht zu der

---

fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle, Gerg. Ann., Bd. 15, 1824 u. 1825, S. 133—145.

*) Chasles, Propriétés des lignes et des surfaces du second degré, Quet. Corr., Bd. 10, 1838, S. 166—169.

räumlichen Figur, welche sie darstellt, in der Homologie-Beziehung, und zwar ist der Augenpunkt das Centrum der Beziehung. Hinsichtlich der Gesetze der Reliefperspective ist jedoch Poncelet bekanntlich nicht ohne Vorläufer. Bereits Ubaldo*) hat nach Burmester „den Gedanken der collinearen Abbildung des Raumes ausgeprägt". Vielleicht hat Desargues mit der Äufserung, es gäbe „des massifs", Flächen, welche sich zu einer „boule", einer Kugel, genau so verhalten, wie eine Ellipse zu einem Kreise**), den Gedankengang im Auge gehabt, den ich weiter unten schildern werde. Aber jedenfalls mufs nachdrücklich auf die Breysig'sche Darstellung hingewiesen werden.***) In derselben wird ausführlich gezeigt, wie man unter Benutzung von Spurebene und Fluchtebene im Stande ist, Grund- und Aufrifs eines Reliefs zu verzeichnen. Bei ausgesprochener Rücksicht auf die Zwecke der Praxis beschränkt sich Breysig lediglich auf Ansichten in Front. Auch steht seine Untersuchung insofern eine Stufe unter derjenigen Poncelet's, als er die Möglichkeit eines mathematisch genauen Reliefs nicht nachweist, sondern sich nur damit beschäftigt, das selbstverständlich gegebene Abbild praktisch möglichst einfach zu bestimmen. Man mufs dies festhalten, um Poncelet's Verhalten gegen Breysig verstehen zu können. Erst mehrere Jahre nach Abfassung des Traité wurde er von Anger durch Jacobi's Vermittelung auf das Werk aufmerksam gemacht. In einer Note zur „Analyse des transversales" spricht er sich dahin aus: „Ce petit ouvrage .... contient sur le tracé des bas-reliefs des préceptes qui, pour le fond, se trouvent d'accord avec ceux que j'ai moi-même établis à l'endroit cité."†) Diese Note hat Poncelet beim Wiederabdruck der Abhandlung zurückgezogen; er erklärt an anderer Stelle, eine genaue Übersetzung des Buches von Breysig, das er bei Abfassung der Note aus Unkenntnis des Deutschen nicht kennen lernen konnte, habe ergeben, dafs eine Analogie zwischen den Methoden nur im Titel bestehe.††) Anger hat sich in verschiedenen Artikeln der Sache Breysig's angenommen.†††)

---

*) Guidi Ubaldi e marchionibus montis perspectivae libri sex, Pisauri 1600, S. 283.

**) Desargues, Brouillon-project etc., Ed. Poudra, Bd. 1, S. 214.

***) Breysig, Versuch einer Erläuterung der Reliefsperspective, zugleich für Maler eingerichtet, Magdeburg 1798.

†) Poncelet, Analyse des Transversales etc., Crelle's Journ., Bd. 8, 1832 (S. 397). (Vergl. S. 153*.)

††) Poncelet, Note relative à une réclamation de M. Amyot et aux observations de MM. Chasles et Cauchy qui y ont donné lieu. Comptes rendus, Bd. 16, 1843, S. 947—954, (Traité, Bd. 2, Paris 1866, S. 350). Man vergleiche auch Traité, Bd. 2, S. 221.

†††) Anger, Analytische Darstellung der Basrelief-Perspective, Danzig 1834. Anger, Beiträge zur analytischen Basrelief-Perspective, Danzig 1836. Anger, Über die Transformation der Figuren in andere derselben Gattung, Grunert's Arch. Bd. 4, 1844, S. 281—290.

2. Eine Oberfläche zweiter Ordnung ist hinsichtlich eines beliebigen Punktes zu sich selbst homolog, der umschriebene Kegel berührt also in einer ebenen Curve, welche die Homologieebene ausschneidet. Homologe Gerade schneiden sich auf dieser Polarebene, treffen aber aufserdem die Fläche in zwei homologen Paaren von Punkten. Hiernach ist die Polarebene der Ort der Punkte, welche die Fläche von dem Pol harmonisch trennt. Sind zwei Oberflächen zweiter Ordnung einem und demselben Kegel eingeschrieben, so kann man die Spitze zum Centrum der Homologie machen, alsdann hat man die Berührungscurven auf einander zu beziehen und kann noch auf zwei Arten die Schnittpunkte der beiden Flächen mit einer beliebigen, vom Centrum ausgehenden Geraden einander zuweisen. Jedesmal ist die Homologie-Beziehung völlig bestimmt; es folgt, dafs beide Flächen zwei ebene Schnitte mit einander gemein haben (587). Die „théorie des polaires réciproques" zeigt (592), dafs zwei Flächen, die einen Kegelschnitt gemein haben, zwei Homologiecentra aufweisen und ebendeshalb sich in noch einer zweiten ebenen Curve begegnen.*) Für zwei Kugeln, wie überhaupt für zwei ähnliche und ähnlich gelegene Oberflächen zweiter Ordnung fällt die eine der beiden Homologieebenen ins Unendliche hinaus. Man mufs also, um es mit Poncelet's Worten auszudrücken, schliefsen „que deux telles surfaces ont toujours une section plane commune à l'infini, réelle ou idéale" (593). Poncelet hat sich nicht bewogen gefühlt, den hiermit implicite gegebenen Satz, dafs alle Kugeln des Raumes einen bestimmten unendlich fernen Kegelschnitt mit einander gemein haben, ausdrücklich auszusprechen. Bei der Behandlung der Kreisschnitte aber tritt hervor, dafs er diesen Schlufs thatsächlich gezogen hat (vergl. auch 630).

Wenn zwei Oberflächen sich in einem Homologiecentrum treffen, so müssen sie die Tangentialebene mit einander gemein haben. Zwei Flächen haben entweder in unendlicher Nähe eines Berührungspunktes reelle Punkte nicht mit einander gemein, oder durchdringen einander in einer Curve, welche an der betreffenden Stelle einen Doppelpunkt besitzt.**) Bei zwei Oberflächen zweiter Ordnung mufs sich diese Curve auf zwei den Oberflächen gemeinschaftliche reelle oder imaginäre Gerade und einen Kegelschnitt reduciren, wenn sie in Homologie-Beziehung stehen (594).

3. Die Theorie der Berührung der Oberflächen zweiter Ordnung behandelt Poncelet unter ausgiebiger Benutzung des Continuitäts-

---

*) Poncelet hebt hier ausdrücklich hervor, dafs die „théorie des polaires réciproques" dazu diene, fast aus jedem Satze einen zweiten abzuleiten. Er verweist zum Beispiel auf Brianchon's Satz, dafs zu einer Oberfläche zweiter Ordnung eine andere polarreciprok ist.

**) Häufig wird Cayley als der erste betrachtet, welcher diese richtige Auffassung von der Berührung zweier Oberflächen ausgesprochen hat.

princips in der Art, wie ich es an einer früheren Stelle geschildert habe [XI, 2]. Daſs zwei Oberflächen, die in zwei Punkten einander berühren, sich nicht notwendig in zwei Kegelschnitten, sondern unter Umständen in einer Geraden und einer Raumcurve dritter Ordnung durchdringen, war Poncelet 1822, wie auch seinen Vorgängern, Monge und Chasles, entgangen.*)

Ergeben drei Kegelschnitte, paarweise zusammengenommen, drei reelle oder ideelle Secanten, die durch einen Punkt gehen, so können sie als Projectionen dreier Kegelschnitte im Raum angesehen werden, die zu zwei und zwei eine reelle oder ideelle Secante gemein haben und in Folge dessen einer Oberfläche zweiter Ordnung angehören. Der scheinbare Umriſs der Oberfläche zweiter Ordnung berührt alle drei Kegelschnitte in je zwei Punkten.

Da dieser Zusammenhang umgekehrt werden kann, so steht die Geometrie der Kegelschnitte, welche einen gegebenen doppelt berühren und deshalb Projectionen der Kegelschnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung sind, im genauesten Zusammenhange mit derjenigen der Kreise einer Ebene oder allgemeiner der Kegelschnitte, welche zwei Punkte enthalten (609).**) Der Satz von den Secanten dreier eingeschriebenen Kegelschnitte trat schon hervor.***) Aber auch die zugehörigen Homologiecentra, welche die Kegelschnitte paarweise ergeben, sind gerade so, wie die Ähnlichkeitspunkte dreier Kreise, die sechs Ecken eines Vierseits. Die vier Seiten desselben sind die Berührungssehnen der Kegelschnitte unserer Mannigfaltigkeit, welche die drei gegebenen berühren. Auch für den entsprechenden Parallelismus zwischen den Kugeln und den Oberflächen zweiter Ordnung, die einer gegebenen eingeschrieben sind, bietet Poncelet die Keime in dem Satz: „Zwei Oberflächen, die sich in zwei Kegelschnitten begegnen, sind unendlich viele Oberflächen zweiter Ordnung zugleich umschrieben; unter denselben befinden sich zwei Kegel.“ Chasles hat diese Analogie weiter verfolgt: Man kommt bei vier Oberflächen, die einer gegebenen eingeschrieben sind, auf acht Homologieebenen, in deren jeder sechs Homologiecentra zweier der Oberflächen sich befinden, und auf acht „points de symptose“, in deren jedem sechs der Ebenen zusammenlaufen, welche gemeinschaftliche Kegelschnitte zweier der gegebenen Oberflächen ent-

*) Wie Poncelet 1865 anführt (S. 415), hat de la Gournerie ihn auf diese Ausnahme des Monge'schen Satzes aufmerksam gemacht.

**) Poncelet verbreitet sich hierüber mit nicht sehr groſser Klarheit in den Nrn. 605—609. Am deutlichsten kann man diesen Zusammenhang hervortreten lassen, wenn man eine Hülfsfläche zweiter Ordnung zweimal, zuerst stereographisch von einem ihrer Punkte aus, alsdann von einem beliebigen Punkte aus, auf eine Ebene projicirt.

***) Offenbar ist der Satz erst vollständig in der bei Plücker vorliegenden Form, die gelegentlich des Satzes von Brianchon angeführt wurde [II, 16].

halten. Verbindet man die Pole einer Homologieebene nach den vier Flächen mit einem point de symptose, so schneiden diese Geraden die acht Berührungspunkte von zwei Oberflächen aus, welche alle vier Oberflächen berühren und der umschriebenen Oberfläche längs ihres Schnittes mit der betreffenden Homologieebene eingeschrieben sind. Jede der 128 so entstehenden Oberflächen hat natürlich zwei Gerade mit jeder der gegebenen gemeinschaftlich.*)

4. Von großer Wichtigkeit sind diejenigen Seiten des Traité, welche der Aufsuchung des gemeinschaftlichen Polartetraeders zweier Oberflächen zweiter Ordnung gewidmet sind. Besteht ihre Schnittcurve — von der vierten Ordnung — aus zwei getrennten Zügen, so giebt es sicherlich vier Scharen von Ebenen, welche die Curve an zwei Stellen berühren; man kann durch eine Tangente des einen Zuges sowohl Ebenen legen, welche denselben Zug noch zweimal treffen, als auch Ebenen, welche dem zweiten Zug begegnen. Beide Scharen von Ebenen werden durch je zwei doppelt berührende Ebenen abgeschlossen, welche die genannten Scharen beschreiben. Aus den beiden Flächen schneidet jede derartige Ebene zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte aus. Zwei solche Paare schneiden auf der Schnittlinie ihrer Ebenen dieselben beiden Punktpaare A, A_1; B, B_1 aus; die beiden Berührungssehnen enthalten deshalb den einen oder anderen der beiden Punkte K, L, welche durch A, A_1 und B, B_1 harmonisch getrennt werden. Betrachtet man eine Schar gleichartig berührender Tangentialebenen, so dafs eine sprungweise Änderung der Berührungssehne ausgeschlossen ist, so läfst sich folgern, dafs je zwei von ihnen denselben der beiden Punkte K, L enthalten, so dafs alle in einem einzigen Punkt, der Spitze eines Kegels, welcher die Raumcurve enthält, zusammenlaufen (611). Die Spitzen der übrigen etwa vorhandenen Kegel liegen auf der gemeinsamen Polarebene beider Flächen nach der ersten Spitze und bilden das gemeinsame Polardreieck der in ihr enthaltenen Kegelschnitte, so dafs die Gesamtzahl der Spitzen im allgemeinen nicht gröfser als vier ist. Ein Specialfall dieses Satzes ist das Theorem von Monge, nach dem zwei concentrische Oberflächen zweiter Ordnung ein gemeinschaftliches System conjugirter Durchmesser besitzen (617).

Da durch die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung schon Kegel hindurchgehen, muss sie erst recht auf anderen Oberflächen zweiter Ordnung enthalten sein. Poncelet giebt indessen doch noch eine Art Begründung dieses Theorems: Läfst man eine Ebene um eine Gerade sich drehen und verbindet ihre Einschnitte in die Grundcurve durch einen Kegelschnitt mit einem festen Punkt

*) Chasles, Aperçu historique, Note 28; Généralisation de la théorie des projections stéréographiques — Surface du second degré tangente à quatre autres, S. 372—375.

der Geraden, so entsteht eine Fläche, die mit jedem Kegelschnitt der einen gegebenen Fläche genau vier Punkte gemein hat und deshalb von der zweiten Ordnung sein mufs (613).

5. Legt man parallel zu einem Kreisschnitt einer Oberfläche zweiter Ordnung einen Schnitt durch eine Kugel, so erhält man Curven, die eine unendlich ferne Secante mit einander gemein haben. Die Auffindung der Kreisscharen setzt also die Ermittelung der gemeinschaftlichen Secanten der beiden unendlich fernen Schnitte der Oberfläche und der Kugel voraus. Man sucht zu diesem Zweck zunächst die Polarebenen eines unendlich fernen Punktes bezüglich der beiden Oberflächen auf. Der unendlich ferne Punkt ihrer Schnittlinie beschreibt, wenn ersterer über eine Gerade geführt wird, den zu ihr reciproken Kegelschnitt. Zwei derartige Kegelschnitte haben neben dem Punkt, welcher zum Kreuzungspunkt der zugehörigen Geraden reciprok ist, drei reelle Punkte, das gemeinschaftliche Polardreieck der unendlich fernen Kegelschnitte, gemeinschaftlich.*) Die drei so erhaltenen Punkte sind die Einschnitte der Axen in die unendlich ferne Ebene (619). Überträgt man nun auch weiter das, was über die Aufsuchung der gemeinschaftlichen Punkte zweier Kegelschnitte gesagt wurde, Wort für Wort auf die unendlich fernen Kegelschnitte der Oberfläche und einer Kugel, so erhält man vier imaginäre Schnittpunkte, die auf zwei reellen Secanten und auf zwei Paaren imaginärer Secanten liegen. In Folge dessen enthält jede Mittelpunktfläche zweiter Ordnung zwei reelle Kreisscharen und zwei Paare imaginärer Kreisscharen. Jede der drei Axen ist zu den Ebenen zweier Kreisscharen parallel (621). Bei einem Paraboloid besteht der unendlich ferne Kegelschnitt aus einem Paar imaginärer oder reeller Geraden. Die Schnittpunkte desselben mit dem unendlich fernen Kegelschnitt einer Kugel liegen noch auf zwei weiteren Geradenpaaren, von denen beim elliptischen Paraboloid eines reell ist. Folglich enthält dasselbe zwei Scharen reeller Kreise, zwei Scharen imaginärer Kreise, zwei Scharen imaginärer Geraden. Beim hyperbolischen Paraboloid sind die eigentlichen Kreise imaginär; und die Geraden der Fläche sind für die reellen Kreise eingetreten (622).

Nunmehr läfst sich (629) der Schlufs ziehen, auf den die ganze Betrachtung berechnet war. „Eine Oberfläche zweiter Ordnung kann auf unendlich viele Weisen als das reliefperspectivische Bild einer Kugel betrachtet werden.“ In der That können zwei zu verschiedenen

---

*) Poncelet erwähnt (626) eine Entwickelung Dupin's, in der ebenfalls die Axen einer Oberfläche zweiter Ordnung als Schnittgeraden zweier Kegel erscheinen. Dieselben bestehen aus den Loten, welche man auf die Kegelschnitte der Fläche, deren Ebenen zwei bestimmte Stellungen besitzen, vom Mittelpunkte aus fällen kann. Vgl. Dupin, Essai sur la description des Lignes et des Surfaces du second degré, Journ. de l'éc. pol., Heft 14, 1808, S. 45—83 (S. 66—68).

Scharen gehörige Kreise der Fläche als ihre Schnitte mit einer bestimmten Kugel angesehen werden. Eben weil die Schnittcurve der Flächen zerfällt, giebt es zwei beiden zugleich umschriebene Kegel. Die Spitze eines jeden ist das Centrum von zwei Homologie-Beziehungen, deren Homologieebenen mit den Kreisebenen zusammenfallen, und welche die Kugel in die Oberfläche zweiter Ordnung überführen. Daſs die Homologie-Beziehung notwendig imaginär sein muſs, wenn die vorliegende Fläche geradlinig ist, scheint Poncelet nicht bemerkt zu haben, doch würde er kraft des Continuitätsprincips diese Kluft überbrückt haben.

Die letzten Nummern des Supplément enthalten die Behandlung des Problems des Apollonius im Gebiet der ähnlichen und ähnlich gelegenen Oberflächen zweiter Ordnung und der Kugeln, die sich im wesentlichen der früheren Behandlung des entsprechenden Problems der Ebene anschlieſst.

Ich möchte beim Abschluſs dieses Abschnittes sogleich dem Vorwurf begegnen, daſs der Besprechung des Traité ein zu breiter Raum gewährt worden ist. Die fundamentalen, für die gesamte spätere Entwickelung der Wissenschaft bahnbrechenden Darlegungen geboten eine gewisse Ausführlichkeit der Darstellung. Bisweilen muſste freilich gerade deshalb auf die Art der Beweisführung näher eingegangen werden, um manche Unzulänglichkeit in derselben hervorzuheben, damit später der bedeutende Fortschritt unserer Wissenschaft augenscheinlich werde, der mit den Arbeiten Steiner's beginnt.

Zweiter Abschnitt.

Die Lehre von den Transformationen.

XX. Das Dualitätsgesetz.

Obwohl Poncelet in seinem Traité und in einer vorbereitenden, im achten Bande von Gergonne's Annalen erschienenen Arbeit mit groſser Ausführlichkeit auf die Beziehungen zwischen zwei polarreciproken Figuren eingegangen war, so hatte er doch von vorn herein die Abfassung einer ausführlichen Schrift geplant, die am 12. Juni 1824 der Akademie der Wissenschaften vorgelegt wurde. Erst in der Sitzung vom 8. Februar 1828 erfolgte der Cauchy, Legendre und Poinsot übertragene Bericht über die Abhandlung.*)

*) Rapport sur un mémoire de M. Poncelet, relatif à la Théorie des polaires réciproques, présenté à l'Académie des sciences le 8 février 1828 par M. Cauchy, Bull. de Férussac, Bd. 9, 1828, S. 225—229 (Traité, Bd. 2, S. 359—363).

Die Arbeit gelangte 1829 in extenso zum Abdruck*), nachdem einige der in ihr enthaltenen Anregungen schon auf Grund eines 1826 erschienenen Auszugs**) sich als fruchtbar erwiesen hatten. Ich werde im folgenden Capitel diese Arbeit ausführlich besprechen, vorläufig mufs einer sehr unerquicklichen Folge gedacht werden, nämlich der Fehde zwischen Poncelet und Gergonne, welche gerade an diesen Auszug anknüpft. In drei seit dem Jahre 1824 erschienenen Arbeiten hatte Gergonne den Zweck verfolgt, ein die gesamte Geometrie der Ebene und des Raumes durchziehendes Grundgesetz, das der Dualität, nachzuweisen. In der ersten Arbeit handelt es sich um die Geometrie der Polyeder***). Hier ist bereits consequent jeder Aussage über Ecken, Kanten und Flächen die entsprechende über Flächen, Kanten und Ecken gegenübergestellt. Ein Beispiel biete das Paar von Sätzen†):

III. Es giebt kein Polyeder, dessen sämtliche Ecken mehr als fünf Kanten besitzen.	III. Es giebt kein Polyeder, dessen sämtliche Flächen mehr als fünf Kanten besitzen.

In der zweiten Arbeit††) verfolgt Gergonne das Dualitätsgesetz bis in die Anfänge der Geometrie hinein. Seine ersten Symptome lassen sich darin erkennen, dafs sowohl zwei Punkte als auch zwei Ebenen eine Gerade bestimmen, dafs drei Punkte in einer Ebene liegen und andererseits drei Ebenen in einen Punkt zusammenlaufen. Er wendet sodann das Gesetz auf den Desargues'schen Dreieckssatz an, dessen geometrischen Beweis er in Erinnerung bringt, und auf einen daraus abgeleiteten Satz über perspectivische Vierseite. Hierauf folgen Poncelet's Satz über perspectivische Tetraeder und die Dandelin'schen Sätze über das Sechsseit auf dem einschaligen Hyperboloid. Auch die Beweise der einzelnen Lehrsätze sind dem Dualitätsgesetz unterworfen. Um dies recht deutlich hervortreten zu lassen, wendet Gergonne die von Poncelet unermüdlich verspottete Schreibweise in zwei Colonnen („à doubles colonnes") an. In der Einleitung, in welcher zuerst das Wort „dualité" auftritt, sagt Gergonne, es gebe mit Ausnahme

*) Poncelet, Théorie générale des polaires réciproques, Crelle's Journ., Bd. 4, 1829, S. 1—71. Die Abhandlung bildet die Section 2 von: Traité, Bd. 2, Paris 1866 (S. 57—121).

**) Poncelet, Analyse d'un mémoire présenté à l'Académie royale des Sciences (Extrait d'une lettre de l'Auteur au Rédacteur des Annales.), Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 265—272.

***) Gergonne, Recherche de quelques-unes des lois générales qui régissent les polyèdres, Gerg. Ann., Bd. 15, 1824 u. 1825, S. 157—164.

†) Enthält das Polyeder a Dreiecke, b Vierecke, c Fünfecke, so ist $3a + 2b + c > 12$.

††) Gergonne, Considérations philosophiques sur les élémens de la science de l'étendue, Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 209—231.

metrischer Beziehungen nicht eine geometrische Wahrheit der Ebene oder des Raumes, der nicht eine andere durch Vertauschung der Punkte und Geraden, bzw. Punkte und Ebenen gegenübergestellt werden könne. Unter den vielen Beispielen, welche sich aus den früheren Bänden seiner Zeitschrift für diese Art von Dualität auffinden liefsen, wolle er auf eine Aufgabe von Coriolis*) und auf die soeben erwähnte Arbeit über Polyeder hinweisen. Das Gesetz ist, fährt er fort, eine unvermeidliche Folge der Eigenschaften der Pole, Polaren und Polarebenen bei Curven und Flächen zweiter Ordnung, welche hier eine ähnliche („assez analogue") Rolle spielen wie das Supplement-Dreieck in der sphärischen Trigonometrie. Auch in ihr können, wie Sorlin**) gezeigt habe, die Theoreme paarweise einander gegenübergestellt werden.

In der dritten Arbeit wendet Gergonne***) sein Princip auf Curven und Flächen an. Viele von seinen Entwickelungen sind für die analytische Geometrie epochemachend; so wird der Begriff des Büschels und des Netzes für algebraische Gebilde überhaupt ge-

---

*) Questions proposées, Gerg. Ann., Bd. 9, 1818—1819, S. 289—292 und Gergonne, Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 289 du IX. volume de ce recueil, Gerg. Ann., Bd. 11, 1820 u. 1821, S. 326—336. Die Aufgabe von Coriolis bezieht sich auf eine Configuration, welche dadurch zu Stande kommt, dafs man n Punkte einer Ebene mit bestimmten Massen belastet und den Schwerpunkt derselben auf verschiedene Arten ermittelt. Sind $S_{12}, S_{23}, S_{34}, \ldots, S_{(n-1)n}$ beliebige Punkte von $S_1 S_2, S_2 S_3, \ldots, S_{n-1} S_n$, bezeichnet man mit $S_{123}, S_{234}, \ldots$ die Schnittpunkte $(S_1 S_{23}, S_{12} S_3)$; $(S_2 S_{34}, S_{23} S_4)$; . . ., so laufen $S_1 S_{234}$, $S_{12} S_{34}$, $S_{123} S_4$ in einen Punkt S_{1234} zusammen, und dies läfst sich fortsetzen, bis die ganze Entwickelung mit einem Punkte $S_{123\ldots n}$ abschliefst. Um die Richtigkeit einzusehen, braucht man $S_1, S_2, \ldots, S_n$ nur mit solchen Massen zu versehen, dafs $S_{12}, S_{23}, \ldots, S_{(n-1)n}$ die Schwerpunkte je zweier auf einander folgender Massen sind. Alsdann ist jeder Punkt der Schwerpunkt der Massen, die in seinem Index auftreten. Gergonne hatte der Aufgabe die duale Form hinzugesellt. Wie er an der zweiten Stelle ausführt, wird man auf diesen Satz geführt, wenn man n Kräfte der Ebene auf verschiedene Arten zusammensetzt; er läfst sich aber, wie er andererseits entwickelt, auch mit Hülfe der Polarentheorie des Kegelschnitts aus dem ersten Satz ableiten. Er fügt hinzu, dafs das erste Theorem sich auf n Punkte im Raum ausdehnen lasse, wie aus der Art des Beweises hervorgehe; das zweite Theorem sei hingegen auf die Ebene beschränkt.

**) Sorlin, Recherches de trigonométrie sphérique (Extrait; par M. Gergonne.), Gerg. Ann., Bd. 15, 1824 u. 1825, S. 273—304. Auf S. 302 hebt Gergonne hervor, dafs man jeder Formel der sphärischen Trigonometrie eine zweite an die Seite stellen kann, indem man jedes Bestimmungsstück des Dreiecks durch das Supplement des gegenüberliegenden Stückes ersetzt. Diese Bemerkung sei auch Sorlin nicht entgangen.

***) Gergonne, Recherches sur quelques lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 214—252.

wonnen. Es werden die einfachsten Formen der Schnittpunkttheoreme beim Curvenbüschel und Flächenbündel vorbereitet und aus einer ursprünglichen Form des Restsatzes mannigfache Resultate gezogen. Merkwürdiger Weise spricht er jedoch nur von dem Grade („degré") seiner Curven und hält es augenscheinlich für selbstverständlich, dafs eine algebraische Curve von einem Punkte aus ebenso viele Tangenten erhält, als sie Schnittpunkte mit einer Geraden gemein hat. In einer Besprechung der zweiten Abhandlung*), die, wie Poncelet**) später angiebt, Gergonne selbst angefertigt hat (unter dem Pseudonym Saigey), wird der Dualismus der sphärischen Trigonometrie benutzt, um das Dualitätsgesetz für die Ebene zu erweisen. Es wird fernerhin hervorgehoben, dafs der Dualismus, obgleich er vorerst nur mit Hülfe der Polareigenschaften in Evidenz gesetzt werden könne, doch als Naturgesetz mit den ersten Elementen selbst zu Tage trete.

2. Als Poncelet den oben erwähnten Auszug seiner Abhandlung an Gergonne einsandte, kannte er nur die ersten beiden der soeben besprochenen Abhandlungen. Da er billiger Weise erwarten durfte, seinen Anteil an der Entdeckung des Übertragungsprincipes hervorgehoben zu sehen, beginnt er die Einleitung mit einer ziemlich mäfsig gehaltenen Reclamation. Er glaube sich im Traité und in einer früheren Abhandlung [V, 10] mit genügender Deutlichkeit über die Kunst, die Theoreme auf Grund der Polareigenschaften zu verdoppeln, ausgesprochen zu haben; er führt sodann zahlreiche Belegstellen des Traité an, in denen er hiervon Gebrauch gemacht hat. Den Wert der zweiten Gergonne'schen Arbeit erkennt er ausdrücklich mit den Worten an, dafs Gergonne das Dualitätsprincip in sehr philosophischer Weise auseinandergesetzt habe, aber er lehnt sich gegen die oben erwähnte Äufserung von Saigey mit Entschiedenheit auf. Dieselbe bedeute nach seiner Meinung nichts mehr, als dafs eine geometrische Wahrheit von ihrem Beweise unabhängig sei („praeexiste"). Gergonne hat nun diese Einleitung in sehr willkürlicher Weise abgeändert; er liefs nur einen ganz allgemeinen Hinweis auf den Traité bestehen, die Belegstellen sind gestrichen worden. Bei dieser Gelegenheit ist auch das von Poncelet erwähnte Datum des Tages gefallen, an dem die „théorie des polaires réciproques" der Akademie vorgelegt wurde. Damit nicht genug, fügte Gergonne dem Auszuge einen Anhang***) bei, der als Antwort auf jenen abgeschwächten Teil der Vorrede aufgefafst werden mufs. Poncelet habe, so führt er aus, das Übertragungsprincip im Traité

*) Bull. de Férussac, Bd. 5, 1826, S. 112 ff.

**) Traité, Bd. 2., S. 379. Dieser und der weiter unten erwähnte Artikel sind nicht unterzeichnet. Saigey ist als der Redacteur der Section I des Bulletin universel de Férussac angegeben.

***) Gergonne, Réflexion sur le précédent article, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 272—276.

nur in sehr flüchtiger Weise erwähnt. Da es weder in der Einleitung desselben, noch auch in dem über ihn erstatteten Bericht der Akademie erwähnt sei, müsse Poncelet ihm nur einen sehr beiläufigen Wert beigelegt haben. Er behauptet schliefslich, selbst vor dem Erscheinen von Poncelet's erster Schrift keine Gelegenheit versäumt zu haben, auf den Dualismus hinzuweisen. Gleichwohl empfinge er, — in seiner Eigenschaft als Redacteur — noch zahlreiche Entwickelungen, die der auch von Poncelet geübten Art der Übersetzung fähig seien, ohne dafs die Autoren daran dächten, sie vorzunehmen.

3. In einer Besprechung des 17. Bandes der Annalen, welche Poncelet auf denselben Saigey zurückführt, finden sich die Worte: „nach Untersuchungen Gergonne's, über die in einem früheren Bande des Bulletin berichtet worden sei, seien alle Beziehungen, die nur Lagenverhältnisse betreffen, von doppelter Natur. Poncelet sei auf diesen Gegenstand mit ausführlicheren Entwickelungen zurückgekommen, („a repris ce sujet avec de plus amples développements") und habe gefunden, dafs auch metrische Beziehungen teilweise dieser Umwandlung unterworfen werden können."*) Da zudem in der Besprechung des zweiten Gergonne'schen Artikels Poncelet's Traité wiederum mit keinem Wort erwähnt wird, kann es nur natürlich gefunden werden, dafs sich Poncelet mit aller Entschiedenheit gegen dieses Verfahren Gergonne's auflehnte.**) Er führt zunächst die oben angegebenen Daten an; seine Reclamation habe nur den Zweck, sich selbst gegen den Verdacht, als habe er ein Plagiat begangen, zu schützen. Derselbe könnte entstehen, da unglücklicher Weise das Datum des Tages unterdrückt sei, an welchem er sein Manuscript der Akademie vorgelegt habe, die letzte Arbeit von Gergonne aber ganz ähnliche Ziele verfolge, wie seine eigene. Hinsichtlich des letzten Teils von Gergonne's Arbeit drückt er sich etwa dahin aus, er würde sich nicht entschliefsen können, die Sätze, welche Gergonne nach dem Dualitätsgesetz ableitet, anzunehmen. Diese eigentümlich geschraubte Schreibweise, welche Poncelet später mit der Rücksicht gegen eine führende Persönlichkeit unter den Mathematikern erklärte, hat sich Gergonne — der seinerseits von „insinuations obliques" spricht — in einer sehr boshaften Entgegnung zu Nutze gemacht.***) Mit der Erklärung, er wolle dem Angriff Poncelet's eine so grofse Verbreitung geben als möglich, druckt er den Artikel

---

*) Bull. de Férussac, Bd. 7, 1827, S. 274 u. 275.

**) Poncelet, Note sur divers articles du Bulletin des sciences de 1826 et de 1827, relatifs à la Théorie des polaires réciproques, à la dualité etc., Bull. de Férussac, Bd. 8, 1827, S. 109—117.

***) Gergonne, Réclamation de M. le capitaine Poncelet, (Extraite du Bulletin universel des annonces et nouvelles scientifiques); avec des notes, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 125—142.

nochmals ab und begleitet ihn mit höchst persönlich gehaltenen Noten. Zu einigen derselben hatte ihm Poncelet selbst die Handhabe dadurch geboten, daſs er in seine Reclamation viele Bemerkungen eingeflochten hatte, die mit der Hauptsache wenig zu thun haben. Ein Beispiel hierfür ist die Bemerkung über die einfachste Art, den Pascal'schen Satz aus Transversalensätzen zu beweisen.*) Von Wichtigkeit ist die Note, in der Gergonne sich gegen den Vorwurf eines Plagiats auflehnt, den er in Poncelet's Worten erblickt. Das Manuscript seines letzten Artikels sei, noch bevor Poncelet's Analyse in seine Hände gelangt sei, in die Druckerei gesandt worden. Ob die Auslassung einiger Stellen der Vorrede und der Nachschrift nicht im Interesse Poncelet's geschehen sei, darüber wolle er das Urteil den Lesern überlassen und werde sie daher nachträglich abdrucken**). Er behauptet ferner, seit dem Erscheinen seiner Arbeit über die Polarentheorie***) sei das Dualitätsprincip kein Geheimnis für ihn gewesen. Besonders scharf hebt er die eben erwähnte Aufgabe von Coriolis hervor. Ohne auch nur an die Art, wie der Satz zu beweisen sei, zu denken, habe er mit ihm zugleich die reciproke Form niedergeschrieben und im Bd. 9 abgedruckt. Aber auch sonst fehle es nicht an Beispielen, die seine Kenntnis des Dualitätsgesetzes auſser Zweifel stellen.†) Poncelet's Äuſserungen über die Anwendung des Dualitätsprincips auf algebraische Curven und Flächen sind ihm Beweise dafür, daſs letzterer auch jetzt noch nicht das Princip in seiner vollen Allgemeinheit erfaſst habe.

4. In seiner Erwiderung††) führt Poncelet zunächst die Schriften von Encontre und Brianchon an, in denen die Polareigenschaften zur Entwickelung neuer Wahrheiten benutzt sind. Dieselben beziehen sich vorzugsweise auf die Figuren aus einer endlichen Anzahl von Punkten und Geraden. Er selbst sei in seiner Schrift aus dem Jahre 1818†††) zuerst auf die gegenseitigen Beziehungen zweier polarreciproken Curven näher eingegangen. Nach allen diesen Ent-

---

*) Vgl. II, 11.

**) Préambule omis dans l'impression de l'analyse du mémoire de M. Poncelet, Post-scriptum supprimé etc., Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 142—145, S. 145—149.

***) Vgl. a. a. O. S. 49††.

†) Man könnte hierfür eine anscheinend von Olivier herrührende Aufgabe anführen, nach der einer Oberfläche zweiter Ordnung gewisse Pentagondodekaeder eingeschrieben, gewisse Ikosaeder umschrieben sind. Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 196.

††) Poncelet, Sur la dualité de situation et sur la théorie des polaires réciproques, 2e article en réponse aux observations de M. Gergonne, mentionnées p. 23, cahier du janvier du présent Bulletin des Sciences etc. Bull. de Férussac, Bd. 9, 1828, S. 292—320.

†††) Vgl. (auch bezüglich Encontre und Brianchon) V, 10.

wickelungen sei es für Gergonne leicht gewesen, zu der erwähnten Aufgabe von Coriolis die polare Form zu finden. Aber noch 1821 sei Gergonne offenbar nicht zur vollen Klarheit über die duale Beziehung, wenigstens im Raume, gekommen, denn er übertrage den Satz von Coriolis auf den Raum, ohne doch die duale Form hinzuzufügen.*) Der Rest des Artikels, der sich gegen Plücker richtet, hat mich bereits beschäftigt. Hinsichtlich der Sätze über algebraische Curven habe er sich nur aus Höflichkeit in seiner ersten Erwiderung in einer zweifelnden Form ausgesprochen, die aber gleichwohl für den kundigen Leser völlig verständlich gewesen sei. Er glaube auf unangreifbare Weise bewiesen zu haben, dafs zu einer Curve n^{ter} Ordnung eine solche von der Ordnung $n(n-1)$ polarreciprok sei. Deshalb seien nur diejenigen Entwickelungen dem Dualitätsprincip unterworfen, welche von der Ordnungszahl der Curve unabhängig sind. Diese eigentümliche Äufserung, deren genauere Ausführung bei der Besprechung der Hauptarbeit Poncelet's uns entgegentreten wird, erklärt sich vollständig, wenn man bedenkt, dafs eine Curve bislang nur als Ort eines beschreibenden Punktes aufgefafst war. Wenigstens die eine günstige Folge hatte der unerquickliche Streit, dafs neben die Ordnungszahl die Klassenzahl der Curve tritt. Immer unter der Voraussetzung, dafs wirkliche Ordnungs- und Klassenzahl von einander verschieden sind, soll — so äufsert sich Gergonne — in dem auf algebraische Curven bezüglichen Teil seiner Sätze die linke Hälfte auf Curven n^{ter} Ordnung, die rechte auf Curven n^{ter} Klasse bezogen werden.**) Mit einer uns jetzt nicht mehr recht verständlichen Sprödigkeit verhielten sich die damaligen Geometer gegen die Einführung des neuen Begriffes. Nicht nur, dafs Gergonne noch mehrmals Gelegenheit nimmt***), seine Bedenken auszusprechen, auch in dem oben [S. 160*] erwähnten akademischen Bericht wird hervorgehoben, es bedürfe eines ausdrücklichen Beweises, dafs eine Curve n^{ter} Ordnung mehr als n Tangenten aus einem Punkt erhalten könne.

Beide Autoren haben noch einmal zu dieser Angelegenheit das Wort genommen; Gergonne 1847 in einer an der Universität zu Lille gehaltenen Rede.†) Er versteigt sich in dieser Schrift zu der Behauptung, es habe ihm aufser Poncelet niemand die Priorität

*) Gergonne holt dies nach in der Arbeit: Double théorème de géométrie à trois dimensions, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 114—119.

**) Gergonne, Rectification de diverses propositions énoncées dans les Annales, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 120—123.

***) Man vergleiche z. B. die Besprechung einer Arbeit von Bobillier, Bull. de Férussac, Bd. 9, 1828, S. 303. Vergl. ferner: Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 108 u. 142. (Noten zu Arbeiten Bobillier's.)

†) Gergonne, Note sur le principe de dualité en géométrie, Mém. de l'Ac. d. sc. de Montpellier f. 1847. Diese Note ist mir nur in einem Sonderabdruck zugänglich geworden.

für das Dualitätsgesetz streitig gemacht. Dies hat Poncelet veranlafst, fast die gesamte auf diesen Streit bezügliche Litteratur im zweiten Bande seines Traité*) aufzuführen. In Nachahmung von Gergonne's erster Erwiderung bringt er seine Entgegnung in die Form von Noten zu Äufserungen Gergonne's. Auch sonst hat er wiederholt Gelegenheit genommen, auf diese Angelegenheit zurück zu kommen.

Über die ganze Discussion wird man meiner Meinung nach sich folgende Ansicht bilden müssen. Es ist kein Zweifel, dafs Gergonne die tiefere Auffassung des Dualitätsgesetzes besessen hat. Um mit Steiner**) zu reden „die Dualität tritt mit den Grundgebilden zugleich hervor, jene Theorie („des polaires réciproques") hingegen kommt erst später als Resultat bestimmter Verbindungen der Grundgebilde zum Vorschein". Aber Gergonne lernte das Gesetz in den ersten Elementen der Geometrie nur beobachten, zum Beweise mufsten die Polareigenschaften dienen. Aus diesem Grunde hätte er die Priorität Poncelet's freimütig anerkennen müssen. Wenn es auch an Beispielen nicht fehlt, in denen von Polareigenschaften zur Herleitung neuer Resultate Gebrauch gemacht wird, so ist doch Poncelet ohne Zweifel der erste, welcher die weitgehende Bedeutung dieser Transformation ausdrücklich hervorgehoben hat. Dafs Brianchon keinesfalls von der Allgemeingültigkeit des Dualitätsgesetzes sich überzeugt hatte, liefs sich bereits an einer anderen Stelle [III, 9] beobachten. Geht man auf das Menschliche des Streites ein, so wird man seine Sympathie dem heifsblütigen und streitsüchtigen Poncelet viel mehr als dem nicht immer mit loyalen Mitteln kämpfenden Gergonne zuwenden.

5. Noch während Gergonne und Poncelet ihren Streit ausfochten, hatte Möbius das Dualitätsgesetz für die Ebene in vollster Allgemeinheit erfafst. Indem er lehrte, eine reciproke Beziehung lediglich mit Hülfe von vier Paaren homologer Elemente aufzubauen, gewann er die Mittel, einem Satze der Ebene den dualen an die Seite zu stellen, ohne sich eines vermittelnden Gebildes zweiter Ordnung zu bedienen.***) Zu der geometrischen Lösung des Problems bietet er die Handhabe in dem Satze, dafs einförmige Gebilde, die in einer reciproken oder collinearen Beziehung einander entsprechen, unter Erhaltung des Doppelverhältnisses auf einander bezogen sind.†) Zur

---

*) Rapports académiques et articles divers de critique ou de polémique rétrospective, Traité, Bd. 2, Paris 1866, S. 351—396.

**) Steiner, Systematische Entwickelung etc., Berlin 1832, Vorrede, (Ges. W., Bd. 1, S. 234).

***) Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, § 288 (Ges. W., Bd. 1, S. 376 ff). Das Mittel hierzu bietet der Aufbau zweier Netze aus vier Punkten einerseits, aus vier Geraden andererseits und die Zuweisung entsprechender Elemente dieser Netze.

†) Ibidem, §§ 221 u. 290 ff. (Ges. W., Bd. 1, S. 270 ff. u. 378 ff.).

Herstellung einer reciproken Beziehung zwischen zwei Ebenen giebt er an anderer Stelle folgende Regel.*) Sind

$$\alpha\varphi A + \beta\chi B + \gamma\psi C$$

und

$$\frac{1-v}{\varphi}\alpha' A' - \frac{1}{\chi}\beta' B' + \frac{v}{\psi}\gamma' C'$$

die barycentrischen Ausdrücke zweier Punkte in Bezug auf beliebige Fundamental-Dreiecke ihrer Ebenen, und ist v unbeschränkt veränderlich, so entspricht jedem Punkte der einen Ebene eine Gerade der zweiten Ebene und umgekehrt. Die Unsymmetrie der Darstellung liefs den einfachen Kern derselben nicht ausreichend hervortreten. Dieser besteht in dem Satze, dafs jede bilineare Gleichung zwischen zwei Coordinatengruppen eine reciproke Beziehung der betreffenden Ebenen oder Räume hervorruft. Diese Regel, die für beliebig hohe Dimensionen bestehen bleibt, war natürlich keineswegs auf barycentrische Coordinaten beschränkt, in ihrer Anwendung auf cartesische Coordinaten bildet sie den Ausgangspunkt für Chasles' grofse Abhandlung, welcher der Aperçu historique seine Entstehung verdankt.**) Dieselbe Methode wählt Magnus***) bei seinen Untersuchungen über die reciproke Beziehung in der Ebene und im Raum. Um so naturgemäfser mufste diese Darstellung erscheinen, als man ja von jeher die Polareigenschaften aus der bilinearen Gleichung zwischen den Coordinaten des Pols und eines beliebigen Punktes seiner Polare abzuleiten pflegte. Aber freilich knüpfte man hierbei immer an die Symmetrie der Gleichung für beide Coordinatengruppen an und erkannte deshalb erst später, dafs die Linearität für jede der Coordinatengruppen hinreichend war, um die Beziehung als reciprok zu kennzeichnen.

6. Ich habe bereits [XVII, 9] der Controverse zwischen Plücker und Poncelet gedacht. Sein letztes, vom 24. Juli 1828 datirtes Schreiben schliefst Plücker mit der Versicherung, dafs eine rein algebraische Behandlung ihm das Geheimnis des Dualismus enthüllt habe.†) Die Rechtfertigung dieses Ausspruchs gab Plücker durch

---

*) Ibidem, § 286 (Ges. W., Bd. 1, S. 372ff.).

**) Chasles, Aperçu historique etc., Paris 1837, S. 573—848.

***) Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833, S. 60ff. Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, S. 120ff.

†) Réclamation, par Mr. Plucker etc., Bull. de Férussac, Bd. 10, 1828, S. 330—332 (Abh., Bd. 1, S. 595). Die betreffende Stelle lautet: La lecture du n° cité plus haut m'engage à rédiger de mes papiers un mémoire sur le sujet en discussion entre M. M. Gergonne et Poncelet. En y exposant une théorie bien différente de celles données jusqu'-ici, je ferai voir peut-être qu'une méthode purement analytique m'a fait découvrir de mon côté le secret de la dualité etc.

Einführung der Liniencoordinaten. Er benutzt als Coordinaten einer Geraden die in ihre Gleichung

$$ux + vy + w = 0$$

eingehenden Coefficienten, wobei in der Regel $w = 1$ gesetzt wird, mithin u und v die negativen reciproken Werte der Abschnitte sind, welche die Gerade auf den Coordinatenaxen abschneidet. Eine lineare Gleichung zwischen u, v, $w = 1$ stellt deshalb einen Punkt dar, eine Gleichung m^{ten} Grades eine Curve m^{ter} Klasse. Eine Kette algebraischer Gleichungen kann nun eine doppelte Interpretation mit Hülfe von Punktcoordinaten oder mit Hülfe von Geradencoordinaten erfahren, und aus dieser zweifachen Darstellbarkeit der Resultate fliefst zuletzt das Dualitätsgesetz, das Plücker dann ausdrücklich an Schnittpunkttheoremen erläutert.*) Er erörtert hierauf ausführlich und offenbar unabhängig von Möbius den zweiten Beweis des Dualitätsprincips, welcher sich bei Benutzung einer bilinearen Gleichung ergiebt.**) Die Aufgabe, aus den analytischen Entwickelungen den rein geometrischen Kern herauszuschälen, wurde von Steiner und Seydewitz gelöst und wird mich im dritten Teile dieses Berichtes beschäftigen.

XXI. Besondere reciproke Beziehungen.

1. Ich gehe jetzt auf den Inhalt der Poncelet'schen Schrift „théorie des polaires réciproques“ näher ein;***) und zwar wird hierbei auf den metrischen Teil der Schrift, der vor allem das Interesse der französischen Mathematiker wachrief, der Nachdruck zu legen sein. Die Arbeit beginnt mit allgemeinen Erörterungen über polarreciproke Gebilde. Wird ein Punkt über eine gegebene Curve geführt, so gleitet seine Polare nach einem Kegelschnitt, der Directrix, an einer zweiten Curve, und zwar ist ihr Berührungspunkt der Pol der Tangente des gegebenen Punktes. Ist die

*) Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. 2, Essen 1831 (Zweite Abteilung: Das Princip der Reciprocität, § 1, S. 242—251).

**) Ibidem, Zweite Abteilung, § 3, S. 259—284. Nach einer Stelle der Vorrede (S. VII) bediente er sich dieser Methode in einer Abhandlung, die wenige Tage nach Abfassung der obigen Äufserung an Gergonne eingesendet, aber nicht abgedruckt wurde. In der Abhandlung: Über ein neues Coordinatensystem, Crelle's Journ., Bd. 5, 1830, S. 1—36 (Abh., Bd. 1, S. 124—158) erwähnt Plücker denselben Gedankengang ganz kurz und spricht von einer allgemeineren Methode, nach der den Punkten der Ebene die Kegelschnitte zugeordnet werden, welche drei feste Punkte enthalten (Nr. 36ff.). In einer 1829 gehaltenen Rede hatte Plücker ebenfalls dieser Begründung des Dualitätsprincips gedacht. Schönflies hat die betreffende Stelle der bisher nicht veröffentlichten Rede abgedruckt (Abh., Bd. 1, S. 619).

***) Vgl. S. 161*. Die Hinweise des Textes beziehen sich auf die Nummern des Abdrucks im Traité, Bd. 2.

erste Curve von der Ordnung n, so ist die zweite im allgemeinen von der Ordnung $n\,(n-1)$. Eigentlich sollte zu ihr also eine Curve von der Ordnung $n\,(n-1)\,[n\,(n-1)-1]$ polarreciprok sein, während man doch offenbar auf die ursprüngliche Curve n^{ter} Ordnung zurückgeführt wird. Dies erklärt Poncelet durch das Auftreten von Doppelpunkten und Spitzen der Grundcurve. Ein Doppelpunkt der Grundcurve vermindert die Anzahl der eigentlichen Tangenten, die sie aus einem beliebigen Punkt erhält, und also auch die Ordnung der polarreciproken Curve um zwei Einheiten, eine Spitze um drei Einheiten; es wird hinzugefügt, daſs Doppelpunkten und Spitzen der einen Curve Doppel- und Wende-Tangenten der polarreciproken Curve entsprechen. Flüchtig, wie Poncelet's Entwickelungen sind, enthalten sie trotz mancher Unrichtigkeiten einen bedeutsamen Ansatz zur Lösung der von ihm aufgeworfenen Frage, deren vollständige Beantwortung, wie allbekannt, eines der schönsten Verdienste Plücker's ist. Nach kurzen Erörterungen über polarreciproke Raumgebilde schlieſst dieser erste Teil mit einer merkwürdigen Bemerkung ab. (101) „Eigenschaften einer Curve n^{ter} Ordnung können nur dann einer Umformung mit Hülfe der polarreciproken Beziehung unterworfen werden, wenn sie für Curven aller Grade gelten.“ In der That, aus der Curve n^{ter} Ordnung entsteht eine andere von der Ordnung $n\,(n-1)$, für welche die duale Eigenschaft gilt, aber man darf dieselbe nicht etwa auf die Gesamtheit aller Curven dieser letzten Ordnung übertragen. Man hatte eben noch nicht gelernt, die Gerade als erzeugendes Curvenelement dem Punkte gleich zu stellen, in der Curve n^{ter} Klasse das duale Gebilde zu der Curve n^{ter} Ordnung zu schaffen. Daſs man sich — zögernd genug — diese neue Anschauung aneignete, ist, wie schon erwähnt, als einzige gute Folge des unerquicklichen Streites zwischen Gergonne und Poncelet zu betrachten.

2. Bei Flächen und Curven zweiter Ordnung ist, fährt Poncelet fort, das polarreciproke Gebilde ebenfalls von der zweiten Ordnung, also ebenso allgemein als das gegebene. Man kann deshalb in diesem speciellen Fall niemals zu falschen Ergebnissen gelangen. Da z. B. die Schnittcurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung auf vier Kegeln zweiten Grades enthalten ist, so hat die zwei Oberflächen zweiter Ordnung umschriebene abwickelbare Fläche vier Kegelschnitte zu Strictionslinien und wird von unendlich vielen anderen Oberflächen zweiter Ordnung, von einer jeden in einer Raumcurve vierter Ordnung vom Geschlecht 1, berührt (103). Das Hauptbeispiel einer solchen Anordnung bietet, wie zuerst bei Chasles hervortritt,*) die Schar der confocalen Flächen, bei denen diese Strictionslinien

*) Chasles, Aperçu historique etc., Note 31: Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques (S. 384—399).

in die drei Grenzkegelschnitte und den unendlich fernen Kugelkreis übergehen.

Die Polarebene einer Oberfläche zweiter Ordnung wird von den Polaren der Flächenschnitte ausgefüllt, deren Ebenen den Pol enthalten; aus seinem Satz über die Paare reciproker Punkte [XVII, 3] beim Kegelschnittbüschel kann also Poncelet unmittelbar folgern, dafs die Polarebene eines festen Punktes hinsichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung sich um eine Gerade, bez. einen Punkt dreht, wenn die Fläche einen Büschel, bez. einen Bündel beschreibt. Zu den Oberflächen zweiter Ordnung, welche derselben abwickelbaren Fläche eingeschrieben sind oder dieselben acht Ebenen berühren, gehört folglich als Ort der Pole einer festen Ebene eine Gerade, bez. eine zweite Ebene. Der Ort der Mittelpunkte ist mithin ebenfalls eine Ebene bez. eine Gerade (104, 105).

3. Im § 4 kommt nun Poncelet auf die Entwickelungen, welche bereits infolge des oben citirten Auszugs*) das Interesse der anderen Geometer hervorgerufen hatten. Bei einem Kreise liegt der Pol einer Geraden auf dem Lot, das dieselbe aus dem Mittelpunkt des Kreises empfängt. Zwei beliebige Gerade der einen von zwei polarreciproken Figuren schneiden sich also unter demselben Winkel, unter dem die entsprechenden Punkte der anderen vom Mittelpunkt des Kreises aus erblickt werden. Das entsprechende Gesetz gilt im Raum. Wird z. B. ein Winkel von constanter Gröfse so bewegt, dafs seine Schenkel durch zwei feste Punkte hindurchgehen, so schreiten die Pole derselben hinsichtlich eines Kreises auf zwei Geraden fort und bestimmen am Mittelpunkt des Kreises einen dem ursprünglichen gleichen Winkel. Anders ausgedrückt: „Durchläuft ein Punkt einen Kreis, so umhüllt seine Polare nach einem zweiten Kreise einen Kegelschnitt, dessen einer Brennpunkt mit dem Mittelpunkt des letzteren Kreises zusammenfällt“ (115). Dieser, wie beiläufig bemerkt wurde [V, 10], bereits bei l'Hospital vorkommende Satz erweist sich nun unter Poncelet's Händen als ungemein fruchtbar, um teils bekannte, teils neue metrische Eigenschaften der Kegelschnitte zu entwickeln. Das entsprechende räumliche Theorem führt auf überraschend einfache Weise zu Eigenschaften der Rotationsflächen zweiter Ordnung. Da z. B. nach Monge's Kugelsatz je drei auf einander senkrechte Tangentialebenen einer Oberfläche zweiter Ordnung sich in Punkten einer bestimmten Kugel schneiden, so ist die Verbindungsebene je dreier Punkte einer Oberfläche zweiter Ordnung, die an einem festen Punkte S ein orthogonales Trieder bestimmen, die Tangentialebene einer Rotationsfläche zweiter Ordnung, welche S zum Brennpunkt hat. Der andere Brennpunkt fällt, wie Poncelet hätte anmerken können, wenn die gegebene Oberfläche

*) Vgl. S. 161**.

eine Kugel ist, mit dem Mittelpunkt derselben zusammen; in diesem Fall beschreibt also auch der Kreuzungspunkt der Tangentialebenen in drei zusammengehörigen Punkten eine Kugel. In der Ebene entspricht dem der von Poncelet entwickelte Satz: „Die einem Kreise umschriebenen einfachen Vierecke, deren Paare gegenüberliegender Berührungspunkte durch die Schenkel eines um seinen Scheitel gedrehten rechten Winkels ausgeschnitten werden, sind einem zweiten Kreise eingeschrieben.“*)

Hieran knüpft sich noch eine Folgerung, die Poncelet offenbar sehr am Herzen lag. Es liege eine projectivische Beziehung unter einer beliebigen Anzahl von Strecken AB, AC, ..., BC, ... zunächst einer Ebene vor. Ist S ein beliebiger Punkt der Ebene, so besteht dieselbe Beziehung unter den Gröfsen $\sin ASB$, $\sin ASC$, ..., $\sin BSC$, ...; man hat also mit Rücksicht auf das Winkelgesetz folgende Regel: „Eine projectivische Beziehung unter den Verbindungsstrecken einer Anzahl von Punkten überträgt sich auf die sinus der Winkel, welche die zu ihnen polarreciproken Geraden mit einander einschliefsen“ (123). Mit Anwendungen dieses Übertragungsprincipes und seines räumlichen Analogons (137) schliefst Poncelet seine Arbeit ab. Ausdrücklich wird (124) hervorgehoben, dafs sich das Übertragungsprincip für metrische Relationen in der Ebene auf die polare Umformung an einem beliebigen Kegelschnitt ausdehnen läfst.

4. Die Anregungen, welche Poncelet in dem Auszuge seiner Abhandlung gegeben hatte, wurden zunächst von Bobillier mit Eifer aufgegriffen.**) Seine Regel zur Umformung metrischer Relationen mit Hülfe des Polarsystems eines Kreises bez. einer Kugel hatte Poncelet im Auszuge seiner Abhandlung nur an einem einzigen Beispiel erläutert, an einer trigonometrischen Beziehung für die sechs Tangenten, welche von den Ecken eines Dreiecks aus sich an einen Kegelschnitt legen lassen. Bobillier leitet sie aus folgender allgemeinen Regel ab. Eine projectivische Beziehung unter den Entfernungen der Punkte A, B, C, D, ... einer Ebene besteht auch für die Punkte A', B', C', D', ..., welche ihre Polaren nach einem Kreise mit einer beliebigen Geraden gemein haben [S. 187]. Diese Regel bildet für Poncelet's endgültige Entwickelung einen Durchgangspunkt***). Hierauf wendet sich Bobillier zu dem Beweise des L'Hospital-Poncelet'schen Satzes. Zu zwei Punkten des gegebenen Kreises, die mit dem Centrum des Directrix-Kreises auf einer Geraden liegen, gehören zwei parallele Tangenten des polarreciproken Kegelschnittes, deren Abstände von dem Mittelpunkte des letzteren Kreises ein con-

*) Traité, Bd. 1, Nr. 487 u. a. a. O. S. 142***.

**) Bobillier, Démonstration de divers théorèmes de géométrie, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 185–202.

***) Traité, Bd. 2, Nr. 122.

stantes Product ergeben. Auf der durch die Mittelpunkte der beiden Kreise festgelegten Axe des Kegelschnittes genügen aber nur die beiden Brennpunkte, deren Fuſspunktcurven mit dem Scheitelkreis zusammenfallen, dieser Forderung; der eine derselben ist also mit dem Mittelpunkt des Directrixkreises identisch. Offenbar ist die eigentliche Quelle dieses Beweises, die nur nicht ganz klar hervortritt, der Quetelet'sche Satz, nach dem die Fuſspunktcurve einer Curve invers zu derjenigen Curve ist, die ihr bezüglich eines Kreises um den Pol polar gegenübersteht.*) Für einen Brennpunkt des Kegelschnittes ist die Fuſspunktcurve ein Kreis, und folglich steht ihm hinsichtlich eines beliebigen Kreises um den Brennpunkt ein anderer Kreis polar gegenüber. Eine eigenartige Umformung dieses Beweisverfahrens hat Dandelin**) angegeben: Die beiden Kreise c' und f' seien die stereographischen Bilder der Kreise c und f auf einer Kugel, welche die Ebene von f' in seinem Mittelpunkt F berührt. Schneidet man den längs c umschriebenen Kegel mit der Tangentialebene im Projectionscentrum S, projicirt den so erhaltenen Kegelschnitt auf die Ebene von f von ihrem Pol aus und diesen Kegelschnitt von S aus auf die Ebene von f', so erhält man den zu c' hinsichtlich f' polarreciproken Kegelschnitt. Nach Dandelin's Brennpunktsatz [VII, 4] hat der erste Kegelschnitt S und folglich der gesuchte Kegelschnitt F zum einen Brennpunkt.

5. Bobillier giebt in der Arbeit, zu der ich nunmehr zurückkehre, einen zweiten naturgemäſsen Beweis für den Satz. Der umzuformende Kreis S wird in den Endpunkten jedes Durchmessers von zwei zu diesem senkrechten Tangenten berührt. Jede Sehne des zu ihm polarreciproken Kegelschnittes Σ, welche den Mittelpunkt F des Directrix-Kreises enthält, steht folglich senkrecht zu der Geraden, welche F mit dem Kreuzungspunkt der Tangenten in ihren Endpunkten verbindet; das ist aber die grundlegende Eigenschaft, welche F als einen Brennpunkt von Σ kennzeichnet; die zugehörige Directrix ist die Polare des Mittelpunktes des gegebenen Kreises. Unter den Anwendungen, die Bobillier von dem Satze giebt, steht das Theorem obenan, aus dem Poncelet, wie wir sahen, 1829 den Beweis des Hauptsatzes ableitete. Es werde noch der folgende Satz erwähnt: Erscheint bei einem Dreieck aus zwei beweglichen und einer festen Tangente eines Kegelschnitts die letztere Seite vom Brennpunkt aus stets unter demselben Winkel, so beschreibt die gegenüberliegende Ecke einen Kegelschnitt, welcher den Brennpunkt und dessen Directrix mit dem Kegelschnitt gemein hat. Unter den Anwendungen des räumlichen Hauptprincipes verdient besonders die oben [IX, 7] erwähnte besondere Erzeugung des Hyperboloids

*) Vgl. XIV, 5.

**) Dandelin, Sur quelques applications de la théorie des polaires, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 277—281.

Erwähnung, für die Andeutungen Poncelet's vorlagen.*) Weitere Folgerungen zieht Bobillier aus diesem Übertragungsprincip in einer zweiten Arbeit.**) Der Monge'schen Kugel tritt, wie auf rechnendem Wege gezeigt wird, eine Oberfläche zweiter Ordnung an die Seite, von deren Punkten Tripel auf einander senkrechter Tangenten einer Oberfläche zweiter Ordnung ausstrahlen.***) Durch Polarisirung an einer Kugel entsteht mithin der Satz: „Die Ebene eines aus drei Tangenten einer Oberfläche zweiter Ordnung gebildeten Dreiecks, welches von einem festen Punkte aus durch ein Tripel auf einander senkrechter Ebenen projicirt wird, berührt eine bestimmte Oberfläche zweiter Ordnung." Eine analoge Umformung hatte Poncelet mit Monge's Kugelsatz vorgenommen.

6. Die Beschäftigung mit der Aufgabe des Apollonius im Raume hatte beiläufig zu dem Ergebnis geführt, dafs ein Schnitt einer Rotationsfläche zweiter Ordnung von jedem ihrer Brennpunkte aus durch einen Rotationskegel projicirt wird. Der Satz ist, wie Bobillier in seiner ersten Arbeit gezeigt hatte (S. 199), eine unmittelbare Folge des räumlichen Hauptsatzes Poncelet's, würde sich aber offenbar auch augenblicklich aus der Homologie-Beziehung zwischen der Rotationsfläche und einer um ihren Brennpunkt beschriebenen Kugel ergeben. Mit diesem Theorem lassen sich mehrere Sätze in Verbindung bringen, die Bobillier in kleineren Aufsätzen, meist rechnend, entwickelt hat. Ein System paralleler Schnitte einer Rotationsfläche geht z. B. in eine Kreisreihe über, wenn man parallel zu der Verbindungslinie eines Brennpunktes mit einem Endpunkte des zugehörigen conjugirten Durchmessers auf eine zu dieser Geraden senkrechte Ebene projicirt. Der eine unendlich kleine Kegelschnitt der Schar wird von dem Brennpunkt aus durch einen unendlich dünnen, zur Hülfsebene senkrechten Rotationscylinder projicirt; seine Projection ist ein unendlich kleiner Kreis; die anderen Kegelschnitte werden in ähnliche Curven, also in Kreise projicirt.†) Die Kegelschnitte, welche eine Tangentialebene einer Rotationsfläche

*) Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 270; für die genauere Ausführung vergleiche man: Traité, Bd. 2, Nr. 117.

**) Bobillier, Recherche de quelques lieux géométriques, dans l'espace, Gerg. Ann. Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 230—248.

***) Die Gleichung dieser Oberfläche für das Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ist $x^2(b^2+c^2)+y^2(c^2+a^2)+z^2(a^2+b^2)=b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2$ (S. 232). Eine bemerkenswerte Erweiterung des Monge'schen Kugelsatzes giebt Bobillier in der Arbeit: Démonstration de deux théorèmes sur les lignes et surfaces du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 317—333: „Gleiten die Ebenen einer rechtwinkligen körperlichen Ecke an drei confocalen Oberflächen zweiter Ordnung, so bewegt sich ihre Spitze auf einer concentrischen Kugel." Auch dieses Theorem und seine planimetrische Form werden der polaren Umbildung unterzogen.

†) Bobillier, Sur les propriétés des foyers dans les surfaces du second ordre, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 281—285.

aus den ihr umschriebenen Flächen zweiter Ordnung herausschneidet, gehen bei orthogonaler Projection längs des zugehörigen Brennstrahls in Kegelschnitte mit einem gemeinschaftlichen Brennpunkt über.*) Eine parallele Ebene würde zwei sich doppelt berührende Kegelschnitte aus den beiden Oberflächen herausschneiden, von denen sich einer bei der oben benutzten Projection in einen Kreis, der andere in einen doppelt berührenden Kegelschnitt projiciren würde. Für eine Tangentialebene der bevorzugten Fläche reducirt sich dieser Kreis auf einen Punkt, geht also in einen Brennpunkt der anderen Projection über. Aus denselben Principien entstammt, wie Bobillier ausdrücklich — jedoch ohne nähere Begründung — anführt, der Satz: „Berühren zwei Oberflächen zweiter Ordnung einander längs eines Kegelschnitts, so ist ein Nabelpunkt der einen ein Brennpunkt des Kegelschnittes, den seine Tangentialebene aus der anderen herausschneidet, die zugehörige Directrix wird von der Ebene des Berührungskegelschnittes ausgeschnitten" (S. 153).

Eine andere Arbeit**) Bobillier's bietet die interessante Bemerkung, daſs die gleichseitige Hyperbel ähnliche Vorteile zur reciproken Umformung metrischer Beziehungen bietet, wie der Kreis. In der That, auch bei der gleichseitigen Hyperbel beschreiben zwei conjugirte Durchmesser congruente, aber nunmehr entgegengesetzt gerichtete Strahlenbüschel. Zwei Gerade einer Figur schneiden sich also auch bei ihr unter demselben Winkel, unter dem vom Mittelpunkt aus die entsprechenden Punkte der polarreciproken Figur erblickt werden. Der zu einem Kreise hinsichtlich einer gleichseitigen Hyperbel polarreciproke Kegelschnitt hat also ihren Mittelpunkt zum Brennpunkt. Die Directrix ist die Polare des Kreis-Mittelpunktes. Insbesondere ist mithin der Scheitelkreis einer gleichseitigen Hyperbel zu sich selbst hinsichtlich derselben reciprok und umgekehrt (S. 350). Aus dieser merkwürdigen Eigenschaft wird eine Reihe von Eigenschaften der gleichseitigen Hyperbel abgeleitet; auf analytischem Wege wird (S. 350) dargethan, daſs von zwei conjugirten Kegelschnitten jeder hinsichtlich des anderen zu sich selbst polarreciprok ist.

7. Als Chasles nach langjähriger Pause seine schriftstellerische Thätigkeit wieder begann, war sein Interesse beinahe vollständig von der reciproken Verwandtschaft in Anspruch genommen. Eine erste Abhandlung***) beschäftigt sich mit der Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte, welche zwei feste Tangenten berühren. Stellt

*) Bobillier, Sur les propriétés projectives dans les surfaces du second ordre, Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 152—155.

**) Bobillier, Mémoire sur l'hyperbole équilatère, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 349—359.

***) Chasles, Mémoire sur les propriétés des systèmes de sections coniques, situées dans un même plan, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 277—301.

man sie aus „homothetischen", ähnlichen und ähnlich gelegenen Kegelschnitten durch polarreciproke Umformung dar, so kann man leicht auf metrischem Wege gewonnene Eigenschaften des zweiten Systems auf das erste System übertragen. Eine Fortsetzung erfährt diese Entwickelung in Chasles' Arbeiten über die verallgemeinerte stereographische Projection [XII, 4]. Das Schlufsresultat dieser Entwickelung war der Satz gewesen*): „Die stereographischen Bilder aller Schnitte einer Oberfläche zweiter Ordnung, sowie die stereographischen Umrisse aller ihr eingeschriebenen Oberflächen zweiter Ordnung sind unter sich ähnliche und ähnlich gelegene Kegelschnitte" (S. 158). Mit Hülfe einer reciproken Umformung gewinnt man hieraus den zweiten Satz: „Sind beliebig viele Oberflächen zweiter Ordnung einer anderen umschrieben, so ist für die Kegelschnitte, welche sie auf einer Tangentialebene der letzteren ausschneiden, der Berührungspunkt ein gemeinschaftliches Homologie-Centrum" (S. 164). Berührt die Tangentialebene in einem der Nabelpunkte, so schneiden die Tangentialkegel, deren Berührungsebenen zu ihr parallel sind, um den Nabelpunkt beschriebene Kreise aus; derselbe ist mithin ein gemeinschaftlicher Brennpunkt aller Kegelschnitte des Systems (S. 167). Ein Specialfall dieses Bobillier'schen Satzes ist der Dandelin'sche: „Die Punkte, in welchen eine Ebene zwei eingeschriebene Kugeln einer Rotationsfläche zweiter Ordnung berührt, sind Brennpunkte des Kegelschnitts, den sie mit der Fläche gemein hat" (S. 168).

In einer anderen Arbeit**) äufserte sich der Einflufs der Anschauungen, die Poncelet im 17. Bande der Gergonne'schen Annalen dargelegt hatte. Dafs zu einem Kegelschnitte hinsichtlich eines Kreises ein zweiter Kreis polarreciprok ist, wenn er den Mittelpunkt des ersteren zum Brennpunkt hat, entwickelt Chasles ähnlich, wie Bobillier, aus dem de la Hire'schen Theorem. Einiges Interesse beansprucht von den Anwendungen dieses Princips eine Construction des Kegelschnitts aus drei Tangenten und einem Brennpunkt, welche an die allbekannte Bestimmung des Kreises aus drei Punkten anknüpft. Eine wesentliche Ergänzung der Poncelet'schen Sätze erblickt Chasles in einer Regel zur Bestimmung des Mittelpunktes einer Fläche zweiter Ordnung Σ, die zu einer gegebenen S hinsichtlich einer dritten K polarreciprok ist. Dieselbe entspringt aus der allgemeineren Anschauung, dafs hinsichtlich Σ polarreciproke Gebilde — unter anderen die unendlich ferne Ebene und ihr Mittelpunkt —

---

*) Chasles, Recherches sur les projections stéréographiques, et sur diverses propriétés générales des surfaces du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 157—175.

**) Chasles, Théorèmes sur les sections coniques confocales, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 269—276.

aus nach S polarreciproken Gebilden entstehen. An Fruchtbarkeit stehe, fügt Chasles hinzu, diesem Satz der zweite vom Auftreten der Ebeneninvolution bei der Flächenschar gleich.*)

8. Noch drei andere ausgedehnte Arbeiten Chasles' sind hier anzuführen; und zwar will ich etwas mehr ins Detail gehen, weil dieselben unverdienter Weise ziemlich in Vergessenheit geraten sind. In der ersten Arbeit**) operirt er vorzugsweise mit dem L'Hospital'schen Satze, der auf das de la Hire'sche Theorem zurückgeführt wird.***) Das Theorem dient dazu, beim Kegel zweiten Grades zwei Focalstrahlen nachzuweisen, Gerade, welche circulare Ebeneninvolutionen zum Polarsystem des Kegels beitragen, oder, wie es Chasles faſst, von denen jede der Ort des einen Brennpunktes der Schnitte des Kegels ist, deren Ebenen zu ihr senkrecht stehen. Für den Kegel, welcher einem Kreise hinsichtlich einer Kugel polar gegenübersteht, ist der eine Focalstrahl polarreciprok zu der unendlich fernen Geraden der Ebene des Kreises. Da sämtliche unter einander ähnliche Kegel den Schnitten eines Kegels polar gegenüberstehen, der letztere genau zwei Reihen von Kreisen besitzt, so kommen einem jeden Kegel genau zwei Focalstrahlen zu. Es ist nun interessant zu beobachten, auf welchen Umwegen Chasles aus seiner Definition heraus die Eigenschaften herleitet, welche die Focalstrahlen als zu den Brennpunkten des Kegelschnittes analoge Gebilde kennzeichnen. Hierbei spielt eine Hauptrolle der Satz: „Ist die Verbindungslinie der Spitzen zweier Kegel, welche denselben Kegelschnitt projiciren, für einen von beiden ein Focalstrahl, so ist er es auch für den zweiten Kegel", der auf ähnliche Weise wie der erste Satz gefunden wird. In dem Nachweise, daſs zu einer Kugel (S) mit dem Mittelpunkt S hinsichtlich einer zweiten (F) mit dem Mittelpunkt F eine Rotationsfläche Σ polarreciprok ist, die F zum Brennpunkt, die Polarebene von S zur zugehörigen Directrixebene besitzt, folgt Chasles den von Bobillier gegebenen Andeutungen. Einem Kreise der gegebenen Kugel und den ihn projicirenden geraden Kegeln gehören hierbei ein umschriebener Kegel der Rotationsfläche und besondere Schnitte desselben zu, deren Ebenen die Schnittlinie von Directrix- und Berührungs-Ebene enthalten. Die Berührungsebenen eines der geraden Kegel sind gegen die Kreisebene gleich geneigt; unter demselben Winkel sind

*) Die Ebeneninvolution wird freilich noch, ebenso wie die Strahleninvolution, als ein Gebilde definirt, aus dem eine beliebige Gerade eine Punktinvolution ausschneidet.

**) Chasles, Recherche de géométrie pure sur les lignes et les surfaces du second degré etc., Nouv. Mém. de l'ac. de Bruxelles, Bd. 5, 1829, S. 1—83. (Selbständige Paginirung.) Vergl. auch den Auszug: Chasles, Analyse d'un mémoire etc., Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 85—93.

***) Die von Chasles hinzugefügten Hinweise beziehen sich nur auf angeführte Arbeiten von Chasles, Bobillier und Dandelin.

die Geraden des Kegels, welcher den entsprechenden Kegelschnitt vom Brennpunkt F aus projicirt, gegen den Strahl geneigt, welcher den Pol der Kreisebene nach der zweiten Kugel mit dem Brennpunkt verbindet. Man hat es also mit Rotationskegeln mit gemeinsamer Axe zu thun, welche offenbar auch die Spitze des umschriebenen Kegels enthält. Nach dem obigen Hülfssatz projiciren also die Focalstrahlen jedes Tangentialkegels einer Rotationsfläche zweiter Ordnung die Brennpunkte derselben. Chasles zieht es indessen vor, diesen Satz direct aus seiner Definition abzuleiten. Den Kreisen eines Rotationscylinders entsprechen offenbar Kegel, die einen und denselben Kegelschnitt projiciren. Die Ebene desselben ist senkrecht zu den Mantellinien des Cylinders und enthält F. Der Kegelschnitt steht dem in seiner Ebene liegenden Kreise des Cylinders hinsichtlich des zweiten Kreises, den sie mit (F) gemein hat, polar gegenüber; deshalb ist F ein Brennpunkt des Kegelschnitts. Das in F errichtete Lot enthält aber die Spitzen der Kegel und ist mithin ein gemeinsamer Focalstrahl derselben. Enthält der Cylinder einen Kreis der Kugel (S), so gelangt man zu der obigen Bestimmung der Focalstrahlen des entsprechenden Tangentialkegels von Σ. Ist ein Kegelschnitt der Durchschnitt zweier umschriebenen Kegel von Σ, so bestimmen, immer nach dem angeführten Hülfssatz, die Spitzen derselben die Focalstrahlen des Kegels, welcher ihn von einem Brennpunkt aus projicirt (S. 35). Als ein Specialfall ergiebt sich die Erweiterung eines Satzes von Dandelin: Alle einer Rotationsfläche zweiter Ordnung umschriebenen Kegel treffen die Tangentialebene eines Scheitelpunktes in Kegelschnitten mit einem gemeinsamen Brennpunkt. Auch einen oben [XXI, 6] erwähnten Satz von Bobillier kann Chasles in seinen Aufbau einordnen. Beim Cylinder zweiten Grades erfüllen die Brennpunkte der senkrecht zu den Mantellinien geführten Schnitte die Focalstrahlen. Da dieselben bei einem umschriebenen Cylinder von Σ die Brennpunkte der Fläche enthalten, so ergiebt sich: „Eine Tangentialebene einer Rotationsfläche zweiter Ordnung ist gegen die Ebenen gleich geneigt, welche die Brennpunkte an einer in ihr liegenden Tangente bestimmen.“ Zieht man die in einem Punkt zusammenlaufenden Tangenten von Σ in Betracht, so folgt: „Eine Tangentialebene eines Kegels zweiten Grades ist gleich geneigt gegen die Ebenen, welche die Berührungslinie mit den Focalstrahlen verbinden“; offenbar kann ja dem Kegel eine Rotationsfläche zweiter Ordnung eingeschrieben werden. Nach der Methode von Roberval folgt hieraus der von Magnus*) ungefähr gleichzeitig entdeckte Satz, daſs die Summe oder die Differenz der Neigungswinkel der Mantellinie eines Kegels gegen seine beiden Focalstrahlen constant ist.

*) Magnus, Théorèmes sur l'hyperboloïde à une nappe et sur la surface conique du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 33—39.

9. Zwei Rotationsflächen Σ' mit einem gemeinsamen Brennpunkt sind hinsichtlich einer um denselben beschriebenen Kugel zu zwei Kugeln polarreciprok; sie schneiden sich daher nicht nur in zwei Kegelschnitten, sondern besitzen auch zwei beiden zugleich umschriebene Kegel; einer von ihnen hat seine Spitze im Brennpunkt. Indem eine der beiden Flächen in eine Kugel übergeht, lenkt Chasles in die frühere Untersuchungsmethode Poncelet's ein, der hier mehrfach citirt wird, bei der die Rotationsflächen zweiter Ordnung mittels einer Homologiebeziehung gegen eine Kugel eingeführt werden. Die Aufgabe, eine Rotationsfläche zweiter Ordnung zu construiren, von der vier Tangentialebenen und ein Brennpunkt vorliegen, führt zu der ersten in der Litteratur vorkommenden Erwähnung einer bekannten Oberfläche dritter Ordnung. Wird der eine Brennpunkt einer Rotationsfläche zweiter Ordnung mit vier festen Tangentialebenen über eine Ebene geführt, so beschreibt der zweite die Fläche dritter Ordnung. Chasles bemerkt, dass sie die sechs Schnittlinien der vier Ebenen enthält.

Zu den einem Kegel eingeschriebenen Kugeln sind hinsichtlich der Kugel (F) Rotationsflächen zweiter Ordnung reciprok, deren einer Brennpunkt mit F zusammenfällt, und die einen festen Kegelschnitt K enthalten. Die Mittelpunkte dieser Flächen entstehen aus den Polarebenen eines festen Punktes nach den gegebenen Kugeln und erfüllen deshalb einen Kegelschnitt. Ihm ähnlich ist der Ort, den der zweite Brennpunkt, die Spitze eines den gemeinschaftlichen Kegelschnitt projicirenden geraden Kegels, beschreibt. Auf diesem Umwege gelangt Chasles zu dem Satze von den Focalen [VII, 1—4]. Von bedeutendem Interesse ist die ohne Beweis eingeschaltete Bemerkung (S. 68): „Zwei Kegelschnitte, von denen jeder die Focale des anderen ist, bestimmen an einem beliebigen Raumpunkt Kegel, die sich rechtwinklig durchschneiden, wo sie sich begegnen."

Der Rest der Abhandlung bietet eine höchst elegante Construction für die Tangenten der Krümmungslinien in einem Punkt P einer Oberfläche F_2 zweiter Ordnung. Die beiden P enthaltenden Kreise von F_2 gehören zwei Kegeln mit den Spitzen S_1 und S_2 an. PS_1 und PS_2 sind nicht nur für F_2, sondern auch für die durch beide Kreise bestimmte Kugel conjugirt und fallen, da sie aus letzteren Grunde auf einander senkrecht stehen, mit den gesuchten Tangenten zusammen; da S_1 und S_2 die Ebenen, PS_1 und PS_2 mithin die Tangenten der beiden Kreise in P harmonisch trennen, so halbiren die Tangenten der Krümmungslinien die Winkel zwischen den beiden Kreistangenten genau so wie die Winkel zwischen den P enthaltenden Geraden der Fläche.

10. In der zweiten Arbeit*) geht Chasles von der Thatsache aus, daſs bei zwei Kegeln zweiten Grades, welche in dem Polarsystem einer

*) Chasles, Mémoire de géométrie pure sur les propriétés générales des cônes du second degré, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 6, 1830, S. 1—58.

unendlich kleinen Kugel einander entsprechen, den cyklischen Ebenen des einen, welche unendlich viele Paare senkrechter conjugirter Strahlen enthalten, die Focalstrahlen des anderen, welche unendlich viele Paare senkrechter conjugirter Ebenen aussenden, zugehören. In wie einfacher Weise Chasles aus diesem Zusammenhang neue Eigenschaften abzuleiten vermag, werde an dem Beispiel des Magnus'-sehen Satzes (S. 21) erläutert. Mit zwei Kreisen verschiedener Systeme schliefst, da sie auf einer Kugel liegen, jede Mantellinie eines Kegels zweiten Grades gleiche Winkel ein, und es sind die Einschnitte zweier Tangentialebenen in die beiden cyklischen Ebenen gleich geneigt gegen das auf der Verbindungsebene der Berührungsstrahlen errichtete Lot, sie gehören einem Rotationskegel mit dieser Axe an. Bei der Übertragung ergiebt sich der Satz: Die Verbindungsebenen zweier Mantellinien mit den Focalstrahlen berühren einen Rotationskegel, dessen Axe auf beiden Mantellinien zugleich senkrecht steht. Bei der vierseitigen körperlichen Ecke, in der die Focalstrahlen einerseits, die Mantellinien andererseits einander gegenüberliegen, ist also die Summe zweier gegenüberliegender Seitenwinkel so grofs wie die der anderen; die Differenz der Neigungswinkel einer Mantellinie gegen die beiden Focalstrahlen ist mithin unveränderlich.

Eine andere Anwendung ist die Einführung des Hachette'schen und des zu ihm dualen Kegels. Ein rechter Ebenenwinkel, der zwei von einem Punkt ausgehende Gerade projicirt, schneidet eine Ebene, welche zu einer der beiden Geraden senkrecht steht, in einem rechten Winkel, der die Spuren der beiden Geraden projicirt, die Kante des Ebenenwinkels beschreibt also einen Kegel, welcher die beiden Geraden enthält und mit den zu ihnen senkrechten Ebenen Kreise gemein hat. Verschieben sich also die Schenkel eines rechten Winkels in zwei Ebenen, während sein Scheitel fest bleibt, so umhüllt seine Ebene einen Kegel zweiten Grades, dessen Focalstrahlen zu den gegebenen Ebenen senkrecht stehen. Der wohlbekannte Satz vom Peripheriewinkel beim Kreise gestattet die bemerkenswerte Umformung: „Erscheint die eine bewegliche Seitenfläche eines Dreikants von einer Geraden aus stets unter demselben Ebenenwinkel, so umhüllt sie einen Kegel zweiten Grades, der die feste Scheitelgerade zum

---

(Selbständige Paginirung.) Vergl. auch den Auszug dieser Abhandlung: Chasles, Extrait d'un mémoire de géométrie sur les propriétés générales des cônes du second degré, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 289—295. Die Analogie zwischen Focalstrahlen des Kegels und Brennpunkten des Kegelschnitts tritt noch in den Sätzen hervor: Die senkrechten Projectionen der Focalstrahlen auf die Tangentialebenen des Kegels erfüllen einen zweiten, ihn doppelt berührenden Kegel, zwei Tangentialebenen sind gleich geneigt gegen die Verbindungsebenen ihrer Schnittlinie mit den Focalstrahlen, etc. Merkwürdiger Weise zieht Chasles nicht aus diesem Theorem die Folgerung, dafs confocale Kegel sich senkrecht durchschneiden, sondern leitet dies Theorem, das bereits in der ersten Arbeit vorkam, ziemlich umständlich ab.

Focalstrahl hat." Von hier aus gelangt Chasles (§ VI) ganz ähnlich, wie dies Poncelet bei den Kegelschnitten durchgeführt hatte, zu einer der Newton'schen entsprechenden organischen Erzeugung des Kegels. Dieselbe entspringt aus dem Satz: Ist nur eine Seitenebene eines einem Kegel zweiten Grades umschriebenen Dreiflachs veränderlich, so schneiden sich die Ebenen, welche die anliegenden Kanten mit den Focalstrahlen verbinden, in dem Strahle eines Kegels zweiten Grades. Die duale Urform dieses Hülfssatzes findet ihre Begründung, wenn man einen Kreisschnitt des betreffenden Kegels betrachtet, in der von Lambert herrührenden Erzeugung der Parabel mittels eines in der Ebene bewegten Winkels (S. 39). Den Abschlufs der Arbeit bietet, ähnlich wie bei Magnus, der Übergang zum einschaligen Hyperboloid vermittelst des Asymptotenkegels.

In einer dritten Arbeit*) wendet Chasles diese Resultate auf den sphärischen Kegelschnitt an, den ein Kegel zweiten Grades mit einer um seine Spitze beschriebenen Kugel gemein hat. Die cyklischen Ebenen und Focalstrahlen des Kegels schneiden die cyklischen Kreise und Brennpunkte des sphärischen Kegelschnittes aus, es ergeben sich sofort die Entfernungseigenschaften**), und es entstehen mehrere zum Teil einander gegenüberstehende organische Erzeugungen. Entfernt sich der Mittelpunkt der Kugel ins Unendliche, so gelangt man zu dem gewöhnlichen Kegelschnitt, indem die cyklischen Kreise und Brennpunkte in die Asymptoten und Brennpunkte desselben übergehen. So gelangt Chasles zu neuen Erzeugungen des Kegelschnitts. Ein Beispiel biete die wohl bei Chasles zuerst vorkommende duale Form der Descriptio organica Newton's (S. 44). „Werden zwei Strecken so über gegebene Geraden geführt, dafs die Verbindungslinie zweier Endpunkte einen Strahlenbüschel beschreibt, so umhüllt die Verbindungslinie der beiden anderen einen Kegelschnitt."

11. In zwei anderen Arbeiten***) beschäftigt sich Chasles mit der parabolischen Transformation. Der Fufspunkt des von einem beliebigen Punkte A aus auf die Axe einer Parabel gefällten Lotes

---

*) Chasles, Mémoire de géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques, Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 6, 1831, S. 1—46. (Selbständige Paginirung.)

**) Fufs bezeichnet den Ort der Punkte einer Kugel, deren sphärische Entfernungen von zwei Punkten eine constante Summe ergeben, als eine sphärische Ellipse und weist einen die Curve enthaltenden elliptischen Cylinder nach (§ 15). Auf den Kegel zweiten Grades, der die Curve vom Mittelpunkt der Kugel aus projicirt, weist er nicht hin, obgleich derselbe sich aus seiner Entwickelung unmittelbar ergeben würde. Vergl.: Fufs, De proprietatibus quibusdam ellipseos in superficie sphaerica descriptae, Nova Acta ac. sc. imp. Petropolitanae f. 1785, Bd. 3, 1788, S. 90—99.

***) Chasles, Premier Mémoire sur la transformation des relations métriques des figures, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 281—324. Eine Fortsetzung der Untersuchung bietet die Arbeit: Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 1—25.

und ihr Schnittpunkt α mit der Polare dieses Punktes sind conjugirte Punkte der Parabel, so dafs sie von dem Scheitel derselben gleiche Abstände haben. Sind also A, B, C, D, ... Punkte einer gegebenen Figur, α, β, γ, δ, ... die Einschnitte ihrer Polaren nach einer Parabel in die Axe v derselben, so verwandelt sich die Beziehung

$$F(AB, AC, \ldots, BC, \ldots) = 0$$

in die andere (S. 284):

$$F\left(\frac{\alpha\beta}{\cos(AB, v)}, \frac{\alpha\gamma}{\cos(AC, v)}, \ldots, \frac{\beta\gamma}{\cos(BC, v)}, \ldots\right) = 0.$$

Verschwinden die Neigungswinkel aus der letzteren Relation vollständig, so findet dieselbe unabhängig von der Lage der Geraden v bei jeder Figur der zweiten Art statt. Entsprechendes gilt im Raume für das Rotationsparaboloid.

12. Als Chasles diese Arbeit veröffentlichte, war Poncelet's „théorie des polaires réciproques" im Erscheinen begriffen. Poncelet*) sah sich veranlafst, noch besonders darauf aufmerksam zu machen, dafs in seinen Resultaten das Übertragungsprincip Chasles' enthalten sei. Das oben angeführte, von Bobillier zuerst formulirte Durchgangstheorem [XXI, 4] sei auf jede metrische projectivische Beziehung anwendbar, auch wenn man den Kreis durch einen beliebigen Kegelschnitt ersetze. Wähle man eine Parabel und nehme die Transversale mit der Axe derselben identisch, so komme man auf Chasles' Regel. Die metrische Beziehung brauche dann nur noch „orthogonalement projective" zu sein, müsse bestehen bleiben, wenn man das gegebene Punktsystem senkrecht auf eine beliebige Gerade projicirt. Durch Hinzufügung geeigneter unendlich ferner Punkte und ihrer Entfernungen von Punkten der Gruppe sei es dann stets möglich, die Relation als einen Specialfall einer allgemeinen projectivischen („relation coniquement projective") aufzufassen.

Man wird vielleicht zugeben, dafs Poncelet das Wesen der Transformation tiefer erfafst hat, als Chasles. Dafür ist dessen Regel gleichsam handlicher, und man wird ihm die Anerkennung nicht versagen können, dafs er neue schöne Resultate aus diesem Princip gefolgert hat. Ihr Verhalten zu dieser Angelegenheit ist, scheint mir, überhaupt typisch für die gegenseitige Stellung der beiden grofsen französischen Geometer. Die weitaus wuchtigere Persönlichkeit ist Poncelet. Seine Stärke liegt in der Ausmittelung der grofsen Gesichtspunkte, von denen aus man den Zusammenhang der Dinge zu überblicken vermag. Es kann, scheint mir, nicht geleugnet werden, dafs Chasles in der Auffassung des grofsen Ganzen

*) Poncelet, Note sur quelques principes généraux de transformation des relations métriques des figures etc., Quet. Corr., Bd. 7, 1832, S. 118—123, 141—158. (Traité, Bd. 2, S. 332—345.)

— wenigstens zunächst — nicht dieselbe Tiefe erreicht; dafür ist er unermüdlich in der Ausnützung der Methoden, die er sich zu eigen gemacht hat, und überrascht den Leser durch eine reiche Fülle von Anwendungen. Vielfach zeigt sich seine Erfindungsgabe im Einzelnen derjenigen Poncelet's überlegen.

13. Die Mehrzahl der Resultate, die Chasles in beiden Arbeiten darbietet, gehören der Transversalentheorie an; ich komme in einem besonderen Capitel, das auch den hierher gehörigen Arbeiten von Maclaurin, Sturm, Poncelet gewidmet ist, auf dieselben zurück. Für jetzt will ich mich mit der Anführung einiger Resultate über Gebilde zweiter Ordnung begnügen. In einer früheren Arbeit*) hatte Chasles den Satz aufgestellt: Trifft eine sich selbst parallel bewegte Gerade zwei Kegelschnitte in den Punkten A, B und C, D, so beschreibt ein Punkt m derselben, welcher der Beziehung

$$\frac{mA \cdot mB}{mC \cdot mD} = \text{const.}$$

genügt, einen dritten Kegelschnitt, welcher die Schnittpunkte der gegebenen enthält (S. 7). Der Satz, der übrigens ziemlich unbefriedigend begründet wird, enthält als speciellen Fall den Involutionssatz von Desargues in sich. Dieser, oder zunächst ein dem „theorema ad quatuor lineas" gleichwertiger Satz entsteht, wenn die gegebenen Kegelschnitte in Geradenpaare übergehen. Die parabolische Transformation liefert nun zunächst aus dem genannten Theorem den Satz: „Die Lote AA', BB', CC', DD', welche eine bewegliche Tangente eines Kegelschnittes aus den Ecken eines umschriebenen Vierseits $ABCD$ empfängt, genügen der Bedingung (S. 289):

$$\frac{AA' \cdot CC'}{BB' \cdot DD'} = \text{const.}\text{"}$$

Das allgemeine Theorem liefert den Satz: „Legt man von einem beliebigen Punkte P einer Transversale aus Tangentenpaare an zwei feste Kegelschnitte und eine Tangente an einen Kegelschnitt, welcher die gemeinsamen Tangenten der ersteren berührt, so besteht unter den Schnittpunkten α, α'; β, β'; μ mit einer Hülfsgeraden die Beziehung (S. 288)

$$\frac{\mu\alpha \cdot \mu\alpha'}{\mu\beta \cdot \mu\beta'} = \text{const.}\text{"}$$

Legt man auch an den dritten Kegelschnitt von P aus die zweite Tangente, welche die Hülfsgerade in μ' schneidet, so ist natürlich

$$\frac{\mu\alpha \cdot \mu\alpha'}{\mu\beta \cdot \mu\beta'} = \frac{\mu'\alpha \cdot \mu'\alpha'}{\mu'\beta \cdot \mu'\beta'}.$$

*) Chasles, Propriétés générales des coniques, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 6—22.

Die duale Form zu dem Desargues'schen Involutionssatz ist in dieser Gleichung enthalten, die Chasles ausdrücklich allerdings nur für Oberflächen zweiter Ordnung einer Schar angiebt (S. 319). Eine andere wichtigere Entwickelung bezieht sich auf die projectivische Erzeugung des Kegelschnitts und knüpft an die oben besprochene Erstlingsarbeit von Chasles an.*) Werden die Paare gegenüberliegender Seiten eines auf einem einschaligen Hyperboloid liegenden Vierseits $ABCD$ von zwei Erzeugenden verschiedener Scharen in den Punkten M, N bez. P, Q getroffen, so ist, weil MN und PQ sich schneiden,

$$\frac{AM}{BM} = a\,\frac{DN}{CN}; \quad \frac{AP}{DP} = a\,\frac{BQ}{CQ}.$$

Projicirt man das Hyperboloid in einer bestimmten Richtung, so wird sein scheinbarer Umrifs — ein Kegelschnitt — von den Projectionen der sechs Geraden berührt. Die beiden Beziehungen verknüpfen also auch die beiden Punktreihen, welche zwei bewegliche Tangenten des Kegelschnittes auf je zwei gegenüberliegenden Seiten eines umschriebenen Vierseits ausschneiden.**) Die Elimination von a liefert eine von Poncelet***) bereits entwickelte Relation und gestattet rückwärts die Ableitung des Satzes von Brianchon, von dem Poncelet ausgegangen war. Die parabolische Transformation ergiebt nun folgendes Resultat. Wird eine Sehne eines Kegelschnittes von einem beliebigen Punkte desselben aus in die Strecke $\mu\nu$ einer zweiten Sehne $\alpha\beta$ projicirt, so ist (S. 293)

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} = k\,\frac{\nu\alpha}{\nu\beta}.$$

Offenbar ist diese Relation nur ein anderer Ausdruck für den Satz, dafs vier feste Punkte eines Kegelschnitts von einem beweglichen Punkte desselben aus durch eine Gruppe von constantem Doppelverhältnis (k) projicirt werden. Für jetzt zieht Chasles die Schlüsse: „Sendet ein beweglicher Punkt durch vier feste Punkte die Strahlen einer harmonischen Gruppe, so beschreibt er einen diese Punkte enthaltenden Kegelschnitt; wird ein beweglicher Strahl von vier festen Geraden beständig in einer harmonischen Punktgruppe getroffen, so umhüllt er einen auch die letzteren Geraden berührenden Kegelschnitt" (S. 294). Hier ist also der Ausgangspunkt seiner Untersuchungen über die projectivische Erzeugung des Kegelschnittes zu suchen.

Bei Oberflächen zweiter Ordnung wird ein analoger Entwickelungsgang eingeschlagen. Mit Hülfe der parabolischen Transformation werden zwei metrische Beziehungen einander gegenübergestellt, welche auf das Auftreten der Involution beim Büschel und der Schar hin-

*) Vergl.: IX, 8.

**) Chasles, Note sur une propriété générale des coniques dont un cas particulier etc., Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 363—371 (S. 365).

***) Vergl.: XVII, 2.

weisen. Eine besondere Form der letzteren Beziehung liefert (S. 318) den Satz: „Die Lote, welche die Tangentialebene eines einschaligen Hyperboloids aus den Ecken eines ihm angehörigen Vierseits $ABCD$ empfängt, genügen der Beziehung

$$\frac{AA' \cdot CC'}{BB' \cdot DD'} = \text{const.}``$$

XXII. Die collineare Beziehung.

1. Bereits in der Einleitung dieses Referates war darauf aufmerksam gemacht worden, dafs die collineare Verwandtschaft sich der Beobachtung viel früher dargeboten hatte als die reciproke Beziehung. Bot sich doch bei dem Process des Projicirens und bei der Technik des perspectivischen Zeichnens in zu auffälliger Weise eine Zuordnung zweier Ebenen dar, bei der jedem Punkt und jeder Geraden der einen ein Punkt, bezw. eine Gerade der anderen entspricht. Die Möglichkeit, dadurch Sätze zu gewinnen, dafs man einen gegebenen Kegelschnitt in einen Kreis projicirte und die Rolle der Fluchtlinie einer besonders hervorragenden Geraden der Kegelschnittebene zuwies, war von verschiedenen Autoren bereits gelegentlich benutzt worden, bis Poncelet in seinem Traité die vielseitigsten Anwendungen der Methode vorführte. Der Gedanke wurde nicht in dem Mafse von den Geometern aufgegriffen, wie es Poncelet erwartet hatte. Die hierhin gehenden Bestrebungen beschränken sich gröfstenteils auf ganz einfache Anwendungen, die in Poncelet's Traité ihre völlige Erledigung gefunden hatten. Eine Reihe wesentlich neuer Resultate gewann diesem Princip Staudt ab. Seine Erstlingsschrift*) geht gänzlich in der Anwendung desselben auf. Um Staudt's eigene Worte anzuführen „soll nun vorzugsweise der Kreis mit seinem Mittelpunkte, dem Pole des Unendlichen, als ein einfaches Bild dienen, an welchem wir die Eigenschaften anderer Kurven derselben Ordnung, und die Beziehungen, die andere Punkte und Linien zu ihnen haben, erkennen werden". Aus der Beobachtung, dafs dem Kreise Rechtecke eingeschrieben sind, deren Diagonalen sich im Mittelpunkt kreuzen, wird genau so wie bei Poncelet der Zusammenhang zwischen einem eingeschriebenen Viereck des Kegelschnittes und dem zugehörigen umschriebenen Vierseit erkannt, je zwei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten des ersteren sind auf einer Verbindungslinie gegenüberliegender Ecken des letzteren gelegen und in Bezug auf den Kegelschnitt einander „zugeordnet"; ein jeder gehört der Polare des anderen an. Die Mittelpunkte zweier Kreise trennen zwei gegenüberliegende der Punkte harmonisch, in welchen

*) v. Staudt, Über die Kurven II. Ordnung, Nürnberg 1831, (Programm-Abhandlung). Die Hinweise beziehen sich auf die Paragraphen der Arbeit.

sich ihre gemeinsamen Tangenten begegnen. Bildet man also aus den gemeinsamen Tangenten zweier Kegelschnitte und den Geraden, welche den einen oder anderen in ihren gemeinsamen Punkten berühren, drei vollständige Vierseite, so werden je drei Paare gegenüberliegender Ecken durch zwei Ecken des gemeinschaftlichen Polardreiecks harmonisch getrennt; jeder Punkt des zweiten trennt mit einem Punkte des dritten das erste Paar harmonisch. Hieraus hat Staudt später*) in einfachster Weise das Theorem gefolgert: „Die acht Tangenten zweier Kegelschnitte in ihren gemeinschaftlichen Punkten berühren einen Kegelschnitt, welcher mit ihnen ein Polardreieck gemein hat." In der mich beschäftigenden Arbeit wird der Kegelschnitt als Hüllcurve der Geraden eingeführt, die zwei einander harmonisch trennende Punktepaare mit den Kegelschnitten gemein haben (56); diesen Ort berühren auch die acht bezeichneten Tangenten.**) Aus dem Theorem und seiner dualen Form leitet Staudt mehrere besondere Fälle durch Einführung unendlich ferner Elemente ab. Nach einem dieser Sätze liegen die Berührungspunkte zweier einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln auf einer Hyperbel, deren Asymptoten zu den Durchmessern der Parabeln parallel sind. Derselbe kommt bereits in einer Arbeit von Chasles***) vor.

2. Eine bemerkenswerte Folgerung knüpft Staudt an die Thatsache, daſs der Scheitel eines rechten Winkels, welcher beständig zwei Punkte projicirt, den Kreis beschreibt, welcher ihre Verbindungslinie zum Durchmesser hat. „Da die Punkte, in welchen zwei auf einander senkrechte gerade Linien das Unendliche schneiden, mit den imaginären Punkten, in welchen es von jedem Kreise geschnitten wird, harmonisch liegen, und wir diese Punkte mit zwei reellen vertauschen

---

*) v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 169.

**) Der analytische Beweis, den Staudt erbringt, zeigt, in welchem Maſse er sich schon 1881 mit den soeben neu geschaffenen Hülfsmitteln der analytischen Geometrie vertraut gemacht hatte. Auf ihr gemeinsames Polardreieck können die beiden Kegelschnitte mit den Gleichungen

$$z^2 = ax^2 + by^2, \qquad z^2 = cx^2 + dy^2$$

bezogen werden, wobei $a + b = c + d = 1$ gesetzt werden kann. Die beiden Schnittgruppen mit der Geraden

$$z = mx + ny$$

werden durch die Gleichungen

$$(m^2 - a)\, x^2 + (n^2 - b)\, y^2 + 2mnxy = 0$$

und

$$(m^2 - c)\, x^2 + (n^2 - d)\, y^2 + 2mnxy = 0$$

ausgedrückt und trennen sich harmonisch, wenn

$$(m^2 - a)(n^2 - d) + (m^2 - c)(n^2 - b) = 2m^2n^2$$

ist; die Hüllcurve dieser Geraden ist der Kegelschnitt

$$\frac{z^2}{ad + bc} = \frac{x^2}{b + d} + \frac{y^2}{a + c}.$$

***) A. a. O. S. 184** (S. 371).

können", so folgt: „Der Scheitel einer harmonischen Strahlengruppe, welche vier gegebene Punkte projicirt, beschreibt einen diese Punkte enthaltenden Kegelschnitt" (13). Auf den so gewonnenen Satz läfst Staudt (19) den anderen folgen: „Die Paare zugeordneter Strahlen eines Kegelschnittes, welche zwei feste Punkte projiciren, schneiden sich in Punkten eines Kegelschnittes, welcher die gegebenen Punkte und die Berührungspunkte der von ihnen ausgehenden Tangenten enthält." Von seinen Punkten aus werden ja in der That die gegebenen Punkte und die Berührungspunkte der Tangenten, welche von einem derselben ausgehen, durch eine harmonische Strahlengruppe projicirt. Wiederum sucht Staudt das Interesse an diesem Satz und seiner dualen Form durch Bezugnahme auf unendlich ferne Elemente zu stärken. Die Einführung der unendlich fernen Kreispunkte in den Satz selbst ergiebt, dafs die Paare senkrechter Tangenten eines Kegelschnitts sich in Punkten eines Kreises treffen (25). Offenbar begegnen sich, was Staudt aber nicht hervorhebt, Kreis und Kegelschnitt auf den Directrices des letzteren. Wählt man bei der dualen Form Gerade, welche die unendlich fernen Kreispunkte projiciren, so ersieht man den wirklichen Grund des Poncelet'schen Satzes: „Erscheint eine Sehne eines Kegelschnittes von einem festen Punkte aus beständig unter einem rechten Winkel, so umhüllt sie einen Kegelschnitt, der den festen Punkt zum Brennpunkt hat." (25) Auf der anderen Seite kann der Satz dadurch variirt werden, dafs eine der beiden Geraden sich vollständig ins Unendliche entfernt. Es folgt nun eine Reihe von Sätzen über den Pascal'schen Satz; das Ausgangstheorem: Schneiden sich $n-1$ Paare gegenüberliegender Seiten eines $2n$-Ecks auf einer gegebenen Geraden, so gehört ihr auch der Schnittpunkt des letzten Seitenpaares an, „ist am leichtesten an dem besondern Fall zu erkennen, in welchem das Vieleck in einen Kreis beschrieben ist, und je zwei gegenüberliegende Seiten parallel laufen". Bemerkenswert ist die Anwendung auf die Aufgabe, die Kegelschnitte zu zeichnen, die einen gegebenen, $\mathfrak{K}$, doppelt berühren und drei gegebene Gerade zu Tangenten haben. Zu den sechs Punkten, die $\mathfrak{K}$ mit den Geraden gemein hat, gehören die vier Berührungssehnen als Pascal'sche Gerade. Mit Hülfe der Polareigenschaften wird der Übergang von dieser Lösung — welche man [XVII, 11; XVIII, 4] als die Poncelet'sche bezeichnen kann — zu einer anderen Form vollzogen, die auch dann bestehen bleibt, wenn die sechs Schnittpunkte zum Teil imaginär werden (40).

3. Der Satz: „Zwei einem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke sind einem anderen umschrieben" erfährt folgende Modification (45). „Die Kegelschnitte, welche zwei feste Punkte enthalten und den Dreiecken eines vollständigen Vierseits umschrieben sind, begegnen sich in noch einem Punkte. Die drei Geraden, welche den Punkt mit den beiden gegebenen und diese unter sich verbinden, berühren einen

dem Vierseit eingeschriebenen Kegelschnitt.“ Die Benutzung der beiden unendlich fernen Kreispunkte läfst als einen speciellen Fall des Theorems den Lambert'schen Satz erkennen, nach welchem der Brennpunkt einer Parabel in jedem einem Tangentendreieck umschriebenen Kreise enthalten ist [VI, 7].

Den Feuerbach'schen Satz, welchen Staudt aufstellt und sodann projectivisch verallgemeinert (47, 48), mufs man sich nach der ihm gegebenen Fassung etwa folgendermafsen bewiesen denken. Es mögen sich in L; M; N je zwei gegenüberliegende Seiten AD, BC; BD, CA; CD, AB eines vollständigen Vierecks begegnen. Die Schnittpunkte der Geradenpaare, welche einen M, N, B, C enthaltenden Kegelschnitt in M, N bez. B, C berühren, werden alsdann durch A und D harmonisch getrennt. Ist D der Höhenpunkt des Dreiecks ABC, so kann man einen Kreis über dem Durchmesser BC als Kegelschnitt benutzen. Die Tangenten in B und C sind alsdann zu AD parallel, diejenigen in M und N treffen sich mithin im Mittelpunkte von AD. Die Kreise über den Durchmessern BC und AD schneiden sich also in M und N rechtwinklig; die Mittelpunkte von BC und AD begrenzen einen Durchmesser des Kreises LMN. Bei der projectivischen Verallgemeinerung treten an die Stelle der unendlich fernen Kreispunkte zwei in Bezug auf ein Viereck $ABCD$ „einander zugeordnete“ Punkte P und Q. Die sechs Kegelschnitte, welche einen beliebigen Punkt P mit den Punktgruppen $MNBC$, $MNAD$, ... verbinden, treffen mithin in dem zugeordneten Punkte Q zusammen. Die Tangenten aller Kegelschnitte in den Punkten A, B, C, D, L, M, N, P, Q laufen zu je vier in Punkten auf den Seiten des vollständigen Vierecks zusammen. Bei anderen Sätzen hat Staudt ihren Ursprung nicht angeführt; man erkennt ihn in den bekannten Sätzen über den Zusammenhang zweier orthogonalen Kreisbüschel. Bei einem anderen, gewöhnlich auf Hesse zurückgeführten Satz: — „Sind zwei Seiten eines vollständigen Vierecks den gegenüberliegenden Seiten in Bezug auf einen Kegelschnitt zugeordnet, so sind auch die beiden letzten Seiten einander zugeordnet“ — hat er (52) die Beweismethode mit den Worten angedeutet: „Man erkennt diesen Satz am leichtesten durch den Fall, in welchem die Kurve ein Kreis und der eine Eckpunkt des Vierecks sein Mittelpunkt ist.“ Für den Entwickelungsgang Staudt's ist die soeben besprochene Abhandlung, wie man sieht, von der gröfsten Bedeutung, deshalb habe ich ihrer Besprechung einen etwas gröfseren Raum gewährt.

4. Unter allen collinearen Beziehungen im Raume oder in der Ebene die augenfälligste ist diejenige zwischen zwei gleichstimmig-congruenten oder ähnlichen Figuren.*) Es ist das Verdienst Chasles',

*) In der Folge handelt es sich in der Ebene immer, im Raume nur im Falle der Congruenz um gleichstimmige Figuren.

immer von neuem auf die reiche Fundgrube schönster Entwickelungen hingewiesen zu haben, die sich hier der geometrischen Forschung darbieten. Die erste Arbeit in dieser Richtung*), welche in unsere Epoche gehört, bietet das erste Beispiel für den allgemeinen Satz, daſs zwei in einander liegende collineare Räume sich selbst entsprechende Punkte, Gerade und Ebenen aufweisen, welche Bestimmungsstücke eines Tetraeders sind. Wenn es sich um ähnliche Figuren handelt, sind im allgemeinen zwei Punkte dieses Tetraeders reell, von denen sich einer ins Unendliche entfernt hat; seine Polare nach dem unendlich fernen Kugelkreis schneidet auf ihm die beiden anderen Fundamentalpunkte aus. Von den Bestimmungsstücken des Tetraeders sind noch reell eine Kante und eine Ebene, welche von dem Fundamentalpunkt im Endlichen aus die reellen Bestimmungsstücke des unendlich fernen Dreiecks projiciren, und die deshalb senkrecht zu einander sind. Dieses specielle Resultat, das er auf elementarem Wege gewonnen haben wird, drückt Chasles auf folgende Weise aus: „Zwei beliebige ähnliche Figuren haben einen Punkt A**), eine von diesem ausgehende Gerade a und eine Ebene α, welche in A zu a senkrecht steht, entsprechend gemein, so daſs die zweite Figur entsteht, indem man die erste um a dreht und sie sodann von A aus in einem bestimmten Ähnlichkeitsverhältnis umformt.“ Wenn nun, fährt er fort, die Figuren speciell congruent werden, so rücken die Elemente A und α ins Unendliche hinaus, die Gerade a hingegen bleibt bestehen, und man erhält den fundamentalen Satz: „Jede zu einer gegebenen Φ congruente Figur Ψ kann hervorgebracht werden, indem man Φ um eine bestimmte Axe dreht und sodann in Richtung derselben um eine bestimmte Strecke verschiebt.“ Geht man auf ebene Figuren zurück, so entsteht der Satz: „Ähnliche ebene Figuren und insbesondere congruente Figuren haben stets einen Punkt entsprechend gemein. Bei letzteren genügt eine Drehung um diesen Pol, um die eine Figur mit der anderen zur Deckung zu bringen.“

In derselben Arbeit finden sich die ersten Sätze über den tetraedralen Complex, der aus den Verbindungslinien homologer Punkte bezw. den Schnittlinien homologer Ebenen zweier ähnlichen Figuren besteht. Chasles giebt an, daſs die einen beliebigen Punkt enthaltenden Verbindungslinien auf einem Kegel zweiten Grades enthalten sind, auf dem die Punkte der ersten Figur eine Raumcurve dritter Ordnung erfüllen. Der duale Satz wird hinzugefügt. Eine unendlich

*) Note sur les propriétés générales du système de deux corps etc., Bull. de Férussac, Bd. 14, 1830, S. 321—326 und Quet. Corr., Bd. 7, 1832, S. 352—357.

**) Den Satz vom Ähnlichkeitspunkt, den er für ebene gleichstimmig-ähnliche Figuren einfach construirt, hat Euler bereits 1777 gegeben, Vergl.: Euler, De centro similitudinis, Nova acta ac. sc. imp. Petropolitanae f. 1791, Bd. 9, 1795, S. 154—165 (conv. exhib. d. 23. Octob. 1777). Ich komme hierauf zurück.

kleine Verschiebung eines Körpers kann stets als eine Schraubenbewegung gedacht werden; die Punkte, deren Bewegung auf irgend einen festen Punkt gerichtet ist, gehören einer Raumcurve dritter Ordnung an, die Tangenten ihrer Bahnen bilden einen Kegel zweiten Grades. Bei zwei endlich entfernten congruenten Körpern sind die Verbindungslinien homologer Punkte die Tangenten der Bahnen, welche die Mittelpunkte dieser Strecken bei einer bestimmten unendlich kleinen Verschiebung des aus ihnen gebildeten Körpers beschreiben.

5. Für die Herleitung des Hauptsatzes, daſs zwei ebene congruente Figuren durch eine Drehung in einander übergeführt werden können, bediente sich Chasles eines zunächst von Hachette*) veröffentlichten Verfahrens. Sind AB und A_1B_1 gleiche Strecken, so laufen die in den Mittelpunkten von AA_1 und BB_1 errichteten Lote in einem Punkte O zusammen, an dem AB und A_1B_1 congruente Dreiecke bestimmen, so daſs eine Drehung um O beide Strecken und mit ihnen starr verbundene Figuren in einander überführt.**) Offenbar kann diese Betrachtungsweise auf die Kugeloberfläche ausgedehnt werden, und sie ist in der That von Euler***) zu dem Nachweise benutzt worden, daſs zwei beliebige Lagen eines in einem Punkte befestigten Körpers durch eine Drehung um eine Axe in einander übergeführt

*) Hachette, Démonstration d'un théorème de M. Chasles, Quet. Corr., Bd. 7, 1832, S. 84—85.

**) Offenbar muſs noch die Möglichkeit abgewiesen werden, daſs AOB und A_1OB_1 entgegengesetzt gleich sind. Man zeigt leicht, daſs AB und A_1B_1 gegen eine Gerade symmetrisch liegen müssen, sobald eine derartige Lage existirt. Diese letztere Gerade fällt dann mit den Mittelsenkrechten von AA_1 und BB_1 zusammen, für jeden ihrer Punkte O sind AOB und A_1OB_1 entgegengesetzt gleich; der gesuchte Drehpunkt fällt mit dem Schnittpunkte von AB und A_1B_1 zusammen.

***) Euler, Formulae generales pro translatione quacunque corporum rigidorum, Novi comment. ac. sc. imp. Petropolitanae, f. 1775, Bd. 20, 1776, S. 189—207 (S. 202). Die analytische Behandlung der Aufgabe führte auf eine Gleichung dritten Grades unter den neun Richtungscosinus zweier Tripel orthogonaler Strahlen gegen einander, die identisch erfüllt sein muſste (S. 201). Diese von Lexell direct erwiesene Identität drückt aus, daſs die Determinante einer orthogonalen Transformation den Wert $+1$ besitzt. Vgl. Lexell, Theoremata nonnulla generalia de translatione corporum rigidorum, ibidem, S. 239—270. Bei einer unendlich kleinen Bewegung eines Körpers um einen Punkt hatte bereits d'Alembert die Rotationsaxe nachgewiesen. Jede endliche stetige Bewegung war also als eine Folge unendlich kleiner Drehungen um eine mit der Zeit wechselnde, instantane Axe anzusehen. Vgl.: d'Alembert, Recherches sur la précession des équinoxes et sur la nutation de l'axe de la terre, dans le système newtonien, Paris 1749, S. 83. Bei Euler tritt die instantane Rotationsaxe zuerst in der Abhandlung auf: Découverte d'un nouveau principe de mécanique, Hist. de l'Ac. f. 1750, Berlin 1752. S. 185—217; auf das spontane Rotationscentrum einer in einer Ebene bewegten Figur hat bekanntlich Bernoulli hingewiesen: Johannis Bernoulli Opera omnia, Bd. 4, Lausanne und Genf 1742, S. 265.

werden können. In einer 1829 verfafsten Arbeit*) macht Chasles, nachdem er den Hachette'schen Beweis mitgeteilt hat, die Bemerkung, derselbe könne unmittelbar auf congruente Figuren einer Kugel ausgedehnt werden. Aus diesem Satze kann man sofort ableiten, dafs in zwei congruenten oder ähnlichen Figuren die Geraden eines bestimmten Bündels paralleler Strahlen paarweise einander entsprechen, und weist nun ähnlich wie bei dem Satze der Ebene nach, dafs ein Strahl des Bündels sich selbst entspricht. Bei ähnlichen Figuren kann alsdann ein sich selbst entsprechender Punkt auf diesem Strahle nachgewiesen werden.

6. Die Euler'sche Entwickelung ergab bereits, dafs zwei starre congruente Körper durch eine Drehung um eine Axe und durch eine hierauf folgende Verschiebung in einer bestimmten Richtung in einander übergeführt werden können; aber es fehlt die von Chasles herrührende Ergänzung, dafs die Parallelverschiebung in Richtung der Drehungsaxe erfolgt, wenn die letztere gehörig festgelegt wird. Die unendlich kleine Verschiebung hat jedoch schon Mozzi**) in einer mir unzugänglich gebliebenen Schrift als eine Schraubenbewegung bezeichnet: Giorgini giebt in der unten genannten Arbeit einen äufserst eleganten Beweis dafür, dafs zwei congruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$ und zugleich mit ihnen etwa verbundene congruente Körper durch eine Schraubenbewegung in einander übergeführt werden können. Stimmen die von einem Hülfspunkt Q ausgehenden Strecken QL, QM, QN in Gröfse und Richtung mit AA', BB', CC' überein, und ist S ein beliebiger Punkt von LMN, so wird durch eine Verschiebung in der Richtung und Gröfse von QS das Dreieck ABC in eine solche Lage $A_0B_0C_0$ gebracht, dafs seine Ecken von LMN dieselben Entfernungen in Richtung von QS haben, wie die entsprechenden Punkte von $A'B'C'$. Deshalb entstehen aus $A_0B_0C_0$ und $A'B'C'$ durch orthogonale Projection auf LMN congruente Dreiecke, welche durch eine Drehung um einen Punkt R von LMN in einander übergeführt werden. Eine Drehung des $A'B'C'$ anhaftenden Körpers um das in R errichtete Lot und eine darauf folgende Translation in Gröfse und Richtung von

*) Chasles, Mémoire de géométrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques, Bull. d. la Soc. mathém. de France, Bd. 6, 1878, S. 208—250. Die Abhandlung trägt den Redactionsvermerk: Ce mémoire inédit a été présenté à la Société philomatique le 11 août 1829.

**) Mozzi, Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi, Neapel 1763. Giorgini hat jedoch die Überlegungen Mozzi's als unzutreffend bezeichnet. Vergl.: Appendice alla memoria: Intorno alle proprietà geometriche del movimento di un sistema di forma invariabile (datirt vom 3. Febr. 1832). Mem. d. soc. Italiana d. sc. res. in Modena, Bd. 21, parte mat., Modena 1836, S. 47—54. Mozzi ging nach Giorgini (S. 40) von der irrigen Ansicht aus, ein von einem einzigen Punkte beschriebenes Bahnelement genüge, um die Rotationsaxe festzulegen, wenn der Körper um einen Punkt bewegt wird, und gewann dann seinen Satz durch Zerlegung des Bahnelementes in zwei unendlich kleine Strecken.

SQ führt ihn in den ABC anhaftenden Körper über. Die Schraubenbewegung, welche dieser Forderung genügt, wird mit Hülfe des von Q auf LMN gefällten Lotes QS_0 fixirt. Schaltet man eine dritte Zwischenlage $A''B''C''$ zwischen ABC und $A'B'C'$ ein, so kann man es mit Leichtigkeit so einrichten, daſs für die Überführungen von ABC in $A''B''C''$ und von $A'B'C'$ in $A''B''C''$ gleiche Parallelverschiebungen gebraucht werden und also ABC über $A''B''C''$ in $A'B'C'$ durch zwei Drehungen um windschiefe Axen übergeht. Merkwürdigerweise hat Giorgini diesen letzteren Schluſs nicht gezogen, obgleich er für eine unendlich kleine Bewegung die Zerlegung in zwei Schraubenbewegungen mit windschiefen Axen erörtert hatte.*) Wenn man sich eine Folge unendlich kleiner Rotationen, die ein Körper erfährt, durch Strecken der zugehörigen Axen fixirt denkt, so kann man dieselben genau so wie ein System von Kräften zusammensetzen. Da nun nach Poinsot ein System von Kräften durch eine Einzelkraft und ein Kräftepaar ersetzt werden kann, dessen Ebene zu der Wirkungslinie der Einzelkraft senkrecht steht, so ergiebt sich wiederum, daſs eine unendlich kleine Verschiebung als eine Schraubenbewegung aufzufassen ist.**) Diese Poinsot'sche Entwickelung verknüpft offenbar auch die beiden Erscheinungsformen, in denen uns das Nullsystem in der Natur entgegentritt, einerseits bei statischen Entwickelungen, andererseits in der Geometrie der Bewegung. In der ersteren Form findet man es zuerst in einer 1827 verfaſsten Arbeit von Giorgini***), auf die ich später genauer zurückkomme.

7. Ich bemerkte oben, daſs Chasles in der erstgenannten seiner beiden Arbeiten die ersten Anfänge der Theorie eines speciellen tetraedralen Complexes bietet. In der zweitgenannten Arbeit findet sich keine Andeutung des so sehr einfachen und jetzt allgemein üblichen Beweises, den Chasles später für das angeführte Theorem gab. Den entsprechenden Satz der Ebene für eine unendlich kleine Bewegung entwickelte er jedenfalls auf elementarem Wege. Es fragt sich also, ob er den Kreis, dessen Punkte einem festen, seiner Peripherie angehörigen Punkte zustreben, schon damals in seiner eigentlichen Bedeutung als Kegelschnitt erkannt hatte, welcher die drei Fundamentalpunkte und zwei entsprechende Punkte einer congruenten col-

*) Giorgini, Intorno alle proprietà geometriche dei movimenti di un sistema di punti di forma invariabile (datirt vom 15. März 1830), a. a. O. S. 191** (S. 1—46).

**) Poinsot. Théorie nouvelle de la rotation des corps. Paris, 1834, S. 7ff. Man vergleiche auch: Möbius, Über die Zusammensetzung unendlich kleiner Drehungen, Crelle's Journ. Bd. 18, 1838, S. 189—212 (Ges. W., Bd. 1, S. 545—570). Möbius zeigt auch, daſs congruente Dreiecke ABC und $A'B'C'$ durch zwei Drehungen in einander übergehen, von denen die zweite die Axe $A'B'$ besitzt, die erste AB in $A'B'$ überführt (S. 548).

***) Giorgini, Sopra alcune proprietà de' piani de' momenti etc., Mem. d. soc. Italiana d. sc. res. in Modena, Bd. 20, parte mat., Modena 1828, S. 243—254.

linearen Beziehung enthält.*) Als Hauptresultate der in Rede stehenden Untersuchung müssen die beiden Sätze gelten: Wird eine Figur in einer Ebene stetig bewegt, so laufen (Nr. 4) in jedem Moment die Normalen der von den einzelnen Figuren-Punkten beschriebenen Bahnen in einem Pol zusammen.**) Bildet man aus diesen Drehpunkten n, n', n'', ... eine, aus den Punkten der Anfangslage der beweglichen Figur, welche nach und nach in diese Drehpunkte übergeführt werden, eine zweite Curve, so rollt (Nr. 56) die zweite Curve auf der ersten ab, und die Bahn eines beliebigen Punktes erscheint als eine Epicykloide in allgemeinster Auffassung.***)

8. Zwei entsprechende Gerade M und m in einander liegender collinearer Ebenen sind perspectivisch bezogen, wenn sie von einem (sicher vorhandenen) sich selbst entsprechenden Punkte ausgehen. Verbindungslinien entsprechender Punkte D und d von M und m laufen in einem Punkte O der gegenüberliegenden Seite a des Fundamentaldreiecks zusammen. Durch D und d lassen sich zwei projectivisch ähnlich bezogene Gerade der beiden Ebenen hindurchlegen; dieselben sind zu den Fluchtlinien der beiden Ebenen parallel. Zwei ent-

*) Aus diesem Theorem folgert Chasles: Schreiten zwei Ecken eines Dreiecks stetig über vorgelegte Gerade, so beschreibt die dritte Ecke eine Ellipse. In der That giebt es auf jeder von dieser Ecke ausgehenden Geraden zwei Punkte, die Gerade beschreiben. Diese Verallgemeinerung des Theorems von Proclus ist übrigens bereits von Schooten gegeben worden (a. a. O. S. 13†).

**) Unter den Anwendungen dieses Satzes verdient die folgende hervorgehoben zu werden. Gleiten die Schenkel eines Winkels von constanter Gröſse an zwei Curven, so beschreiben die jeweiligen Berührungspunkte Elemente dieser Curven. Die Normalen eines Punktes der Curve, welche der Scheitel des Winkels beschreibt, und diejenigen der gegebenen Curven in den zugehörigen Berührungspunkten laufen also jederzeit in einem Punkte zusammen. Handelt es sich um einen rechten Winkel, so bilden die Normalen der gegebenen Curven mit den Sckenkeln des Winkels jederzeit ein Rechteck; die Normale der vom Scheitel beschriebenen Bahn trifft also die von den Berührungspunkten begrenzte Strecke jederzeit in ihrem Mittelpunkt. Gleiten beide Schenkel an demselben Kegelschnitt, so laufen nach diesem Theorem alle Normalen im Mittelpunkt des Kegelschnittes zusammen, und die Bahn des Scheitels ist ein concentrischer Kreis (Nr. 24). Läſst man in dem allgemeineren Satze die eine Curve in einen Punkt ausarten, so ergiebt sich ein Satz über die Fuſspunktcurve, welcher den Quetelet'schen Satz von der „caustique secondaire“ zur unmittelbaren Folge hat. Die räumliche Betrachtung, durch welche Chasles die Monge'sche Kugel [VIII, 7] auffindet, hat zur stillschweigenden Voraussetzung, daſs die Punkte, welche drei auf einander senkrechte Tangentialebenen aussenden, einer Fläche angehören (Nr. 65 ff.).

***) Wie Chasles später hervorgehoben hat, ist dieser Satz zuerst von Cauchy aufgestellt worden. Vgl. Cauchy, Exercices de mathématiques etc. Seconde année, Paris 1827, S. 75 u. 90. Er folgert diesen Satz und sein räumliches Analogon unmittelbar aus der Erkenntnis, daſs eine unendlich kleine Bewegung jederzeit einen „point central“, bez. eine „axe central“ besitzt.

sprechende Punkte dieser Reihen, G_1 und g_1, werden von a ausgeschnitten, und man hat für zwei beliebige homologe Punkte G und g die Relation

$$\frac{DG}{dg} = \frac{DG_1}{dg_1} = c \cdot \frac{OD}{Od}.$$

Setzt man die Constante c gleich 1, so entsteht die schon in der Einleitung [I, 6] besprochene Methode Newton's, um Figuren in andere gleicher Art zu verwandeln. Die specielle Newton'sche wie auch die allgemeinste collineare Beziehung läfst sich in Bezug auf zwei specielle Coordinatensysteme durch die Gleichungen

$$x' = \frac{a}{x} \qquad y' = \frac{by}{x}$$

darstellen. Waring findet die erste Verallgemeinerung dieses Gedankens; er entwickelt, dafs aus einer algebraischen ebenen Curve $f(x, y) = 0$ durch die lineare Transformation

$$x = \frac{pz + qv + r}{Az + Bv + C} \qquad y = \frac{Pz + Qv + R}{Az + Bv + C}$$

eine neue Curve von derselben Ordnung entsteht.*) Zu dem Gedanken, die durch die beiden Gleichungen gegebene Beziehung auf die ganze Ebene auszudehnen, ist Waring indes nicht vorgedrungen. Dieser Schritt wurde erst in unserer jetzigen Periode vollzogen. Es ist hier vor allem auf Möbius Entwickelung hinzuweisen.**) Nachdem von vier Paaren homologer Punkte aus durch eine Netzconstruction die collineare Beziehung zwischen zwei Ebenen aufgebaut ist, zeigt sich, dafs je zwei homologe Punkte gegen zwei homologe Dreiecke die barycentrischen Ausdrücke

$$\varphi A + \psi B + \chi C \text{ und } a\varphi A' + b\psi B' + c\chi C'$$

besitzen. Hieraus läfst sich der Schlufs ziehen, der sich sofort auf den Raum ausdehnen läfst, dafs zwei Punkte collineare Ebenen beschreiben, wenn die barycentrischen Coordinaten des einen lineare Functionen derjenigen des anderen Punktes sind. Sodann ist eine Abhandlung von Magnus***) zu erwähnen. Ihre Hauptbedeutung besteht darin, dafs zum ersten Male — abgesehen von einer flüchtigen Bemerkung Plücker's [XXIII, 4] — eine quadratische Verwandtschaft auf rechnendem Wege behandelt wird. Die geometrische Forschung

---

*) Waring, Miscellanea analytica, Cambridge 1762, S. 82.

**) Möbius, Barycentrischer Calcul, §§ 219, 223 (ges. W. Bd. 1, S. 268, 275).

***) Magnus, Nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géométrie, Crelle's Journ., Bd. 8, 1832, S. 51—63. Die Anwendung der oben erörterten quadratischen Verwandtschaft auf Cissoide, Lemniscate, Cardioide etc. bildet den Inhalt der Abhandlung: Magnus, Quelques théorèmes de géométrie, Crelle's Journal, Bd. 9, 1832, S. 135—138.

hatte wiederholt, und nicht blofs bei der Inversion, die Untersuchung solcher Verwandtschaften gestreift. Ich glaubte [I, 8] in diesem Sinne Entwickelungen Newton's, Braikenridge's und Maclaurin's deuten zu sollen. An den Paaren von Punkten, die in Bezug auf Kreise, später in Bezug auf die Kegelschnitte eines Büschels conjugirt sind, hatte ferner Poncelet [XVI, 4; XVII, 10] die Gesetze der quadratischen Verwandtschaft beobachtet. Gerade mit dieser Untersuchung hängt diejenige von Magnus aufs genauste zusammen. Ist bei Poncelet der reciproke Punkt eines gegebenen der Schnittpunkt der Polaren desselben nach zwei Kegelschnitten, so wird ihm bei Magnus der gemeinschaftliche Punkt der Geraden zugewiesen, die ihm in zwei beliebigen reciproken Beziehungen entsprechen. Dieser Zusammenhang wird in der That zum Ausdruck gebracht, wenn man für zwei Coordinatenpaare, u, v und x, y, zwei bilineare Gleichungen annimmt. Die Geraden

$$Ax + By + C = 0, \qquad A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$

in deren Coefficienten u, v linear eingehen, entsprechen dem Punkte u, v in zwei reciproken Beziehungen. Für x und y erhält man Ausdrücke von der Form

$$x = \frac{BC_1 - B_1C}{AB_1 - A_1B}, \qquad y = \frac{CA_1 - C_1A}{AB_1 - A_1B}.$$

Da die drei Formen zweiten Grades $BC_1 - B_1C$, $CA_1 - C_1A$, $AB_1 - A_1B$ an drei Stellen zugleich verschwinden, so entsprechen Geraden der (x, y)-Ebene — und natürlich auch der (u, v)-Ebene — Kegelschnitte mit drei gemeinsamen Punkten. Eine quadratische Verwandtschaft entsteht auch, wenn man x, y als gebrochene lineare Functionen von u und v ansetzt. Dieser Specialfall entspringt aus den allgemeineren Formeln, wenn man B und A_1 unterdrückt; indem noch A und B_1 identisch werden, gelangt Magnus zu einer auch von Möbius benutzten analytischen Darstellung der collinearen Beziehung. Bei einer genaueren Untersuchung der collinearen Beziehung, die er an anderer Stelle gegeben hat, ist Magnus von dieser Darstellung ebenfalls ausgegangen.*) Ich werde diese Entwickelung später näher verfolgen.

XXIII. Die Einführung der trimetrischen Coordinaten. Möbius' barycentrischer Calcül.

1. Mehrere Jahrhunderte hindurch hatte man sich mit der von Descartes eingeführten Methode, die Ebene auf die Mannigfaltigkeit zweier von einander unabhängiger Grössen abzubilden, begnügt.

*) Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie, Berlin 1833, S. 31 ff.

In einer Zeit, in der das Interesse sich vorzüglich den projectivischen Beziehungen zuwandte, musste sich diese alte Methode bald als unzulänglich erweisen. Noch war die Algebra nicht weit genug fortgeschritten, dafs die kleinen, aus specieller Lage des Coordinatensystems entspringenden Vortheile entbehrlich wurden, und so mufste häufig eine in der Natur der Sache nicht begründete Unsymmetrie in den Kauf genommen werden. Auf diese Weise entstand aufs natürlichste der Wunsch, den Coordinatenbegriff zu erweitern und an die Stelle des gewöhnlichen Axenkreuzes ein Fundamentaldreieck einzusetzen. Andererseits trat z. B. bei der Untersuchung der Polareigenschaften das Bedürfnis unabweislich hervor, die Gebilde in homogener Gleichungsform darzustellen. Dasselbe wurde zunächst befriedigt, indem zu den einzelnen Gliedern in der Gleichung die entsprechenden Potenzen einer Grösse t als Factoren gefügt wurden, welche während der ganzen Rechnung den Wert 1 beibehält. Noch einige der Hauptabhandlungen Hesse's begnügen sich mit diesem primitiven Hülfsmittel. Für die Geometrie der Ebene lässt sich in sehr anschaulicher Weise ein Coordinatendreieck einführen, indem man ein gegen die Ebene geneigtes räumliches Coordinatensystem einführt und die Kegel benutzt, welche die Bestandteile der Figur projiciren. Ich hatte bereits bemerkt, dafs Cayley noch 1845 dieses Hülfsmittel beim Beweise des Pascal'schen Satzes anwandte [II, 15]. Aber bereits Chasles*) hat von einem ähnlichen Princip Gebrauch gemacht. Um nachzuweisen, dass zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt polarreciproke Dreiecke perspectivisch liegen**), entwickelt er den räumlichen Satz: „Die drei Ebenen, von welchen jede eine Kante eines Trieders mit dem Pole der gegenüberliegenden Ebene nach einer Oberfläche zweiter Ordnung verbindet, haben eine Gerade mit einander gemein." Der Beweis läfst sich dadurch vereinfachen, dass man die Kanten des gegebenen Trieders zu Coordinatenaxen macht. Ist die Oberfläche ein vom Anfangspunkt ausgehender Kegel, so wird man ohne weiteres auf den Satz der Ebene zurückgeführt, dessen Beweis dann auf dem obigen Princip beruht.

---

*) Chasles, Démonstration de quelques propriétés du triangle, de l'angle trièdre et du tétraèdre, considérés par rapport aux lignes et surfaces du second ordre, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 65—85. (Nr. 7, 9.)

**) In anderer Form kommt der Satz bereits bei Poncelet vor. Vergl.: Poncelet, Recherches diverses sur le lieu des centres des sections coniques etc. Gerg. Ann., Bd. 12, 1821 u. 1822, S. 233—248. Sind die Pole A, B zweier Geraden a, b hinsichtlich eines Kegelschnittes gegeben, so beschreibt der Pol einer dritten Geraden c einen vom Kreuzungspunkt von a und b ausgehenden Strahl c_1. Die Paare A, a; B, b; c, c_1 werden durch zwei Punkte U, V harmonisch getrennt, in denen sich die in Betracht gezogenen Kegelschnitte berühren. Aus ähnlichen Gründen beschreibt die Polare eines beliebigen Punktes einen Strahlenbüschel, wenn diejenigen von zwei Punkten vorliegen. (S. 248.)

2. In rechten Fluſs gelangte die Angelegenheit zuerst durch die Arbeiten Bobillier's. Bereits an früheren Stellen trat hervor, in welchem Maſse er es verstand, den von Lamé aufgestellten Grundgedanken fruchtbar zu machen und weiterzubilden. Ich entwickelte schon, daſs er den einem Viereck umschriebenen Kegelschnitt in den beiden Formen

$$aAA' - bBB' = 0,$$

$$\gamma A + bB = 0; \;\; \gamma B' + aA' = 0$$

darstellte und hieraus den ersten Beweis des Pascal'schen Satzes im Sinne der modernen analytischen Geometrie ableitete.*) Liegt in dieser Entwickelung eine analytische Darstellung für die Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Strahlenbüschel, so lieferte er an anderer Stelle**) den Nachweis, daſs ein einschaliges Hyperboloid das Erzeugnis projectivischer Ebenenbüschel ist. Ausführlicher muſs ich auf eine dritte Arbeit Bobillier's eingehen***), welche den eben genannten vorangeht. Sind A, B, C beliebige lineare Functionen der Coordinaten x, y, so stellt

$$ABC = 0$$

offenbar ein Dreieck dar, und augenscheinlich („visiblement") ist

$$aBC + bCA + cAB = 0$$

die Gleichung eines diesem Dreiecke umschriebenen Kegelschnittes,

$$aB + bA = 0$$

diejenige einer Geraden, welche von einer Ecke des Dreiecks ausgeht. Aus der Zusammenstellung beider Gleichungen folgt die Hülfsgleichung

$$cAB = 0.$$

Die Gerade trifft die Curve mithin in Punkten, die sie mit den Geraden $A = 0$, $B = 0$ gemein hat, sie berührt dieselbe in einer Ecke des Coordinatendreiecks. Der Schnittpunkt der so bestimmten Tangente mit der gegenüberliegenden Seite $C = 0$ des Dreiecks und die beiden entsprechenden Punkte genügen der Bedingung

$$\frac{A}{a} + \frac{B}{b} + \frac{C}{c} = 0;$$

man gelangt zu der analytischen Begründung des Satzes (S. 323): „Bildet man aus den Verbindungslinien dreier Punkte eines Kegelschnittes ein Dreieck, ein zweites aus den zugehörigen Tangenten, so

*) Vergl.: II, 15.
**) Vergl.: IX, 5.
***) Bobillier, Essai sur un nouveau mode de recherche des propriétés de l'étendue; Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 320—339.

schneiden sich entsprechende Seiten in drei Punkten einer Geraden, und die Verbindungslinien entsprechender Ecken laufen durch einen Punkt." Nachdem Bobillier statt der Grössen A, B, C die Ausdrücke $bC + cB$, $cA + aC$, $aB + bA$ in die Gleichung des Kegelschnittes eingeführt hat, gelangt er zu der Gleichung

$$a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 - 2bcBC - 2caCA - 2abAB = 0$$

eines Kegelschnittes, welcher die Seiten des Coordinatendreiecks berührt (S. 325). Sind in der oben durchgeführten Betrachtung A, B, C lineare homogenene Functionen von x, y, z, so erhält man auf einen Kegel bezügliche entsprechende Eigenschaften. Indem er hierauf ein Tetraeder

$$ABCD = 0$$

zu Grunde legt und die Gleichung einer umschriebenen Oberfläche zweiter Ordnung

$$aBC + bCA + cAB + \alpha AD + \beta BD + \gamma CD = 0$$

benutzt, gelangt Bobillier zu dem räumlichen Satz (S. 335): „Bildet man aus vier Punkten einer Oberfläche zweiter Ordnung, andererseits aus den zugehörigen Tangentialebenen zwei Tetraeder, so sind einmal die Schnittlinien entsprechender Ebenen, andererseits die Verbindungslinien entsprechender Ecken je vier Erzeugende je eines einschaligen Hyperboloides." Das erstere Hyperboloid hat (S. 333) die Gleichung

$$\alpha\beta\gamma \cdot D^2 + [\alpha(\beta b + \gamma c)A + \beta(\gamma c + \alpha a)B + \gamma(\alpha a + \beta b)C]D$$
$$+ (\alpha A + \beta B + \gamma C)(bcA + caB + abC) = 0,$$

während das zweite in der Form

$$\sum (\beta b - \gamma c)(\beta b + \gamma c - \alpha a)(aBC + \alpha AD) = 0$$

dargestellt werden kann (S. 335). Bobillier weist zum Schluſs eines jeden der beiden Hauptabschnitte darauf hin, daſs $A = 0$, $B = 0$, $C = 0, \ldots$ auch Gleichungen von Curven, bez. Flächen höherer Ordnung bedeuten können. Man gelange so zu sehr allgemeinen Sätzen, welche jedoch (S. 325) infolge einer gewissen Bedürftigkeit („l'indigence") der Sprache, die für so allgemeine Entwickelungen nicht geschaffen sei, nicht ausgesprochen werden könnten.

3. Ich möchte zunächst einige Bemerkungen über Verallgemeinerungen einschalten, welche die obigen Resultate Bobillier's erfuhren. Sein Dreieckssatz, der, wie bemerkt [III, 8], bereits bei Maclaurin vorkommt, ist in dem angeführten Resultat Chasles' enthalten, nach dem irgend zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt polarreciproke Dreiecke perspectivisch liegen [XXIII, 1]. Als Verallgemeinerung des

Bobillier'schen Tetraedersatzes entwickelt Chasles aus demselben das Theorem: „Sind zwei Tetraeder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ hinsichtlich einer Oberfläche zweiter Ordnung Φ polarreciprok, so liegen die Schnittlinien a, b, c, d entsprechender Ebenen auf einem, die Verbindungslinien a_1, b_1, c_1, d_1 entsprechender Ecken auf einem zweiten einschaligen Hyperboloid." In der That, die Schnittpunkte von a, b, c mit den Seiten BC, CA, AB liegen auf den Polaren von A, B, C nach dem in ABC liegenden Kegelschnitt von Φ und gehören deshalb einer Geraden d' an, die notwendig auch die in ABC liegende Gerade d durchschneidet. Man erhält also zwei Gruppen a, b, c, d und a', b', c', d' sich auf einander stützender Geraden, die notwendig einem Hyperboloid angehören. Genau ebenso kann der zweite Satz erwiesen werden (Nr. 15).*) Ist die Oberfläche eine Kugel mit dem Mittelpunkt D, so liegen die Pole von DBC, DCA, DAB senkrecht über diesen Ebenen im Unendlichen, der Pol von ABC aber auf dem vom Mittelpunkte, also von D aus, gefällten Lote. Es entsteht mithin aus dem zweiten Theorem als Specialfall der Satz (Nr. 16): „Die Höhen eines Tetraeders gehören stets einer und derselben Geradenschar eines Hyperboloids an." Freilich naturgemäfser ergiebt sich dieser Satz aus einer dem allgemeinen Beweisverfahren nachgebildeten Schlufsweise. Die Ebenen, welche auf einer Tetraederfläche senkrecht stehen und eine ihr nicht angehörige Kante enthalten, schneiden sich zu drei und drei in vier von den Ecken des Tetraeders ausgehenden Geraden, die von allen Höhen zugleich getroffen werden. Deshalb gehören die Höhen in die eine, die vier Hülfsgeraden in die andere Schar eines und desselben einschaligen Hyperboloids. Diesen Beweisgang wird Steiner**) im Auge gehabt haben, als er den Satz aussprach: „Durch einen beliebigen Punkt einer Höhe eines Tetraeders kann man eine Gerade legen, die auch die drei anderen Höhen trifft."

4. Nach dieser Abschweifung kehre ich zu dem eigentlichen Gegenstande zurück. Niemand wird die grofse Bedeutung der so-

*) Es sei auf rechnende Beweise der beiden Sätze von Cayley, Ferrers, Salmon, Brioschi hingewiesen, vergl.: Quart. Journ., Bd. 1, 1857, S. 7—10, 191—195, 237—241, 368—370. Auch Weddle beweist den Satz gelegentlich in einer später genauer zu besprechenden Abhandlung. Vergl.: Camb. Dubl. Journ. Bd. 6 (10), 1851, S. 123.

**) Steiner, Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen, Crelle's Journ. Bd. 2, 1827, S. 96—98 (10. Lehrsatz), (Ges. W. Bd. 1, S. 128). Irriger Weise macht Steiner den Zusatz, dafs alle vier Höhen in einem Punkte zusammenlaufen, sobald sich irgend zwei von ihnen schneiden. Einige Jahre später giebt er jedoch die richtige Fassung: „Schneiden sich zwei Höhen eines Tetraeders, so begegnen sich auch die beiden anderen Höhen desselben". Vergl.: Systematische Entwickelung, Berlin 1832, Anhang, Aufgabe 78. (Ges. W. Bd. 1, S. 454.) Bobillier hat besondere Fälle seines Tetraedersatzes — den übrigens nach der Fufsnote zu S. 336 auch Steiner Gergonne mitgeteilt hatte — ebenfalls angeführt.

eben besprochenen Abhandlung Bobillier's in Abrede stellen, und doch mufs man feststellen, dafs noch ein letzter Schritt zu thun war, um zum Begriff der trimetrischen Coordinaten zu gelangen. Es ist offenbar noch erforderlich, dem Werte, welchen eine lineare Function von x, y für einen beliebigen Punkt der Ebene annimmt, eine geometrische Bedeutung abzugewinnen. Freilich war sogar die entsprechende Entwickelung für den Raum gegeben worden. Bereits Monge*) weist nach, dafs die linke Seite der auf die Form

$$\frac{C - ax - by - z}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} = 0$$

gebrachten Gleichung einer Ebene für einen Punkt x', y', z' aufserhalb derselben das von ihm aus gefällte Lot, behaftet mit einem Vorzeichen, darstellt. Aber die Verknüpfung dieses völlig in Vergessenheit geratenen Resultates mit Entwickelungen, wie ich sie soeben schilderte, findet sich zuerst bei Plücker. In seiner frühesten hierher gehörigen Schrift**), welche aus dem Jahre 1829 stammt, stellt er den Satz an die Spitze, dafs die Abstände p, q, r eines Punktes von den Seiten eines Dreiecks lineare Functionen der Coordinaten des Punktes sind.***) Nach dieser Bemerkung stellt jede Gleichung m^{ten} Grades zwischen p, q, r eine Curve m^{ter} Ordnung dar. „Wir werden", fährt er fort, „uns in dem Folgenden auf homogene Gleichungen beschränken"; dafs sie die allgemeinsten algebraischen Curven darstellen, folgert er aus der Constantenabzählung. Wie man sieht, ist die Einführung der trimetrischen Coordinaten nicht eben befriedigend. Bei weitem vorzuziehen ist der jetzt allgemein übliche Weg, x, y und 1, in welchen Gröfsen die Ausdrücke p, q, r linear und homogen sind, durch p, q, r linear und homogen auszudrücken und diese Gröfsen in die ursprüngliche Gleichung einzuführen. Die Bedeutung der Constanten in der Gleichung

$$p + aq + br = 0$$

einer Geraden wird mit Hülfe ihrer Schnittpunkte mit den Coordinatenaxen erläutert. Hieraus wird der Winkel ermittelt, den sie mit

*) Monge, Application de l'analyse à la géométrie, Paris 1807, S. 11. Der entsprechende Satz der Ebene kommt bereits bei Waring vor; er entwickelt, dafs die in bestimmter Richtung von einem Punkte nach einer Geraden hin gezogene Strecke eine lineare Function der Coordinaten ist, und gelangt so zu einer wesentlichen Verallgemeinerung des Theorems ad tres aut quatuor lineas, sowie zu der Gleichung eines Büschels, dessen beide bestimmende Curven in Geraden zerfallen. Vergl.: Waring, Miscellanea analytica, Cambridge 1762, S. 101 ff.

**) Plücker, Ueber ein neues Coordinatensystem. Crelle's Journ., Bd. 5, 1830, (Heft 1, 1829), S. 1—36 (Abh., Bd. 1, S. 124—158). Die Arbeit ist auch für die Polarentheorie von Bedeutung Ich komme darauf an anderer Stelle.

***) Plücker weist auf seine analytisch-geometrischen Entwickelungen hin, Bd. 1, Essen, 1828, (Nr. 28 ff.).

einer der Axen bildet, und aus der Vergleichung dieser Werte für zwei Gerade die Bedingung für den Parallellismus derselben gewonnen. Die Gleichungen zweier parallelen Geraden unterscheiden sich um einen bestimmten linearen Ausdruck, der offenbar nur für unendlich ferne Punkte verschwinden kann. „Die lineare Form dieser Gleichung zeigt, dafs alle unendlich weit entfernten Punkte einer und derselben Ebene als in gerader Linie liegend angesehen werden müssen." In einer Fufsnote (zu Nr. 11) weist Plücker darauf hin, dafs auch Poncelet aus der Theorie der Projection diesen Satz hergeleitet habe, und nimmt Bezug auf die oben [XVI, 6] angeführte Stelle des Traité. Es erscheint ihm sehr bemerkenswert, dafs sich dieser Satz in seiner neuen Theorie direct ergiebt und sogar eine Gleichung des Gebildes angegeben werden kann. Zu den Folgerungen Poncelet's gelange er so auf einem Wege, der gegen jeden Einwurf gesichert sei. Den hiermit implicite ausgesprochenen Tadel gegen Poncelet's Entwickelungen mufs man aber als unberechtigt zurückweisen. Bei zwei perspectivisch auf einander bezogenen Ebenen ergiebt — selbstverständlich auf dem Boden der Euklid'schen Raumanschauung — die Betrachtung der Fluchtlinien einen unumstöfslichen Beweis dafür, dafs das unendlich ferne Gebilde einer jeden Ebene als Gerade betrachtet werden mufs.

Plücker legt nun die allgemeinste Gleichung des Kegelschnittes

$$Ap^2 + 2Bpq + 2Cpr + Dq^2 + 2Eqr + Fr^2 = 0$$

zu Grunde, schliefst (Nr. 13) aus der Gleichung

$$\frac{B}{r} + \frac{C}{q} + \frac{E}{p} = 0$$

eines dem Coordinatendreieck umschriebenen Kegelschnittes, dafs jedem auf die Verknüpfung von Geraden bezüglichen Satze ein zweiter an die Seite gestellt werden könne, in dem durch drei feste Punkte gelegte Kegelschnitte auftreten. Er erläutert nun die Anwendung der neuen Coordinaten an dem Satze, dafs zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt reciproke Dreiecke perspectivisch zu einander sind (Nr. 16), und wendet sich dann der Aufgabe zu, die Gleichungen der Hyperbeln aufzustellen, welche zwei der Coordinatenaxen zu Asymptoten haben. Die Form der Gleichungen ist diejenige von Curven, welche sich in zwei Punkten berühren; die Berührungssehne ist die unendlich ferne Gerade. Concentrische ähnliche Ellipsen besitzen eine ganz ähnliche Gleichungsform und berühren sich also, in Einklang mit Poncelet's Anschauungen, in zwei unendlich fernen Punkten. Ein Specialfall hiervon sei der Poncelet'sche Satz, nach dem zwei concentrische Kreise derselben Ebene sich in zwei unendlich fernen imaginären Punkten berühren. Auch hier kann Plücker einen Ausfall gegen Poncelet nicht unterdrücken. Diese Anschauung sei für Poncelet

von grofsem Wert, sie ermögliche ihm die Betrachtung der Systeme einander doppelt berührender Kegelschnitte. Die analytische Geometrie aber sei imstande, ohne weiteres die Gleichung eines solchen Systems aufzustellen, ohne auf die Projection zurückzugreifen (Nr. 21). Im Verlauf der Arbeit bringt Plücker noch die speciellen Gleichungen eines Kegelschnittes, wenn das Coordinatendreieck aus zwei Tangenten und der zugehörigen Berührungssehne besteht oder mit einem Polardreieck zusammenfällt.

5. Als Coordinaten eines Punktes führt Plücker in letzter Verallgemeinerung die Werte*) ein, welche drei ganze Functionen zweier Veränderlichen bei Einsetzung seiner cartesischen Coordinaten annehmen. Auf diese Weise tritt noch genauer hervor, welcher innige Zusammenhang zwischen dem symbolischen Rechnen mit Curvengleichungen und der Einführung allgemeinerer Coordinaten obwaltet. In der Ausnutzung des ersteren Hülfsmittels bestand, wie Plücker ausdrücklich hervorhob, der Hauptzweck, den er im ersten Bande seiner analytisch-geometrischen Entwickelungen verfolgte. Angeregt durch Gergonne's Behandlung**) der Aufgabe des Apollonius, so führt Plücker in der Vorrede aus, habe er an immer neuen Aufgaben erkannt, dafs es häufig nicht nötig sei, auf die ursprünglichen Coordinaten zurückzugehen, dafs es vielmehr meistens nur auf übersichtliche Zusammenstellung einfacher Operationen ankomme, die mit vorliegenden Ausdrücken vorzunehmen seien, um aufs schnellste zu Sätzen über Curvengruppen zu gelangen. Viele von seinen Anwendungen sind für die Entwickelung der synthetischen Geometrie von erheblicher Bedeutung. Bereits an verschiedenen Stellen dieses Berichtes hatte ich auf solche Resultate hinzuweisen. Der zweite Band war, wie an früherer Stelle [XX, 6] hervorgehoben wurde, hauptsächlich dem Dualitätsprincip in der Ebene gewidmet. Die Einführung der Liniencoordinaten, mit deren Hülfe sich dasselbe aufs einfachste ergab, hatte Plücker bereits in einer früheren Arbeit beschäftigt.***) Die reciproken Werte der Abschnitte, welche eine Gerade auf den Coordinatenaxen abschneidet, gehen in eine Gleichung n^{ten} Grades ein, wenn die Gerade eine Curve n^{ter} Klasse umhüllt. In einer Fufsnote (zu Nr. 3) wird erörtert, dafs hiernach jede Kette von Beziehungen zwischen zwei Veränderlichen auf zwei ganz verschiedene Weisen gedeutet werden kann. Der Hauptzweck der Arbeit ist aber doch, die neugewonnene coordinatenmäfsige Bestimmung der Geraden an Beispielen zu erläutern. Eines derselben (No. 66) betrifft die Aufgabe, durch drei Punkte einen Kegelschnitt zu legen,

*) Plücker, System der analytischen Geometrie etc. Berlin 1835 (S. 3 ff.).

**) Vergl. a. a. O. S. 114*.

***) Plücker, Ueber eine neue Art, in der analytischen Geometrie Puncte und Curven durch Gleichungen darzustellen. Crelle's Journ., Bd. 6, 1830, S. 107—146, (Abh., Bd. 1, S. 178—219).

welcher einen vorliegenden doppelt berührt. Die Pole der vier in Betracht kommenden Berührungssehnen sind die Ecken eines vollständigen Vierecks, von dessen Seitenpaaren jedes mit zweien der Tangentenpaare, die sich von den gegebenen Punkten aus an den Kegelschnitt legen lassen, zu einem Büschel gehört. Er sei, fügt Plücker hinzu, auf diese Art zu einer indirecten Bestätigung des Satzes von Brianchon gelangt. Diese Art des Beweises war auf ihre kürzeste Form, wie oben [II, 16] bemerkt wurde, durch Salmon gebracht worden. Eine ausführliche und zusammenfassende Darlegung über die neuen Coordinatensysteme hat Plücker 1835*), die Ausdehnung auf den Raum 1846**) gegeben.

6. In einem Bericht über die Entwickelung der synthetischen Geometrie konnte über die soeben angeführten Abhandlungen ziemlich kurz hinweggegangen werden. Nicht so ist es mit dem Werk des dritten Hauptschöpfers der modernen analytischen Geometrie, mit Möbius' barycentrischem Calcul***), jenem „niemals genug zu bewundernden Werke", — so etwa äufsert sich Clebsch†) — „dessen tiefe und neue Gedanken vielleicht wegen der anspruchslosen Form, in der ihr Verfasser sie veröffentlichte, in ihrer Bedeutung gewöhnlich erst erfafst wurden, wenn andre Geometer der Reihe nach auf die von Möbius behandelten Momente durch die zwingende Notwendigkeit des natürlichen Fortschritts der Wissenschaft geführt wurden". Höchste Anerkennung mufs dem Werke fast noch weit mehr die synthetische, als die analytische Geometrie zollen. Denn es darf nicht unerwähnt bleiben, dafs die Geschmeidigkeit des neuen Hülfsmittels, welches Möbius dem Analytiker in die Hände giebt, von ihm selbst nicht immer vollständig ausgenutzt wird.

In der Einleitung kommt Möbius sogleich auf eine in ihrer Einfachheit doch so folgenreiche Unterscheidung, auf welche schon wiederholt hingedeutet wurde. Die Bezeichnung AB, bezogen auf zwei beliebige Punkte einer Geraden, soll nicht mehr nur die absolute Entfernung der Punkte A und B bezeichnen. Die Bewegung von A nach B wird entweder in der willkürlich fixirten positiven oder der ihr entgegengesetzten Richtung erfolgen. Je nachdem das eine oder das andere eintritt, soll der Gröfse AB das positive oder das negative Vorzeichen inne wohnen. Unter diesen Voraussetzungen ist z. B. die Beziehnug

---

) a. a. O. S. 202.

**) Plücker, System der Geometrie des Raumes etc., Düsseldorf, 1846.

***) Möbius, Der barycentrische Calcul, ein neues Hülfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie, Leipzig 1827; (Ges. W., Bd. 1, S. 1—388). Die von mir angeführten Zahlen beziehen sich auf die §§ des Werkes.

†) Clebsch, Zum Gedächtniss an Julius Plücker. Abh. d. Götting. Ak., Bd. 16, 1872, S. 1—40 (Abh. von Plücker, Bd. 1, S. XX).

$$AB + BC = AC$$

unabhängig von der gegenseitigen Lage der Punkte A, B, C und kann auf die symmetrische Form

$$BC + CA + AB = 0$$

gebracht werden. Diese neue Anschauung, welche auch bei Strecken in parallelen Geraden gültig ist, kann auf Figuren in der Ebene und im Raume ausgedehnt werden. Bei einem aus drei Punkten A, B, C einer Ebene gebildeten Dreieck stellt z. B. ABC den Inhalt, behaftet mit einem positiven oder negativen Vorzeichen dar, je nachdem ein Strahl, dessen einer Endpunkt im Innern des Dreiecks festgelegt ist, und dessen anderer Endpunkt im Sinne ABC den Umfang des Dreiecks durchläuft, sich in dem von vorne herein gewählten positiven oder dem entgegengesetzten negativen Sinne dreht.*) Will man endlich bei vier beliebigen Punkten A, B, C, D im Raume über das Vorzeichen der Gröfse $ABCD$, deren absoluter Wert stets mit dem Tetraedervolumen zusammenfällt, eine Entscheidung treffen, so kommt es darauf an, in welchem Sinne für einen in D befindlichen Beobachter der oben beschriebene Fahrstrahl sich bewegt.

7. Nach diesen Festsetzungen besteht für vier Punkte einer Ebene stets die Beziehung

$$DBC + ADC + ABD = ABC;$$

für fünf Punkte im Raume ergiebt sich die Relation

$$EBCD + AECD + ABED + ABCE = ABCD.$$

Wenn nun die Punkte A, B, C, D, E, ... im Raume, mit den Gewichten a, b, c, d, e, ... belastet, den Schwerpunkt S besitzen, und in beliebiger Richtung durch S, A, B, C, D, E, ... gezogene Parallelen eine Hülfsebene in den Punkten S', A', B', C', D', E', ... treffen, so besteht die Relation

$$(a + b + c + d + e + \cdots) SS' \\ = aAA' + bBB' + cCC' + dDD' + eEE' + \cdots,$$

wobei die Vorzeichen der Strecken der obigen Regel unterliegen. Will man einen fünften Punkt P als Schwerpunkt von vier Punkten A, B, C, D auffassen, so sind nach dieser Formel die Lasten a, b, c, d aus den Proportionen

*) Möbius drückt dies (17) etwa folgendermafsen aus: der Perimeter eines Dreiecks kann in zweierlei Sinne durchlaufen werden. Heifse die eine Bewegung, z. B. die von der Linken nach der Rechten, wenn man sich innerhalb der Fläche des Dreiecks und das Auge auf sie herabsehend denkt, die positive, die andere, von der Rechten nach der Linken, die negative etc.

$$a + b + c + d : a : b : c : d$$
$$= ABCD : PBCD : APCD : ABPD : ABCP$$

zu bestimmen; und umgekehrt gehört zu vier beliebigen Lasten (barycentrischen Coordinaten) a, b, c, d ein Schwerpunkt P, wenn nicht die Relation

$$a + b + c + d = 0$$

besteht, in welchem Falle jedoch noch von einem unendlich fernen Schwerpunkt gesprochen werden kann. In entsprechender Weise können in der Ebene die barycentrischen Coordinaten a, b, c eines Punktes hinsichtlich A, B, C aus der Formel

$$a + b + c : a : b : c = ABC : PBC : APC : ABP$$

ermittelt werden, und es stellt

$$a + b + c = 0$$

die unendlich ferne Gerade der Ebene dar. Endlich unterliegen die barycentrischen Coordinaten a, b eines beliebigen Punktes P der Geraden AB den Proportionen

$$a + b : a : b = AB : AP : PB.$$

8. Würde jetzt die Bemerkung gemacht, dafs eine beliebige Gleichung von der Form

$$f(a, b, c) = 0 \quad \text{oder} \quad f(a, b, c, d) = 0$$

eine ebene Curve oder eine Fläche darstellt, welche ja durch die Betrachtung der unendlich fernen Elemente schon so nahe gelegt war, so wäre in umfassender Weise die analytische Geometrie auf eine neue Grundlage gestellt. Möbius verdunkelt aber diesen einfachen Gedanken durch eine eigentümliche Auffassung, durch das Operiren mit barycentrischen Ausdrücken: ein Punkt D in der Ebene ABC hat den barycentrischen Ausdruck $aA + bB + cC$, wenn er die barycentrischen Coordinaten a, b, c besitzt. Es besteht für ihn die barycentrische Gleichung

$$aA + bB + cC \equiv dD.$$

Allgemeiner versteht Möbius unter einer barycentrischen Beziehung in der Ebene eine Gleichung von der Form

$$aA + bB + cC \equiv eE + fF + gG,$$

wobei E, F, G in gewisser Weise von A, B, C abhängige Punkte der Ebene ABC sind und die beiden Coordinatengruppen a, b, c und e, f, g den gleichen Punkt darstellen sollen. Offenbar ist eine solche barycentrische Gleichung die Vereinigung von drei, die ganz entsprechend gebildete barycentrische Gleichung im Raume die Vereinigung von vier Gleichungen. Das Operiren mit barycentrischen

Ausdrücken läfst ihn die erwähnte Art der Darstellung von Curven und Flächen nur für den Fall unendlich ferner Gebilde in der Ebene und im Raum benutzen. Bei der Darstellung einer Curve oder Fläche ist er stets dazu gezwungen, in dem barycentrischen Ausdruck eines auf dem Gebilde beweglichen Punktes die Coordinaten a, b, c, bez. a, b, c, d als Functionen eines oder zweier Parameter darzustellen. Diese explicite Darstellung der Gebilde bewahrt die notwendige Geschmeidigkeit nur in den einfachsten Fällen, auf die Möbius sich aus diesem Grunde beschränkt. Auch steht es ganz und gar im Zusammenhange damit, dafs er den Hauptvorteil eines trimetrischen Coordinatensystems, die Möglichkeit, drei Punkte auf ganz symmetrische Art in die Betrachtung einzuführen, häufig ganz ohne Veranlassung aufgiebt. Diesen Umständen ist es wohl zuzuschreiben, dafs das fundamentale Werk von Möbius zunächst bei weitem nicht so in den Entwickelungsgang der analytischen Geometrie eingriff, wie die oben erwähnten Arbeiten von Bobillier und Plücker.

9. Da

$$E + wE' = aA + bB + cC + w(a'A + b'B + c'C)$$

der barycentrische Ausdruck für einen beliebigen Punkt auf der Verbindungslinie zweier gegebenen ist, so gelangt man (38) zu dem barycentrischen Ausdruck

$$(a + a'w)A + (b + b'w)B + (c + c'w)C$$

der Geraden, für den Möbius (40) mit scheinbarer Vereinfachung schreibt:

$$A + xB + (f + gx)C.$$

Die Determinantengleichung, welche die Coordinaten dreier auf einer Geraden liegenden Punkte verbindet, giebt er (43) an, ohne die nahe liegende Folgerung zu ziehen, dafs eine lineare Gleichung unter den barycentrischen Coordinaten eines laufenden Punktes stets eine Gerade darstellt. Entsprechend werden die Ausdrücke einer Geraden im Raume und einer Ebene, deren Coefficienten lineare Functionen von einer oder von zwei Veränderlichen sind, auf die Formen

$$(fx + f')A + (gx + g')B + xC + D$$

und

$$A + xB + yC + (f + gx + hy)D$$

zurückgeführt (47, 51). Die Verknüpfung dieser Gleichungen wird erörtert. Man erhält den Ausdruck einer Curve zweiter Ordnung, wenn die barycentrischen Coordinaten eines auf ihr beweglichen Punktes ganze Functionen zweiten Grades einer Veränderlichen sind, und kann (61) bei geeigneter Wahl des Fundamentaldreiecks ihren Ausdruck auf die Form bringen:

$$aA + xB + x^2C;$$

die Gleichung stellt, je nachdem

$$a > +\tfrac{1}{4}, \quad a = +\tfrac{1}{4}, \quad a < +\tfrac{1}{4}$$

ist, eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel dar. Zu allgemeineren Curven übergehend, hebt Möbius (70) hervor, dafs nicht jede Curve n^{ter} Ordnung unter den speciellen enthalten sei, in deren barycentrischem Ausdruck

$$fA + gB + hC$$

f, g, h ganze Functionen n^{ten} Grades einer Veränderlichen sind. Nachdem er dargelegt hat, wie sich in dem barycentrischen Coordinatensystem die singulären Elemente der Curve, ihre unendlich fernen Zweige u. s. w. darstellen, wendet er sich zu den Ausdrücken krummer Linien im Raume. Beschränkt man sich auf den Fall, in welchem die barycentrischen Coordinaten eines laufenden Punktes ganze Functionen n^{ten} Grades eines Parameters sind, so ist schon für $n = 2$ und 3 die Zusammenstellung nicht vollständig. Es entgehen uns die in zwei windschiefe Gerade zerfallenden Curven zweiter Ordnung, die Zusammenstellung von Curve zweiter Ordnung und Gerade zu einer Curve dritter Ordnung. Die kurzen Bemerkungen (96 ff.) aber über die Curve dritter Ordnung sind von wesentlicher Bedeutung. In ihnen enthalten ist die fundamentale Erkenntnis, dafs von einem beliebigen ihrer Punkte aus die Curve durch einen Kegel zweiter Ordnung projicirt wird. Indem Möbius zwei Punkte der Curve zu Ecken des Fundamentaltetraeders, die Tangenten und Schmiegungsebenen dieser Punkte zu weiteren Bestimmungsstücken des Tetraeders macht, gelangt er zu der einfachsten Darstellung des Ausdruckes

$$aA + bvB + cv^2C + dv^3D$$

für eine Raumcurve dritter Ordnung. Nunmehr läfst sich der barycentrische Ausdruck einer Tangente leicht auffinden; ihr Schnittpunkt mit einer beliebigen Schmiegungsebene beschreibt einen Kegelschnitt, welcher die in derselben liegende Tangente der Curve berührt (98). Zum ersten Mal war es hiermit gelungen, der merkwürdigsten Raumcurve, die bisher nur ganz flüchtig von Hachette [X, 2] erwähnt war, eine sehr interessante geometrische Eigenschaft abzugewinnen, einen Ausdruck dafür, dafs sie im Raume sich selbst dual gegenüber steht, ebenso wie in der Ebene der Kegelschnitt. Es folgen (101 ff.) zwei Capitel über die Ausdrücke von Flächen, besonders zweiter Ordnung, und über Coordinaten-Verwandlung.

10. In dem zweiten Abschnitt des Werkes („von den Verwandtschaften der Figuren etc.") giebt Möbius Entwickelungen, die für die Geometrie von grundlegender Bedeutung sind. Zunächst wird die Gleichheit ebener und räumlicher Figuren behandelt, welche besteht, wenn je zwei entsprechende Strecken beider Figuren einander gleich

sind. Besitzen die beiden Figuren je n Punkte, so sind $3n - 6$ Paare entsprechend gleicher Strecken notwendig und hinreichend, um Gleichheit herbeizuführen. Ebene gleiche Figuren können stets zur Deckung gebracht werden, räumliche Figuren hingegen nur dann, wenn sie gleichstimmig congruent sind. Aber wollte man zwei in derselben Ebene befindliche, symmetrisch gleiche Figuren, ohne aus derselben herauszugehen, in einander überführen, so stünde man genau vor derselben Unmöglichkeit, die uns bei räumlichen Figuren entgegentritt. Zur Coincidenz zweier gleicher Figuren $ABCDE\ldots$ und $A'B'C'D'E'\ldots$, bei denen aber entsprechende Punkte auf ungleichnamigen Seiten von ABC und $A'B'C'$ liegen, würde, der Analogie nach zu schliefsen, erforderlich sein, dafs das eine System in einem Raum von vier Dimensionen eine halbe Umdrehung machen könnte. „Da aber", fährt Möbius (140) fort, „ein solcher Raum nicht gedacht werden kann, so ist auch die Coincidenz in diesem Falle unmöglich." Bei zwei ähnlichen Figuren haben irgend zwei Punkte, auf entsprechende Tetraeder, die ihrerseits ähnlich sind, bezogen, gleiche barycentrische Ausdrücke

$$aA + bB + cC + dD \quad \text{und} \quad aA' + bB' + cC' + dD'.$$

Läfst man $ABCD$ und $A'B'C'D'$ beliebige Tetraeder bedeuten, so beziehen sich (150) die obigen barycentrischen Ausdrücke auf entsprechende Punkte affiner Figuren.*) Den Geraden und Ebenen der einen Figur entsprechen Gerade und Ebenen in der anderen. Die Volumina irgend zweier entsprechender Körper stehen in dem gleichen Verhältnis, wie die der Fundamentaltetraeder. Legt man statt derselben irgend zwei andere entsprechende Tetraeder zu Grunde, so bleibt die oben erwähnte Darstellungsform bestehen. In einem späteren Capitel wendet Möbius dies auf Kegelschnitte an. Zwei beliebige Ellipsen können affin so bezogen werden, dafs zwei conjugirten Durchmessern der einen zwei beliebige conjugirte Durchmesser der anderen entsprechen. Da entsprechende Inhalte sich wie die der Ellipsen selbst verhalten, besitzen (173) alle diejenigen Parallelogramme gleichen Inhalt, welche zwei conjugirte Durchmesser einer Ellipse zu Diagonalen haben.**) Nach einem anderen Resultat hat ein

*) Die Affinitätsbeziehung kommt, wie Möbius (147) hervorhebt, bereits bei Euler vor. Vergl.: Introductio in Analysin Infinitimorum, Bd. 2, Cap. 18. Spuren der hierhin gehörigen Anschauungen finden sich bereits bei Clairaut. Vergl.: die auf S. 6** angeführte Abhandlung.

**) Dieser Satz ergiebt sich entschieden einfacher, wenn man die Ellipse auf einen Kreis affin bezieht, am anschaulichsten bei der Parallelprojection. Eine derartige Entwickelung hat, so weit mir bekannt, zuerst Durrande gegeben; vergl.: Durrande, Démonstration géométrique de diverses propriétés de l'ellipse et de l'ellipsoïde, Gerg. Ann., Bd. 12, 1821 u. 1822, S. 223—231. Projicirt man eine Ellipse durch unter sich parallele Strahlen in einen Kreis, so entstehen aus den Parallelogrammen, deren

beliebiges einer Parabel eingeschriebenes Dreieck einen halb so grofsen Inhalt, als das entsprechende umschriebene Dreieck.

11. Das fünfte Capitel liefert in der Behandlung des „Doppelschnittsverhältnisses" Entwickelungen von bedeutender Wichtigkeit. Der Quotient $\frac{AC}{CB}$ nimmt, wenn C auf AB von A über B ins Unendliche und von da aus wieder nach A zurückgeführt wird, alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ an, und zwar wächst diese Gröfse zunächst von 0 bis $+\infty$, springt zu $-\infty$ über und wächst dann wieder bis zu 0. Das „Doppelschnittsverhältniss" $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$ („ratio bissectionalis") von vier Punkten ist nun positiv, wenn C und D in derselben der beidenStrecken AB liegen, negativ, wenn C und D durch die Punkte A und B getrennt werden. Mit Rücksicht auf das so eingeführte Vorzeichen des Doppelverhältnisses*) kann Möbius folgern: „Übrigens begreift man leicht, dafs, wenn von den vier Puncten irgend drei gegeben sind, mit dem Werthe des Doppelschnittsverhältnisses immer auch der vierte gefunden werden kann" (182). Dieser hier so unscheinbar gehaltene Satz bedingte, wie bekannt, die weitere Entwickelung der synthetischen Geometrie. Aus der Untersuchung (184) des Zusammenhanges unter den 24 Doppelverhältnissen, die sich aus vier gegebenen Punkten bilden lassen, entspringt (186) der Wert

$$(D,\ E,\ F,\ G) = \frac{e-g}{d-g} : \frac{e-f}{d-f}$$

des Doppelverhältnisses von vier Punkten D, E, F, G, deren Doppelverhältnisse d, e, f, g gegen drei Punkte A, B, C vorliegen. Mit Hülfe dieser Formel kann man alle diejenigen Doppelverhältnisbeziehungen angeben, welche unter den $\frac{1}{2}n(n-1)$ Ecken eines vollständigen n-Seits bestehen. Um zu zeigen, dafs vier von einem Punkte S ausgehende Strahlen zwei beliebige Gerade in Gruppen $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ von gleichem Doppelverhältnis treffen,

Ecken Endpunkte conjugirter Durchmesser sind, und aus den eingeschriebenen Dreiecken, deren Schwerpunkte in den Mittelpunkt fallen, Quadrate und gleichseitige Dreiecke, welche dem Kreise eingeschrieben sind. Deshalb zeigen die Parallelogramme, andererseits die Dreiecke unter sich gleichen Inhalt, der zugleich der gröfste Inhalt ist, den ein eingeschriebenes Parallelogramm oder Dreieck annehmen kann. Das entsprechende wird für umschriebene Parallelogramme und Dreiecke gezeigt. Durrande thut noch dar, wie man von den Sätzen aus zu den entsprechenden räumlichen gelangt. Übrigens ist es, wie Durrande an anderer Stelle zeigt, ungemein leicht, direct aus den Eigenschaften der conjugirten Durchmesser heraus die Sätze zu erweisen: Durrande, Solution des deux problèmes de géométrie proposés à la page 344 du XI.e volume de ce recueil, Gerg. Ann., Bd. 12, 1821 u. 1822, S. 142—144.

*) Ich werde in der Folge statt Doppelschnittsverhältnis in der Regel Doppelverhältnis schreiben.

werden die Strecken AB, AC, ..., A_1B_1, A_1C_1, ... bezw. durch die Dreiecksinhalte ABS, ACS, ..., A_1B_1S, A_1C_1S, ..., deren Vorzeichen der obigen Regel [XXIII, 6] gemäfs fixirt sind, ersetzt (188). Auf dieses Resultat wird in bekannter Weise das zweite zurückgeführt, nach dem vier von einer Geraden ausgehende Ebenen alle anderen Geraden unter unveränderlichem Doppelverhältnis schneiden. Es lassen sich nunmehr Beziehungen unter den Doppelverhältnissen der Quadrupel auffinden, die aus irgend vier derselben Kante angehörigen Ecken eines n-Flachs gebildet sind.

12. In dem Capitel über geometrische Netze, einem der bedeutendsten des Buches überhaupt, tritt zunächst hervor, wie wichtig es für die Transversalentheorie ist, auf die Vorzeichen der auftretenden Strecken zu achten. Der Ausdruck

$$\frac{A_1B \cdot B_1C \cdot C_1A}{A_1C \cdot B_1A \cdot A_1B},$$

gebildet mit Hülfe der den Geraden BC, CA, AB angehörigen Punkte A_1, B_1, C_1, nimmt den Wert $+1$ an, wenn A_1, B_1, C_1 in einer Geraden liegen, hingegen den Wert -1, wenn A_1A, B_1B, C_1C sich in einem Punkte schneiden (198). Erst hiermit war eine Zweideutigkeit geschwunden, welche bisher schon bei der Anwendung dieser einfachsten Transversalensätze eingetreten war und sich in erhöhtem Mafse bei verwickelteren Darlegungen wiederholen mufste.

Möbius geht sodann (200) zur Definition des Netzes über, das sich aus vier Punkten A, B, C, D einer Ebene bilden läfst. Die ersten Geraden des Netzes sind die Seiten des vollständigen Vierecks $ABCD$; zu den ursprünglichen Netzpunkten treten zunächst die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten hinzu, deren Verbindungslinien wieder dem Netze angehören und auf den Seiten des Vierecks noch drei neue Netzpunkte ausschneiden. Die Gerade, welche diese drei Punkte enthält, fällt ebenfalls in das Netz u. s. f. Überhaupt gehört die Verbindungslinie zweier beliebigen Netzpunkte, welche unter Umständen noch andere schon vorhandene Punkte des Netzes aufnimmt, dem Netze an, und trifft sämtliche andere Geraden des Netzes in Punkten, welche demselben zugerechnet werden. Durch stete Wiederholung dieser Operationen kann die Anzahl der Punkte ins Unbegrenzte gesteigert werden. Ist nämlich

$$aA + bB + cC$$

der barycentrische Ausdruck von D hinsichtlich des Dreiecks ABC, so kann man (203) alle die und nur die Punkte in das Netz aufnehmen, in deren barycentrischen Ausdrücken

$$\varphi aA + \psi bB + \chi cC$$

φ, ψ, χ rationale, oder, was völlig genügt, ganze Zahlen sind. Möbius weist nämlich nach, dafs die Punkte $aA + bB$, $2aA + bB$,

$3aA + bB, \ldots$, welche eine cyklisch-projectivische Punktreihe mit dem einen Doppelpunkte A bilden, sich bei der Netzconstruction auf einfache Weise ergeben. Projicirt man diese Reihe von C aus auf DA, so entstehen die Punkte

$$aA + bB + cC, \quad 2aA + bB + cC, \quad 3aA + bB + cC, \ldots$$

Auf der Verbindungslinie des φ^{ten} dieser Punkte mit B kann man entsprechend Stellen mit den barycentrischen Ausdrücken

$$\varphi aA + bB + cC, \quad \varphi aA + 2bB + cC, \quad \varphi aA + 3bB + cC, \ldots$$

auffinden, und schliefslich führt eine dritte Kette von Operationen zu dem Punkte $\varphi aA + \psi bB + \chi cC$. Nachdem auf ähnliche Weise auch negative Zahlen φ, ψ, χ berücksichtigt sind, kommt Möbius zu dem Nachweis, dafs das Netz sich um jeden Punkt beliebig enge zusammenschliefst. Zwischen irgend zwei Punkten der Geraden AB mit den barycentrischen Ausdrücken $\varphi_1 aA + bB$ und $\varphi_2 aA + bB$ liegen nämlich, da zwischen φ_1 und φ_2 unendlich viele rationale Zahlen eingeschaltet werden können, noch unendlich viele Punkte des Netzes. Also wird die Gerade AB durch die ihr angehörigen Punkte und folglich die Ebene durch die von A, B, C ausgehenden Geraden des Netzes überall dicht überdeckt, womit der Nachweis erbracht ist. Freilich mufs betont werden, dafs die modernen Geometer ganz anders zu dieser Frage stehen, wie Möbius. Die Anschauung, dafs jeder Punkt der Ebene sich durch Angabe seiner Coordinaten — seien es barycentrische oder cartesische — fixiren läfst und dafs der stetigen Veränderung des Punktes stetige Veränderungen seiner Coordinaten entsprechen, wird von Möbius, wie von allen gleichzeitigen Autoren, gleichsam als Axiom, ohne Versuch eines Beweises, hingenommen. Dieses Axiom hat gegenüber der Kritik nicht auf die Dauer Stand halten können; man sucht jetzt gerade die Grundlage für die coordinatenmäfsige Betrachtung der Ebene wie des Raumes zu gewinnen, indem man zunächst nur die Punkte eines bestimmten Netzes mit Coordinaten versieht und sodann die Hypothesen einer scharfen Untersuchung unterzieht, auf Grund deren sich das Netz als überall dicht erweist, und dem Netz nicht direct angehörige Punkte mit Coordinaten versehen werden können.

Ganz entsprechende Entwickelungen lassen sich im Raume durchführen. Besitzt ein Punkt E hinsichtlich eines Tetraeders $ABCD$ den barycentrischen Ausdruck

$$eE \equiv aA + bB + cC + dD,$$

so sind durch eine Netzconstruction von A, B, C, D, E aus alle die und nur die Punkte erreichbar, in deren barycentrischen Ausdrücken

$$\varphi aA + \psi bB + \chi cC + \varrho dD$$

φ, ψ, χ, ϱ rationale, oder, was wiederum genügt, ganze Zahlen sind. Aus ähnlichen Überlegungen, wie sie im Fall der Ebene Platz griffen, folgert Möbius, daſs das Netz überall dicht ist.

13. Hiermit ist der Boden für eine Verwandtschaft geschaffen, die „noch allgemeiner als die der Gleichheit, Ähnlichkeit oder Affinität ist“. Das Wesen dieser Verwandtschaft soll (217) darin bestehen, daſs jedem Punkte ein Punkt „dergestalt entspricht, daſs, wenn man in dem einen Raume eine beliebige Gerade zieht, von allen Puncten, welche von dieser Geraden getroffen werden (collineantur), die entsprechenden Puncte in dem anderen Raume gleichfalls durch eine Gerade verbunden werden können“. Sind vier Paare homologer Punkte AA', BB', CC', DD' zweier Ebenen gegeben, und liegen keine drei der Gruppe $ABCD$ oder $A'B'C'D'$ angehörige Punkte in einer Geraden, so werden offenbar auf Grund der Definition entsprechende Elemente der beiden Netze einander zugewiesen, die sich aus den beiden Punktgruppen ableiten lassen. Die collineare Beziehung der Ebenen ist eindeutig bestimmt. Entsprechende Punkte besitzen die barycentrischen Ausdrücke

$$\varphi aA + \psi bB + \chi cC \quad \text{und} \quad \varphi a'A' + \psi b'B' + \chi c'C',$$

wobei die Constanten a, b, c und a', b', c' derart zu bestimmen sind, daſs

$$D \equiv aA + bB + cC \qquad D' \equiv a'A' + b'B' + c'C'$$

ist (219). Da das Doppelverhältnis von irgend vier einer Geraden angehörigen Netzpunkten nur von der Art ihrer Construction, nicht von der Lage der Grundpunkte gegen einander abhängt, so haben je zwei entsprechende derartige Punktgruppen und folglich überhaupt zwei Geraden angehörige entsprechende Punktquadrupel das gleiche Doppelverhältnis. Bezieht man dies auf A, B und die Schnittpunkte ihrer Verbindungslinie mit CD und EF, so ist offenbar das aus Dreiecksinhalten gebildete Verhältnis

$$\frac{ACD}{CDB} : \frac{AEF}{EFB}$$

gleich dem bei den correspondirenden sechs Punkten entsprechend gebildeten Ausdruck (221). In der collinearen Verwandtschaft entspricht der unendlich fernen Geraden der einen Ebene eine im Endlichen liegende Gerade der anderen; verschwindet die Summe der Coefficienten φa, ψb, χc, so ist die der Coefficienten $\varphi a'$, $\psi b'$, $\chi c'$ im allgemeinen von Null verschieden. Während affin immer nur gleichartige Kegelschnitte bezogen werden können, kann jede Hyperbel einer Ellipse oder Parabel collinear entsprechen. Die analoge Entwickelung im Raume wird durchlaufen, Möbius hebt hier hervor, daſs nicht sämtliche Oberflächen zweiter Ordnung einander collinear sind, man habe in dieser Hinsicht zwei Arten von Oberflächen — geradlinige und nicht geradlinige — zu unterscheiden (224).

Collineare Punktreihen können stets so verschoben werden, daſs sie Schnitte eines und desselben Strahlenbüschels werden. Eine analoge Darstellung ist auch bei collinearen Ebenen möglich. Die collineare Beziehung sei durch die beiden Punktgruppen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ festgelegt. Alsdann giebt es in der ersten Ebene zwei unter sich parallele Gerade u, v, auf denen das vollständige Viereck $ABCD$ dieselben Punktreihen ausschneidet, wie $A'B'C'D'$ auf den entsprechenden Geraden u', v'. Paſst man nun entweder die Punktreihen auf u, u' oder die auf v, v' aneinander, so laufen, welchen Winkel auch die beiden Ebenen miteinander bilden, die vier Geraden AA', BB', CC', DD', wie alle Verbindungslinien homologer Punkte, an einer Stelle S zusammen (230). Verschiedene Begründungen dieses bei Möbius aus einer eleganten Rechnung entspringenden Resultates sind von Magnus, Chasles, Seydewitz gegeben worden [XXXI, 6]. Um zwei Räume $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ collinear zu beziehen, werden auf die Ebenenbüschel mit den Axen BC, CA, AB diejenigen mit den Axen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ so projectivisch bezogen, daſs jedesmal die Ebenen ABC und $A'B'C'$ einander entsprechen, überdies D und D', E und E' homologe Tripel bestimmen. Um zu einem Punkte F den homologen F' zu finden, braucht man nur die zu BCF, CAF, ABF homologen Ebenen zum Schnitt zu bringen (231). Zum erstenmale tritt also hier die Lösung auf, welche sich in der synthetischen Geometrie für die Aufgabe bietet. Ich möchte bei dieser Gelegenheit eine Bemerkung einfügen. Bei der Definition der collinearen Beziehung begnügen sich manche Lehrbücher noch jetzt mit der Forderung, daſs jedem Punkte und jeder Geraden der einen Mannigfaltigkeit ein Punkt und eine Gerade der anderen entsprechen soll; aus Möbius' Netzbetrachtung wird geschlossen, daſs entsprechende einförmige Gebilde projectivisch auf einander bezogen sind. Läſst sich diese Methode bei der Beschränkung auf reelle Elemente aufrecht erhalten, so erweist sie sich sofort als unbrauchbar, sobald man imaginäre Elemente zuläſst. Nach der Definition würde z. B. eine collineare Beziehung entstehen, wenn man je zwei conjugirt-imaginäre Punkte als entsprechend betrachtet. Aus diesem Grunde ist es am besten, die Forderung, daſs einförmige entsprechende Gebilde einander projectivisch entsprechen sollen, in die Definition aufzunehmen. Als einzige Art, zwei Räume collinear so zu beziehen, daſs $ABCDE$ und $A'B'C'D'E'$ entsprechende Gruppen werden, ergiebt sich sofort die angeführte Methode von Möbius, und es läſst sich überaus leicht zeigen, daſs alle übrigen Forderungen der Definition erfüllt sind.

14. Das letzte Capitel des zweiten Abschnitts handelt über den abgekürzten barycentrischen Calcül. Ist eine Eigenschaft der Ebene projectivischer Natur, besteht sie fort, wenn man die Ebene einer beliebigen collinearen Umformung unterzieht, so kann man von vorne

herein eine beliebige besonders geeignete Gerade ins Unendliche entfernen. Beispielsweise kann man dem vierten Grundpunkt D eines Netzes den barycentrischen Ausdruck geben:

$$A + B + C + D = 0.$$

Die Kreuzungspunkte A', B', C' gegenüberliegender Seiten des Vierecks $ABCD$ besitzen dann die Ausdrücke

$$B + C = -A - D = A'; \quad C + A = -B - D = B';$$
$$A + B = -C - D = C'.$$

Die Punkte, in denen $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$ die Seiten BC, CA, AB treffen, sind

$$B - C = A''; \quad C - A = B''; \quad A - B = C'',$$

liegen deshalb augenscheinlich in einer Geraden, etc.

15. Der dritte Abschnitt des Werkes ist der Entwickelung von Eigenschaften der Kegelschnitte gewidmet. Von demselben mufs ganz besonders betont werden, dafs häufig die Symmetrie um sehr unbedeutender Vorteile willen aufgeopfert wird. Der allgemeine Ausdruck

$$a(v - \beta)(v - \gamma)A + b(v - \gamma)(v - \alpha)B + c(v - \alpha)(v - \beta)C$$

eines dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kegelschnitts weicht z. B. (249) sofort der ganz unsymmetrischen Form

$$fxA - gx(1 - x)B + h(1 - x)C.$$

Je nachdem $fx - gx(1 - x) + h(1 - x)$ für reelle Werte von x verschwindet oder nicht, hat man es mit einer Hyperbel oder einer Ellipse zu thun. Nehmen die Coordinaten für einen Wert von x zu a, b, c proportionale Werte an, so geht der Kegelschnitt durch

$$D \equiv aA + bB + cC$$

hindurch und beschreibt, wenn der Wert von x wechselt, den Büschel mit den Grundpunkten A, B, C, D. Möbius ermittelt die beiden Parabeln des Büschels und stellt (255) das Theorem auf: „Fünf Punkte bestimmen eine Ellipse nur dann, wenn von den beiden Parabeln, welche durch vier der Punkte sich legen lassen, die eine den fünften Punkt einschliefst, die andere ihn ausschliefst.“ Man kann deshalb $\sqrt{\infty}$ gegen 1 wetten, dafs fünf gegebene Punkte einer Hyperbel angehören. Ganz entsprechend erblickt Möbius (258) eine Vereinfachung darin, statt des allgemeinen Ausdrucks

$$a(v - \alpha)^2 A + b(v - \beta)^2 B + c(v - \gamma)^2 C$$

eines Kegelschnittes, welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt, den specielleren

$$i(1 - y)^2 A + kB + ly^2 C$$

einzuführen. Das gegebene Tangentendreieck liegt mit dem der Berührungspunkte hinsichtlich des Punktes $D \equiv iA + kB + lC$, der den Kegelschnitt völlig charakterisirt, perspectivisch. Je nachdem $kl + li + ik$ positiv oder negativ ist oder endlich verschwindet, hat man es mit einer Ellipse, einer Hyperbel oder einer Parabel zu thun. Wird D über die dem Dreieck ABC umschriebene Ellipse geführt, welche den Schwerpunkt desselben zum Mittelpunkt hat, so charakterisirt er nach und nach alle Parabeln, welche die Seiten des Dreiecks berühren. Je nachdem D innerhalb oder aufserhalb dieser Ellipse liegt, stellt er eine Ellipse oder eine Hyperbel dar (260). Allgemeiner ist (264) folgende Regel. „Bei jedem einer Ellipse umschriebenen vollständigen Fünfseite trennt ine beliebige Seite, jenachdem sie die durch die vier anderen Seiten bestimmte Parabel reell schneidet oder nicht, die nicht auf ihr liegenden Ecken in zwei Gruppen von gerader oder ungerader Punktzahl. Für die Hyperbel sind die Worte „gerade“ und „ungerade“ zu vertauschen.“

Die Polareigenschaften des Kegelschnittes ergeben sich mit Hülfe des abgekürzten barycentrischen Calcüls, also durch collineare Umbildung, aus den Eigenschaften der conjugirten Durchmesser. Für das Entsprechen von Punkten und Geraden hinsichtlich eines Kegelschnittes, das sich so ergiebt, bietet die Herleitung des Satzes von Brianchon aus dem von Pascal ein Beispiel. An früherer Stelle [II, 12] ist bereits angedeutet worden, auf welche Art der letztere Satz erwiesen wird. Im letzten Capitel seines Werkes zeigt Möbius wie das Entsprechen von Punkten und Geraden in der Ebene unabhängig von einem vermittelnden Kegelschnitt hergestellt werden kann. Bereits an anderer Stelle [XX, 5] ist die bedeutende Wichtigkeit dieser Entwickelung hervorgehoben worden. Sind zu vier Punkten einer Ebene die entsprechenden Geraden einer anderen gegeben, so folgt aus einer Netzconstruction, dafs die Verwandtschaft eindeutig bestimmt ist.

16. Endlich wird Möbius, wie er sagt, durch den noch freibleibenden Teil des letzten Bogens veranlafst, eine sich ihm darbietende Bemerkung hinzuzufügen [vergl.: XVI, 2]. Vier einem Büschel angehörende Strahlen a, b, c, d, welche mit einem fünften Strahle desselben die Winkel α, β, γ, δ bilden, schneiden eine beliebige Gerade der Ebene des Büschels in einer Gruppe von dem Doppelverhältnis

$$(a,\ d,\ b,\ c) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\beta-\delta)} : \frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\sin(\gamma-\delta)}.$$

Ist z. B.

$$\measuredangle(ab) = \measuredangle(bc) = \measuredangle(cd) = \mu,$$

so hat man

$$(a, d, b, c) = \frac{1}{4}\sec^2\mu.$$

Werden z. B. vier aufeinander folgende Stundenlinien einer Sonnenuhr von einer beliebigen Geraden in den Punkten A, B, C, D geschnitten, so ist

$$\frac{AB}{BD} : \frac{AC}{CD} = \frac{1}{4} (\sec 15^0)^2.$$

17. Mit dem barycentrischen Calcül in nahem Zusammenhange stehen mehrere kleinere Arbeiten von Möbius, die ich deshalb sogleich besprechen will. Bei einigen von ihnen handelt es sich um die Bestimmung des Inhalts eines Fünfecks, wenn die Inhalte von fünf aus Ecken des Polygons gebildeten Dreiecken gegeben sind*), eine Aufgabe, die im Barycentrischen Calcül ausführlich erörtert wird (165ff). In einer anderen Arbeit**) handelt es sich um die Bestimmung des Inhaltes eines Kreispolygons, dessen Seiten gegeben sind. Von Interesse ist an diesen Bestrebungen, dafs auch für ein überschlagenes Polygon der Inhaltsbegriff unzweideutig definirt wird. Nachdem man sich über das dem Dreiecksinhalt ABC innewohnende Vorzeichen in dem oben angedeuteten Sinne entschieden hat, wird bei einem geschlossenen Polygon $ABCDE\ldots$ die Summe $PAB + PBC + PCD + PDE + \cdots$ von der Lage des Punktes P unabhängig und stellt somit den Inhalt des Polygons dar. Für mein Referat unvergleichlich wichtiger ist die einfache Construction zweier in einem Nullsystem reciproken Tetraeder, von denen jedes dem anderen umschrieben ist.***) In zwei Ebenen construire man zwei vollständige Vierecke, welche auf der Schnittlinie dieselbe Involution ausschneiden, so jedoch, dafs je drei von einer Ecke ausgehenden Seiten des einen Vierecks im anderen die Seiten eines Dreiecks entsprechen. Stellt man nun irgend ein Dreieck des ersten Vierecks mit dem ihm so entsprechenden Punkte des zweiten zu einem, die übrig bleibenden Punkte zu einem zweiten Tetraeder zusammen, so stehen dieselben in der verlangten Beziehung.

18. In einer anderen Arbeit†) verfolgt Möbius offenbar den

---

*) Möbius, Zwei geometrische Aufgaben. Anhang zu: „Beobachtungen auf der Königl. Universitäts-Sternwarte zu Leipzig etc.", Leipzig 1823, S. 57—64 (Ges. W., Bd. 1, S. 389—398); Schreiben des Herrn Professor Möbius an den Herausgeber der Astronomischen Nachrichten (Leipzig, 1824), Astronomische Nachrichten von Schumacher, Bd. 3, 1825, S. 131—136 (Ges. W., Bd. 1, S. 399—404).

**) Möbius, Ueber die Gleichungen, mittelst welcher aus den Seiten eines in einen Kreis zu beschreibenden Vielecks der Halbmesser des Kreises und die Fläche des Vielecks gefunden werden, Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 5—34 (Ges. W., Bd. 1, S. 405—438).

***) Möbius, Kann von zwei dreiseitigen Pyramiden eine jede in Bezug auf die andere um- und eingeschrieben zugleich heifsen?, Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 273—278 (Ges. W., Bd. 1, S. 439—446).

†) Möbius, Von den metrischen Relationen im Gebiete der Lineal-Geometrie, Crelle's Journ., Bd. 4, 1829, S. 101—130 (Ges. W., Bd. 1, S. 447—480).

Zweck, einige im Barycentrischen Calcül enthaltene Entwickelungen dem Verständnis durch Anwendung cartesischer Coordinaten näher zu bringen. Sind t, u und x, y Coordinaten entsprechender Punkte zweier Ebenen, welche in eindeutiger Beziehung stehen, so walten zwei Gleichungen von der Form

$$t = F(x, y), \qquad u = G(x, y)$$

ob. Soll nun einer beliebigen Geraden der (t, u)-Ebene eine Gerade der (x, y)-Ebene entsprechen, so sind t, u lineare gebrochene Functionen von x, y mit gleichem Nenner:

$$t = \frac{ax + by + c}{x + my + n}, \qquad u = \frac{fx + gy + h}{x + my + n}.$$

Allen Punkten der Geraden $x + my + n = 0$ entsprechen unendlich ferne Punkte der (t, u)-Ebene. Will man nur zwei entsprechende Gerade der beiden Ebenen untersuchen, so kann man sie mit der x- bezw. der t-Axe zusammenfallen lassen, also die Beziehungen zu Grunde legen

$$t = \frac{ax + c}{x + n}, \quad y = 0, \quad u = 0.$$

Für zwei homologe Quadrupel $tt't''t'''$ und $xx'x''x'''$ ist dann

$$\frac{t' - t}{t'' - t'} : \frac{t''' - t}{t'' - t'''} = \frac{x' - x}{x'' - x'} : \frac{x''' - x}{x'' - x'''}.$$

Sind also $ABCD$ und $A'B'C'D'$ zwei entsprechende, Geraden angehörige Gruppen, so besteht die Doppelverhältnisgleichung:

$$\frac{AB}{BC} : \frac{AD}{DC} = \frac{A'B'}{B'C'} : \frac{A'D'}{D'C'}.$$

Legt man nun zwei entsprechende Punkte dieser Gruppen, z. B. A und A', über einander, so laufen die übrigen Verbindungslinien entsprechender Punkte, BB', CC', DD', an einer Stelle zusammen. Man kann nämlich die Ebene eines Strahlenbüschels und zweier zu ihm perspectivischen Punktreihen offenbar so collinear umformen, dafs dem Strahlenbüschel ein Büschel paralleler Strahlen entspricht; auf zwei Schnitte desselben werden die Punktreihen, wie entwickelt, unter Erhaltung des Doppelverhältnisses bezogen. Da nun vier parallele Strahlen augenscheinlich zwei beliebige Gerade unter gleichem Doppelverhältnis treffen, so gilt dasselbe von vier Strahlen eines beliebigen Strahlenbüschels. Als eine leichte Umformung des Satzes vom Doppelverhältnis erweist sich der Satz, dafs jedes „Vieleckschnittsverhältniss“

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_1} \cdot \frac{A_2B_2}{A_3B_2} \cdot \frac{A_3B_3}{A_4B_3} \cdot \ldots \cdot \frac{A_nB_n}{A_1B_n},$$

bei welchem die Punkte B_1, B_2, ..., B_n den Seiten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$, ..., $A_n A_1$ eines n-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_n$ angehören, bei einer collinearen Transformation seinen Wert beibehält. Poncelet hatte bereits bemerkt, dafs der obige Ausdruck, wenn man die Figur durch eine gleichartige, zu ihr perspectivische ersetzt, denselben Wert beibehält [XVI, 2].

19. Wie aus einer Geraden stets wieder eine Gerade bei der collinearen Transformation sich ergiebt, so entsteht aus einer Curve stets eine solche gleicher Ordnung, aus einem Kegelschnitt stets ein Kegelschnitt. Einem Kegelschnitt, welcher die Punkte A, B, C enthält und die Geraden AD und BD berührt, entspricht ein Kegelschnitt, welcher A', B', C' enthält und $A'D'$, $B'D'$ berührt, wobei die collineare Beziehung wieder durch die Quadrupel $ABCD$ und $A'B'C'D'$ eindeutig gegeben ist. Zwei Kegelschnitte können deshalb auf eine einzige Art so collinear bezogen werden, dafs drei beliebigen Punkten A, B, C des einen drei beliebig gewählte Punkte A', B', C' des anderen entsprechen. Infolgedessen kann die Lage eines jeden vierten Punktes des ersten Kegelschnittes gegen A, B, C durch eine numerische Constante fixirt werden. Legt man nämlich in den drei Punkten Tangenten, verbindet ihre Schnittpunkte mit den gegebenen Punkten, sucht die Schnittpunkte dieser Geraden mit einander und dem Kegelschnitt auf, schneidet man die Verbindungslinien und Polaren der so gewonnenen Punkte, wo dies möglich ist, mit dem Kegelschnitt, und fährt so ohne Ende fort, so ist jedes Vielecksschnittsverhältnis in dem so entstandenen Netze eine rein numerische Constante, welche von der Art der Construction, aber nicht von der gegenseitigen Lage der drei Grundpunkte des Netzes abhängt. Möbius erörtert dann, von wie vielen unabhängigen Gröfsen die Vielecksschnitte abhängen, welche bei einer analogen Construction aus n Punkten eines Kegelschnittes entstehen. Wie man sieht, steht diese Entwickelung im innigsten Zusammenhange mit der Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Strahlenbüschel. Die Vielecksschnittsverhältnisse, welche von vier Punkten des Kegelschnittes in der beschriebenen Weise abhängen, sind allein durch das Doppelverhältnis derselben bestimmt. Freilich wird diese Quelle des Satzes bei Möbius nicht klar hervorgehoben.

In einer letzten in diese Gruppe gehörigen Abhandlung*) bespricht Möbius einen Specialfall der dualen Form der Aufgabe des Pappus [XVIII, 4—7].

*) Möbius, Barycentrische Lösung der Aufgabe des Herrn Th. Clausen in des IV. Bandes 4. Hefte, Seite 391. u. s. w., Crelle's Journ., Bd. 5, 1830, S. 102—106 (Ges. W., Bd. 1, S. 481—488).

Dritter Abschnitt.

Untersuchungen über algebraische Curven und Flächen.

XXIV. Anwendungen der Transversalen-Theorie.

1. Wesentlich nach zwei verschiedenen Richtungen gehen die ersten Versuche, die Fülle der von den Kegelschnitten her bekannten Eigenschaften auf algebraische Curven auszudehnen. Die einen befassen sich mit der Anzahl der Punkte, die zur Bestimmung einer Curve n^{ter} Ordnung nötig sind, die sie andererseits mit einer anderen Curve m^{ter} Ordnung gemein hat. Diesen Bestrebungen setzt zunächst das schon bei Maclaurin auftretende Cramer'sche Paradoxon ein Ziel, dessen Überwindung mich später beschäftigen wird. Einen wirklichen Einblick in die Theorie der Curven aber verschaffte man sich zunächst mit Hülfe von Transversalenbetrachtungen. Hierzu hatte Newton, wie oben bemerkt wurde*), den ersten Anstofs gegeben. Zwei Sätze, die Newton allerdings nur für Curven C_3 dritter Ordnung aufgestellt hatte, gestatten ohne weiteres eine Verallgemeinerung auf Curven C_n n^{ter} Ordnung und lauten dann: „Schneiden zwei von einem Punkte S ausgehende Strahlen eine Curve C_n in den Gruppen $A_1 A_2 \dots A_n$ und $B_1 B_2 \dots B_n$, so ist die Gröfse

$$\frac{SA_1 SA_2 \dots SA_n}{SB_1 SB_2 \dots SB_n}$$

unveränderlich, wenn man die Geraden sich selbst parallel bewegt". Der specielle auf den Kegelschnitt bezügliche Fall ist der für die gesamte antike Geometrie so wichtige Potenzsatz des Apollonius. Nach einem zweiten Lehrsatze von Newton beschreibt der Schwerpunkt der Punktgruppe, die eine sich selbst parallel bewegte Gerade mit einer Curve C_n gemein hat, eine Gerade; der so erhaltene Durchmesser ist für alle diejenigen Curven der gleiche, welche die gegebene Curve in ihren unendlich fernen Punkten berühren, und kann deshalb mit Hülfe ihrer Asymptoten allein construirt werden. Beide Sätze sind bekanntlich — bereits Stirling**) hat eine derartige Betrachtung durchgeführt — höchst einfach aus der geometrischen Bedeutung abzuleiten, welche die Coefficienten einer Gleichung n^{ten} Grades annehmen, wenn man die Wurzeln derselben als Entfernungen von n Punkten einer Geraden von einem festen

*) Vergl. a. a. O. S. 5†††(Propp. 3 u. 6).
**) Vergl. a. a. O. S. 6* (Propp. 10—12).

Anfangspunkt definirt. Ordnet man die Gleichung der Curve nach Potenzen von x in der Form:

$$f_0 \cdot x^n + f_1(y) \cdot x^{n-1} + f_2(y) \cdot x^{n-2} + \cdots + f_{n-1}(y) \cdot x + f_n(y) = 0,$$

bezeichnet mit $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und O die Schnittpunkte einer im Abstande y zur x-Axe gezogenen Parallelen mit der Curve und der y-Axe, so ergeben sich die Formeln:

$$\frac{f_1(y)}{f_0} = -\sum_{k \geqq 1}^{n \geqq k} OP_k, \qquad \frac{f_2(y)}{f_0} = \sum_{k > l \geqq 1}^{n \geqq k > l}\sum OP_k OP_l, \cdots,$$

$$\frac{f_n(y)}{f_0} = (-1)^n OP_1 OP_2 \cdots OP_n \cdot$$

Für den Schwerpunkt P der Gruppe $P_1 P_2 \ldots P_n$ besteht also die Beziehung:

$$OP = -\frac{f_1(y)}{nf_0} = \frac{1}{n}(OP_1 + OP_2 + \cdots + OP_n),$$

und er beschreibt deshalb Newton's Satz gemäfs die gerade Linie

$$nf_0 \cdot x + f_1(y) = 0.$$

Zu diesem Durchmesser gesellt sich eine ganze Reihe von „diamètres curvilignes", wie Cramer*) zuerst gezeigt hat. Ihre Gleichungen sind

$$nf_0 \cdot x + f_1(y) = 0$$

$$\tfrac{1}{2} n(n-1) f_0 \cdot x^2 + (n-1) f_1(y) \cdot x + f_2(y) = 0,$$

$$\tfrac{1}{6} n(n-1)(n-2) f_0 \cdot x^3 + \tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) f_1(y) \cdot x^2 + (n-2) f_2(y) \cdot x + f_3(y) = 0,$$

. . . .

Für die Schnittpunkte dieser Curven mit der erwähnten Parallelen zur x-Axe bestehen die Entfernungsgleichungen:

$$\sum_{k \geqq 1}^{n \geqq k} PP_k = 0, \quad \sum_{k > l \geqq 1}^{n \geqq k > l}\sum PP_k PP_l = 0, \quad \sum_{k > l > m \geqq 1}^{n \geqq k > l > m}\sum\sum PP_k PP_l PP_m = 0, \cdots.$$

Trifft nun die y-Axe die gegebene Curve in den Punkten $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, so ist:

$$f_n(y) = g_0 y^n + g_1 y^{n-1} + \cdots + g_n = (-1)^n g_0 OQ_1 OQ_2 \cdots OQ_n;$$

man erhält die Formel:

$$\frac{OP_1 OP_2 \ldots OP_n}{OQ_1 OQ_2 \ldots OQ_n} = \frac{g_0}{f_0}.$$

*) Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750, Cap. 6.

Bezieht man diese Gleichung auf den Coordinaten-Anfangspunkt und bemerkt, dafs bei beliebiger Parallelverschiebung des Coordinatensystems g_0 und f_0 unverändert bleiben, so wird der Newton'sche Potenzsatz offenbar evident.

2. Der einer beliebigen Richtung zugehörige Durchmesser ist offenbar nichts anderes, als die Polargerade des durch die parallelen Strahlen gegebenen unendlich fernen Punktes. Die Entwickelung Cramer's ergiebt somit die ganze Reihe der successiven Polaren dieses Punktes. Bekanntlich kann man auf ganz ähnliche Weise die Polaren eines beliebigen Punktes definiren. Die Einführung der Polargeraden geht bis auf Cotes*) zurück. Wird die Gerade, welche mit einer Curve C_n die Punktgruppe $P_1 P_2 \dots P_n$ gemein hat, um den Punkt O gedreht, so beschreibt nach dem Theorem von Cotes der aus der Beziehung

$$\frac{n}{OP} = \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} + \cdots + \frac{1}{OP_n}$$

entspringende Punkt P eine gerade Linie. In der That, ordnet man die Gleichung der Curve nach Gliedern gleicher Dimension in der Form

$$f_n(x, y) + f_{n-1}(x, y) + f_{n-2}(x, y) + \cdots + f_0 = 0,$$

so erhält man ihre Schnittpunkte mit einer beliebigen vom Anfangspunkt ausgehenden Geraden

$$x = \alpha r, \quad y = \beta r$$

aus der Gleichung

$$r^n f_n(\alpha,\beta) + r^{n-1} f_{n-1}(\alpha,\beta) + r^{n-2} f_{n-2}(\alpha,\beta) + \cdots + r f_1(\alpha,\beta) + f_0 = 0,$$

die Wurzeln $r_1, r_2, \dots, r_n$ oder $OP_1, OP_2, \dots, OP_n$ dieser Gleichung genügen der Beziehung:

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n} = -\frac{f_1(\alpha, \beta)}{f_0}.$$

Für den oben definirten harmonischen Mittelpunkt P der Gruppe $P_1 P_2 \dots P_n$ besteht nun die Gleichung:

$$\frac{n}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \cdots + \frac{1}{r_n};$$

er durchläuft deshalb die Gerade:

$$n f_0 + f_1(x,y) = 0.$$

Auf die soeben angedeutete Art hat Maclaurin**) das Theorem erwiesen (§§ 31, 32), dasselbe aber auch andererseits aus Newton's

*) Vergl. S. 6**†.
**) Vergl. a. a. O. S. 6*†.

Potenzsatz abgeleitet. Aus demselben ergiebt sich durch eine Fluxionsbetrachtung (§ 9) das Theorem: „Trifft eine Gerade eine Curve C_n in den Punkten A, B, C, ..., schneidet eine zweite Gerade die Curve selbst in den Punkten a, b, c, ..., die in A, B, C, ... gezogenen Tangenten in K, L, M, ..., endlich die erste Gerade in P, so ist

$$\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \cdots = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{Pb} + \frac{1}{Pc} + \cdots \text{“}$$

Dreht man also die zweite Gerade um den Punkt P, so beschreiben die harmonischen Mittelpunkte der beiden Gruppen $abc\ldots$ und $KLM\ldots$ dieselbe Curve (§ 27). In ihrer letzteren Eigenschaft ist dieselbe durch einen Schluſs von $n-1$ auf n sofort als Gerade zu erkennen, denn die Relation

$$\frac{1}{PK'} = \frac{1}{PK} + \frac{1}{PL},$$

vermöge deren man in $\frac{1}{PK} + \frac{1}{PL} + \frac{1}{PM} + \cdots$ K und L durch einen Punkt K' ersetzen kann, stellt eine Gerade dar, parallel derjenigen, welche die Punktepaare KL von P harmonisch trennt.

3. Von den Folgerungen, die Maclaurin aus dem Theorem zieht, sind einige auf Kegelschnitte bezügliche schon bei früherer Gelegenheit hervorgetreten [III, 8]. Bei Curven C_3 ergiebt sich zunächst das wichtige Theorem von der Satellite, sobald man in dem obigen Hülfssatze K und L mit a und b zusammenfallen läſst. Die Relation

$$\frac{1}{PM} = \frac{1}{Pc}$$

zeigt dann, daſs auch M und c identisch sind, so daſs drei Tangenten, welche die Curve C_3 in ihren Schnittpunkten mit einer Geraden berühren, derselben nochmals in drei Punkten begegnen, die in gerader Linie liegen (§ 57). Fallen die beiden Punkte a und b zusammen, so geht die Satellite in eine Tangente über, die sich mit derjenigen des Punktes c auf der Curve trifft. Nach einem Specialfalle dieses Theorems liegen die Berührungspunkte der drei von einem Wendepunkte von C_3 ausgehenden Tangenten auf einer Geraden (§ 62), dieselbe trennt alle diejenigen Punktepaare der Curve, die mit dem Wendepunkte auf Geraden liegen, von ihm harmonisch (§ 65). Im § 68 folgert Maclaurin aus dem Satze von der Satellite auf die noch jetzt übliche Art, daſs die Verbindungslinie zweier Wendepunkte einen dritten Wendepunkt mit derselben gemein hat. Die Verbindungslinien zweier Punktepaare der Curve, deren Tangenten in einem fünften Curvenpunkte zusammenlaufen, schneiden sich auf der Curve (§ 63). Aus drei Punkten, deren Tangenten einen beliebigen Curvenpunkt enthalten, kann man nach diesem Satze einen vierten Punkt derselben Art ableiten. Hieraus lasse sich, fügt

Maclaurin (§ 64) bei, schon indirect schliefsen, dafs ein Punkt der Curve nicht mehr als vier Tangenten aussendet. Directer folgt dies aus einem im § 74 aufgestellten Theorem. Hiernach trennt jede Gerade, die in zwei Punkten F und G mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt A die Curve trifft, mit einer zweiten Geraden zusammen alle die Punktepaare der Curve harmonisch, deren Verbindungslinien A enthalten. Diese Gerade schneidet die erste in einem Punkte H der Curve und enthält überdies die Berührungspunkte aller Tangenten, die aufser AF und AG durch A hindurchgehen; ihre Anzahl ist mithin nicht gröfser als zwei. In diesem Hülfstheorem ist, wie man sieht, die Erzeugung der Curve durch projectivische Strahleninvolutionen vorgebildet. Im § 83 werden die zwölf Geraden eingeführt, deren gemeinsame Satellite eine gegebene Secante ABC ist, es wird (§ 84) geschlossen, dafs zwei Punkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt von einem beliebigen Curvenpunkt aus wieder in zwei Punkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt projicirt werden. Gehen zwei solche Punktepaare FG und KL auf diese Weise auseinander hervor, so dafs FK und GL in einem Curvenpunkte P sich schneiden, so laufen auch FL und GK in einem Punkte Q der Curve zusammen; und P und Q besitzen einen gemeinsamen Tangentialpunkt A, welcher mit denen B und C der Punktepaare FG und KL in einer Geraden liegt. Jedesmal das letzte Seitenpaar eines vollständigen Vierecks, dessen beide anderen Seitenpaare mit zweien dieser Tangentenpaare zusammenfallen, schneidet die Berührungspunkte des dritten Tangentenpaares aus (§ 90 ff.). Den Abschlufs von Maclaurin's Entwickelung bilden Sätze über die Krümmungskreise der algebraischen Curven.

4. Eine Fortsetzung fanden diese Bestrebungen Maclaurin's in einer Arbeit von Poncelet*). Projicirt man n auf einer Geraden liegende Punkte A, B, C, ... und deren Schwerpunkt S auf eine zweite Gerade in die Punkte A_1, B_1, $C_1, \ldots$, S_1, und sind F und G_1 die Fluchtpunkte der so entstehenden projectivischen Punktreihen, so ist bekanntlich

$$nFS = FA + FB + FC + \cdots,$$

und wegen der Fluchtpunktbeziehung

$$FS \cdot G_1S_1 = FA \cdot G_1A_1 = FB \cdot G_1B_1 = \cdots$$

*) Poncelet, Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques. Pour faire suite au traité des propriétés projectives etc., Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 213—272. Die Arbeit ist unter etwas verändertem Titel in dem Werke veröffentlicht: Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures, Bd. 2, Paris 1866 (Sect. 1, S. 1—56). Auch dieser zweite Band trägt die Bezeichnung „seconde édition", die eigentlich nur dem ersten zukommt. Ein Bericht über die 1824 vor der Pariser Akademie verlesene Schrift wurde 1826 von Cauchy verfafst: Rapport à l'académie royale des sciences, par M. Cauchy; Sur un mémoire etc., Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 349—360.

ergiebt sich die Relation:

$$\frac{n}{G_1 S_1} = \frac{1}{G_1 A_1} + \frac{1}{G_1 B_1} + \frac{1}{G_1 C_1} + \cdots$$

Es leuchtet ein, dafs für den so definirten harmonischen Mittelpunkt S_1 der Gruppe $A_1 B_1 C_1 \ldots$ hinsichtlich G_1 („centre des moyennes harmoniques") sich mannigfache Gesetze aus den Schwerpunkteigenschaften ableiten lassen werden; n beliebige Gerade einer Ebene α treffen z. B. eine sich selbst parallel bewegte Gerade von α in einer Punktgruppe, deren Schwerpunkt eine Gerade beschreibt. Projicirt man die Figur auf eine zweite Ebene, so entsteht der Satz: „n Gerade einer Ebene treffen einen um den Punkt O_1 sich drehenden Strahl derselben in einer Punktgruppe, deren zu O_1 gehöriger harmonischer Mittelpunkt eine Gerade (l_1) beschreibt." Gehen die gegebenen Geraden von einem Centrum S aus, so geht auch l_1 durch S und hängt in seiner Lage nur von der Verbindungslinie $O_1 S$ oder l ab. Bedenkt man, dafs bei der Projection einer Ebene auf die andere dem unendlich fernen Gebilde der einen eine Gerade der anderen entspricht, so erhält man den Satz: „Projicirt man n beliebige Punkte einer Ebene von allen Punkten einer Geraden l aus und sucht für jede so entstehende Strahlengruppe die l in der beschriebenen Art zugeordnete Gerade l_1 auf, so dreht sich dieselbe um einen bestimmten Punkt, den harmonischen Mittelpunkt („centre des moyennes harmoniques") von l in Bezug auf die Gruppe von n Punkten." (S. 31.) Poncelet's Arbeit enthält übrigens entsprechende Ketten von Schlüssen für den Raum.

5. Das eben angeführte Resultat Poncelet's kann als der erste Anfang zu einer Polarentheorie der Curven $\mathfrak{K}_n$ n^{ter} Klasse betrachtet werden. Das aus den n gegebenen Punkten zusammengesetzte Gebilde $\mathfrak{K}_n$ hat als Polarpunkt hinsichtlich l eben jenen oben betrachteten harmonischen Mittelpunkt. Um die Theorie auf allgemeine Curven $\mathfrak{K}_n$ auszudehnen, kann man, wie es Chasles*) in einer hierher gehörigen Arbeit thut, von dem Newton'schen Durchmessersatze ausgehen. Zunächst werden naheliegende Erweiterungen auf algebraische Flächen und Raumcurven hervorgehoben. Es ist ohne weiteres klar, dafs die Schwerpunkte der Punktgruppen, die eine algebraische Fläche mit unter sich parallelen Geraden gemein hat, einer Ebene angehören. Projicirt man eine Raumcurve nach zwei Richtungen auf Hülfsebenen, so entsteht der Satz: „Der Schwerpunkt der Gruppe, welche eine sich selbst parallel bewegte Ebene aus einer Raumcurve C_n ausschneidet, beschreibt eine gerade Linie." Allen ebenen Curven C_n, die zwei parallele Geraden in denselben beiden Punktgruppen treffen, gehört für diese Richtung derselbe Durch-

*) Chasles, Sur la transformation parabolique des relations métriques des figures, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 1—25.

messer zu. Indem die beiden Geraden einander unendlich nahe rücken, gelangt man zu dem Satze: „Der bei einer Curve C_n einer Richtung entsprechende Durchmesser gehört in gleicher Weise zu n Tangenten, deren Berührungspunkte eine der in Betracht kommenden Gruppe bilden.“ Bei der „parabolischen“ Transformation — mit Hülfe des Polarsystems einer Parabel — entstehen nun aus n Punkten einer Geraden n von einem Punkte ausgehende Gerade, aus ihrem Schwerpunkte ein bestimmter Durchmesser dieser Strahlengruppe, welcher den zur Axe der Parabel parallelen Strahlen zugehört. Nach diesen Vorbereitungen erhält man (S. 7) den Satz: „Die Tangentengruppen einer Curve $\mathfrak{K}_n$, welche von den Punkten einer Geraden l ausstrahlen, besitzen für die zu l parallelen Geraden Durchmesser, die einen Punkt mit einander gemein haben.“ Dieser Punkt wird als Pol der Geraden l hinsichtlich der Curve bezeichnet, was für den Fall der Kegelschnitte offenbar berechtigt ist. Rückt l ins Unendliche hinaus, so gehört ihr speciell der Mittelpunkt der Curve zu. Chasles wendet alsdann seinen Satz auf Curven $\mathfrak{K}_3$ an. Von einem beliebigen Punkte P_1 derselben geht aufser der Tangente a_1 desselben noch eine zweite an anderer Stelle berührende Tangente b_1 aus. Zieht man von irgend einem Punkte aus die drei Tangenten a_1, a_2, a_3, so laufen (S. 10) die drei zugehörigen Tangenten b_1, b_2, b_3 an einer Stelle zusammen. Als Specialfall folgt, dafs die Tangenten in den drei Spitzen der Curve durch einen Punkt gehen, u. s. w. Durch polare Umformung entsteht der Satz von der Satellite bei der Curve C_3, und es ergiebt sich, dafs ihre drei Wendepunkte in gerader Linie liegen. Chasles hält diese Sätze offenbar für neu; Poncelet hat es sich nicht entgehen lassen, auf die Priorität Maclaurin's hinzuweisen. Chasles stellt nun entsprechende Sätze für Raumcurven und Flächen auf und gelangt zum Schlufs zu Sätzen über einfach unendliche Mannigfaltigkeiten. Beschreibt eine Curve C_n einen Büschel, so dreht sich (S. 22) der zu einer beliebigen Richtung gehörige Durchmesser um einen festen Punkt. Hiernach beschreibt der Pol einer Geraden l nach einer Curve $\mathfrak{K}_n$, die sich in einer Schar bewegt, eine Gerade (S. 24) u. s. w.

6. In diesen Entwickelungskreis gehören auch zwei Arbeiten von Sturm*), die auf der Lamé'schen Darstellung des Kegelschnittbüschels [IV, 3; S. 35*] beruhen. Indem man die beiden bestimmenden Kegelschnitte des Büschels in Geradenpaare ausarten läfst, kann man zu einer einfachen Darstellung der Polarentheorie gelangen; dieser bereits von Lamé benutzte Gedanke [V, 8] wird in der ersten Arbeit weiter ausgeführt. Die Bedeutung der zweiten Schrift beruht in einer umfassenden analytischen Behandlung der Involution und in

*) Ch. Sturm, Mémoire sur les lignes du second ordre (Première partie), Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 265—293; (Deuxième partie), Gerg. Ann. Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 173—198.

einer hier zum ersten Male auftretenden Verallgemeinerung des Desargues'schen Involutionssatzes. Gehören drei Kegelschnitte

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$
$$a'_{11}x^2 + a'_{22}y^2 + \cdots = 0, \quad a''_{11}x^2 + a''_{22}y^2 + \cdots = 0$$

einem Büschel an, so bestehen nach Lamé's Theorem die Gleichungen:

$$ma_{11} + m'a'_{11} + m''a''_{11} = 0, \quad ma_{22} + m'a'_{22} + m''a'_{22} = 0,$$
$$ma_{12} + m'a'_{12} + m''a''_{12} = 0, \cdots.$$

Demnach sind die Schnittpunkte des dritten Kegelschnittes mit der x-Axe durch die Gleichung zu bestimmen:

$$m(a_{11}x^2 + 2a_{13}x + a_{33}) + m'(a'_{11}x^2 + 2a'_{13}x + a'_{33}) = 0$$

und hängen also mit denen der gegebenen, A_1, A_2 und B_1, B_2, durch die Relationen zusammen:

$$\frac{C_1A_1 \cdot C_1A_2}{C_1B_1 \cdot C_1B_2} = \frac{C_2A_1 \cdot C_2A_2}{C_2B_1 \cdot C_2B_2} = -\frac{m' \cdot a'_{11}}{m \cdot a_{11}}.$$

Drei beliebige Kegelschnitte eines Büschels treffen also (S. 180) eine beliebige Gerade — denn das ist die x-Axe — in Punktepaaren einer Involution.*) Bisher kannte man nur den Specialfall des Satzes, bei dem zwei der drei Kegelschnitte in Geradenpaare zerfallen, als Desargues'schen Involutionssatz [IV, 5, 6]. Sturm leitet denselben noch einmal selbstständig ab, folgert aus ihm den oben [II, 15] gegebenen Beweis des Pascal'schen Satzes etc.

Die angegebene metrische Relation bleibt, wie Sturm ausdrücklich hervorhebt (S. 178), bestehen, wenn die Gerade sich selbst parallel bewegt wird. So entsteht ein Theorem, welches Chasles**) in einer schon erwähnten Arbeit auf folgende Weise entwickelt: Schneidet eine sich selbst parallel bewegte Gerade zwei Kegelschnitte in den Punktepaaren A_1A_2 und B_1B_2, so genügen (bei constantem k) der Forderung

$$PA_1 \cdot PA_2 = kPB_1 \cdot PB_2$$

in jeder Lage der Geraden zwei Punkte. Das durch diese Gleichung definirte Gebilde, welches offenbar die Schnittpunkte der beiden gegebenen Kegelschnitte enthält, ist also ebenfalls ein Kegelschnitt. Aus dieser sehr anfechtbaren Betrachtungsweise leitet Chasles höchst interessante Folgerungen ab. Zieht man durch irgend zwei Hülfspunkte M und N in der gegebenen Richtung zwei Sehnen M_1M_2

*) Diesem Satze sollte, wie aus der Schlufsbemerkung unzweifelhaft hervorgeht, der Satz gegenübergestellt werden: Die Tangenten, welche drei Kegelschnitte mit vier gemeinschaftlichen Tangenten aus einem beliebigen Punkte erhalten, bilden eine Involution aus sechs Strahlen, schneiden nach der von Poncelet [XXIV, 7] und Chasles [XXI, 7] gegebenen Definition auf einer beliebigen Hülfsgeraden eine Involution aus sechs Punkten aus.

**) Vergl.: a. a. O. S. 183*.

und $N_1 N_2$ der beiden Kegelschnitte, so ist natürlich auch (bei constantem K)
$$\frac{PA_1 \cdot PA_2}{MM_1 \cdot MM_2} = K \frac{PB_1 \cdot PB_2}{NN_1 \cdot NN_2}.$$
Jeder der beiden Quotienten behält aber nach dem Potenzzatz des Apollonius seinen Wert bei, wenn die beiden ersten Parallelen um P und M, die beiden anderen um P und N gedreht werden.*) Läfst man M und N mit den Mittelpunkten der beiden Kegelschnitte zusammenfallen, so entsteht z. B. (S. 14) der Satz: „Aus dem laufenden Punkte P eines Kegelschnittes seien an zwei andere, K_2 und L_2, mit denen er zu einem Büschel gehört, die Tangenten PA und PB gelegt. Sind a und b die zu PA und PB parallelen Durchmesser von K_2 und L_2, so ist der Ausdruck $\frac{PA}{a} : \frac{PB}{b}$ constant." Auf ähnliche Weise (S. 18) folgt: „Ist das Product der Entfernungen eines Punktes von zwei Geraden proportional zu dem Quadrat der Tangente, das sich von ihm aus an einen Kreis legen läfst, so beschreibt der Punkt einen Kegelschnitt, welcher die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kreise enthält." Fallen die beiden Geraden zusammen, so folgt speciell der Bobillier'sche Satz [VII, 5]: „Die Tangente, welche von einem Punkte P eines Kegelschnittes aus sich an einen ihn doppelt berührenden Kreis legen läfst, ist proportional zu der Entfernung des Punktes P von der Berührungssehne"; wegen der Pappus'schen Brennpunkteigenschaft läfst sich von hier aus ein Brennpunkt als Mittelpunkt eines unendlich kleinen Kreises erkennen, der den Kegelschnitt doppelt berührt. Zu entsprechenden Entwickelungen über Oberflächen zweiter Ordnung findet sich in einer bereits oben angeführten Abhandlung**) der Ausgangspunkt.

7. Noch ist hier einer wichtigen Arbeit Poncelet's***) ausführlich zu gedenken, in welcher mannigfache Eigenschaften der Curven C_n, namentlich der Curven C_3, aus dem Newton'schen Potenzsatze abgeleitet werden. Obgleich Poncelet geneigt ist, den Satz, der für ein Conglomerat aus Kegelschnitten und Geraden ohne weiteres richtig ist, schon auf Grund des Continuitätsprincips auf allgemeine algebraische Curven zu übertragen, fügt er doch noch in der Einleitung (S. 132) einen nicht eben glücklichen Versuch bei, den Satz zu begründen. Für zwei

---

*) Sturm entwickelt (S. 178) auf analoge Weise den Satz: Zwei Sehnen $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ zweier Kegelschnitte, deren jede zu sich selbst parallel bewegt wird, schneiden sich stets in einem Punkte P eines mit den ersteren zu einem Büschel gehörigen Kegelschnittes, wenn die Relation besteht
$$PA_1 \cdot PA_2 = k\, PB_1 \cdot PB_2.$$

) Vergl. die erste auf S. 181* angeführte Abhandlung.

***) Poncelet, Analyse des transversales appliquée à la recherche des propriétés projectives des lignes et surfaces géométriques, Crelle's Journ., Bd. 8, 1832, S. 21—41, 117—137, 213—252, 370—410. Meine Hinweise beziehen sich auf die Nummern des von Poncelet unter etwas verändertem Titel veranstalteten zweiten Abdrucks der Abhandlung: Traité, Bd. 2, Paris 1866, Section III, S. 122—234.

Gerade p und q, die sich in O begegnen und die Curve in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$ und $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ treffen, bilde man den Quotienten

$$\frac{OP_1 \cdot OP_2 \cdot \cdots \cdot OP}{OQ_1 \cdot OQ_2 \cdot \cdots \cdot OQ_n}$$

und trage, während man die Gerade p sich selbst parallel bewegt, auf ihr stets eine Strecke von O aus auf, welche in einer bestimmten Maſseinheit diesen Zahlenwert darstellt. Der Endpunkt dieser Strecke bleibt stets, auch wenn O einen der Punkte $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ überschreitet, im Endlichen, und beschreibt, wie Poncelet hieraus schliesst, eine Gerade, die nur zu q parallel sein kann. Hieraus würde dann folgen, daſs der Wert des Quotienten nur von der Richtung der Transversalen p und q abhängt. Kann man diese Entwickelung nur als sehr unbefriedigend betrachten, so wird man doch die Folgerungen als sehr elegant bezeichnen, die Poncelet dem Satz abgewinnt. Er bedient sich hierbei der von Carnot*) gegebenen leichten Umformung des Satzes, nach welcher unter den Schnittpunkten $P_1, P_2, \ldots, P_n; Q_1, Q_2, \ldots, Q_n; R_1, R_2, \ldots, R_n$ einer Curve C_n mit den Seiten BC; CA; AB eines Dreiecks die Relation

$$\prod_{\alpha=1}^{n} AQ_\alpha \cdot BR_\alpha \cdot CP_\alpha = \prod_{\alpha=1}^{n} AR_\alpha \cdot BP_\alpha \cdot CQ_\alpha$$

besteht. Aus der speciellen Relation für Kegelschnitte kann ein sehr einfacher Beweis des Pascal'schen Satzes abgeleitet werden, von dem Brianchon und Gergonne verschiedene Varianten gegeben hatten [II, 11], und den Poncelet hier reproducirt. Wichtiger ist die Art, in der Poncelet den Desargues'schen Involutionssatz auf drei zu einem Büschel gehörige Kegelschnitte überträgt. Trifft eine Gerade zwei Kegelschnitte in den Punktepaaren P_1P_2 und $P_1'P_2'$, zwei gegenüberliegende gemeinschaftliche Sehnen derselben, die sich in A begegnen, in den Punkten B, C, und spricht man für beide Kegelschnitte hinsichtlich ABC die Carnot'sche Beziehung aus, so entsteht durch Division beider Relationen die Gleichung

$$\frac{BP_1 \cdot BP_2}{BP_1' \cdot BP_2'} = \frac{CP_1 \cdot CP_2}{CP_1' \cdot CP_2'},$$

welche zeigt, daſs B, C; P_1, P_2; P_1', P_2' eine Involution zu sechs Punkten bilden, das heiſst von den Seitenpaaren eines vollständigen Vierecks ausgeschnitten werden. Aus diesem Grunde kann man der Beziehung eine entsprechende an die Seite setzen, bei der P_1 und P_2 ebenso bevorzugt sind, wie B und C in der obigen Gleichung:

$$\frac{P_1B \cdot P_1C}{P_1P_1' \cdot P_1P_2'} = \frac{P_2B \cdot P_2C}{P_2P_1' \cdot P_2P_2'}.$$

*) Vergl.: I, 1.

Setzt man für P_1', P_2' die Schnittpunkte P_1'', P_2'' eines dritten Kegelschnittes des Büschels ein, und dividirt beide Relationen durch einander, so zeigt (150) die so entstehende Gleichung

$$\frac{P_1P_1' \cdot P_1P_2'}{P_1P_1'' \cdot P_1P_2''} = \frac{P_2P_1' \cdot P_2P_2'}{P_2P_1'' \cdot P_2P_2''},$$

dafs P_1, P_2; P_1', P_2'; P_1'', P_2'' eine Involution aus sechs Punkten ist; so complicirt gestaltete sich die Herleitung einer bei richtiger Auffassung der Involution selbstverständlichen Erweiterung des Desargues'schen Involutionssatzes. Der Satz wird (153) auf drei einem Vierseit eingeschriebene Kegelschnitte übertragen; die Tangentenpaare, welche dieselben aus einem beliebigen Punkte erhalten, liegen in Involution, treffen eine beliebige Secante in Paaren einer Involution.

8. Die Relation, welche die drei Schnittgruppen $P_1P_2P_3$, $Q_1Q_2Q_3$, $R_1R_2R_3$ einer Curve C_3 mit den Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks verbindet, gestattet die Schreibweise:

$$\frac{AQ_1 \cdot AQ_2 \cdot BR_1 \cdot BR_2 \cdot CP_1 \cdot CP_2}{AR_1 \cdot AR_2 \cdot BP_1 \cdot BP_2 \cdot CQ_1 \cdot CQ_2} \times \frac{AQ_3 \cdot BR_3 \cdot CP_3}{AR_3 \cdot BP_3 \cdot CQ_3} = 1.$$

Wird der eine Factor gleich 1, so gilt dasselbe von dem anderen; anders ausgedrückt: „Liegen sechs von den neun Schnittpunkten einer Curve dritter Ordnung mit drei Geraden auf einem Kegelschnitt, so gehören die übrigen einer Geraden an“ (154). Aus diesem Resultate, welches in einem allgemeineren kurze Zeit vorher von Gergonne [XXVI, 1] entwickelten Theorem enthalten ist, zieht nun Poncelet Folgerungen, die zum festen Bestandteil der Lehrbücher geworden sind. Der Kegelschnitt kann in ein Geradenpaar ausarten. Der dann entstehende Satz wird als Bewegungssatz gefafst: „Drehen sich drei Seiten eines einer Curve dritter Ordnung eingeschriebenen Vierseits um feste Punkte derselben, so gilt dasselbe von der letzten Seite des Vierseits“ (158). Dieser Satz kann auf das $2n$-Seit durch Einschaltung von Diagonalen ausgedehnt werden, genau so, wie das bei dem Specialfall sich als möglich erwies, bei dem die Drehpunkte einer Geraden angehören, die Ecken auf einem Kegelschnitte fortschreiten. Andererseits kann aus dem Satze eine Verallgemeinerung des Pascal'schen Satzes abgeleitet werden: „Liegen zwei von den Schnittpunkten gegenüberliegender Seiten eines der Curve C_3 eingeschriebenen Sechsseits auf ihr, so gilt dasselbe von dem dritten.“ Artet in dem ursprünglichen Theorem der Kegelschnitt in eine Doppelgerade aus, so gelangt man zu dem Satze von der Satellite (155), als dessen specieller Fall der Wendepunktsatz erkannt wird (156).*) Weiter folgert Poncelet: „Trifft ein Kegelschnitt, der die Curve C_3 in P osculirt, dieselbe noch in

*) Der Wendepunktsatz ist vor Maclaurin, auf den Poncelet hier (157) mit Bezug auf Chasles' Entwickelungen [XXIV, 5] hinweist, von de Gua ausgesprochen worden. Vergl.: De Gua, Usages de l'analyse de Descartes etc., Paris 1740, S. 225 und 313.

Punkten A, B, C, so liegen die letzten Schnittpunkte der Geraden PA, PB, PC in gerader Linie (161). Auch kennt Poncelet (162) den Satz, dafs ein beliebiger Punkt P von C_3 mit seinem zweiten Tangentialpunkt Q und dem letzten Schnittpunkt des in P fünfpunktig berührenden Kegelschnittes auf einer Geraden liegt.*) Nicht glücklich ist Poncelet in den Bemerkungen über die Raumcurve dritter Ordnung, welche an dieser Stelle eingeschaltet sind. Er hebt zunächst hervor, dafs die Curve als Schnitt zweier einschaligen Hyperboloide zu betrachten sei, die eine Gerade mit einander gemein haben, spricht aber dann (163) von der Aufgabe, durch acht gegebene Punkte eine Raumcurve dritter Ordnung hindurch zu legen.**)

9. Es folgen nunmehr Entwickelungen allgemeiner Art, die von sehr verschiedener Bedeutung sind. Die Carnot'sche Beziehung

$$\prod_{\alpha=1}^{n} AQ_\alpha \cdot BR_\alpha \cdot CP_\alpha = \prod_{\alpha=1}^{n} AR_\alpha \cdot BP_\alpha \cdot CQ_\alpha$$

gestattet, einen der $3n$ Schnittpunkte einer Curve C_n mit drei Geraden eindeutig zu ermitteln, wenn die übrigen vorliegen. Ebenso folgt, dafs $\frac{1}{2}(\mu-1)(\mu-2)$ von den μn Schnittpunkten einer Curve C_n mit μ Geraden durch die übrigen bestimmt sind (212). Treffen zwei Curven C_n und C_n' die Geraden AB und AC in denselben Punktgruppen $Q_1 Q_2 \ldots Q_n$ und $R_1 R_2 \ldots R_n$, so besteht für ihre Schnittgruppen $P_1 P_2 \ldots P_n$ und $P_1' P_2' \ldots P_n'$ mit BC die Beziehung

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{BP_\alpha}{CP_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{BP_\alpha'}{CP_\alpha'},$$

das heifst, die beiden Punktgruppen liegen mit B und C in Involution. Allein durch diese Gleichung ist der Punkt P_n festgelegt, wenn man $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$; $P_1', P_2', \ldots, P_n'$; B, C kennt. Man kann nun $P_1', P_2', \ldots, P_n'$ als Schnittpunkte der Geraden $Q_1 R_1$, $Q_2 R_2, \ldots, Q_n R_n$ auffassen, und hernach auf zwei beliebig durch B und C gelegten Geraden die Gruppen $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_2 \ldots \mathfrak{Q}_n$ und $\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2 \ldots \mathfrak{R}_n$ so construiren, dafs $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{R}_1, \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{R}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n \mathfrak{R}_n$ die Punkte $P_1', P_2', \ldots, P_n'$ und $\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{R}_2, \mathfrak{Q}_2 \mathfrak{R}_3, \ldots, \mathfrak{Q}_{n-1} \mathfrak{R}_n$ die Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ ausschneiden; alsdann bestimmt $\mathfrak{Q}_n \mathfrak{R}_1$ den letzten gesuchten Punkt P_n

*) Die Sätze über Curven dritter Ordnung sind für sich veröffentlicht in der Abhandlung: Poncelet, Théorèmes et problèmes sur les lignes du troisième ordre. Extrait du mémoire intitulé: Analyse des transversales, etc., Quet. Corr., Bd. 7, 1832, S. 79—84.

**) Poncelet hebt 1866 die Unrichtigkeit dieser Entwickelung hervor (Traité, Bd. 2, S. 426). Steiner habe ihn sogleich nach Erscheinen der Arbeit selbst, als auch schon der eben erwähnte Auszug abgedruckt war, auf die Irrigkeit dieser Entwickelung aufmerksam gemacht. Trotzdem habe er sich entschlossen, um nichts zu verschleiern, die so irrige Nummer im Traité abzudrucken.

(183); zwei von den Schnittpunkten mit einer vierten Geraden können nun mit Hülfe zweier derartigen Involutionen bestimmt werden u. s. w. Poncelet beschäftigt sich im Anschluſs hieran mit der Auffindung einer Curve n^{ter} Ordnung, deren Schnittpunkte mit μ Geraden vorliegen und die einen festen Punkt $(n - \mu + 1)$-fach enthält. Dieser ziemlich weitschweifigen Entwickelung kann man nicht dieselbe Wichtigkeit beilegen, die ihr Poncelet offenbar zuschreibt. Hervorzuheben ist aber die Herleitung des Satzes von Cotes (191 ff.): Zwischen zwei Punktgruppen $P_1 P_2 \ldots P_n$ und $P_1' P_2' \ldots P_n'$, die mit B und C in Involution liegen, besteht, sobald B und C in einen Punkt O gelangen, die folgende Beziehung:

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\overline{OP_\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{\overline{OP_\alpha'}}.$$

Sobald also zwei Curven C_n und C_n' auf zwei von O ausgehenden Strahlen dieselben Punktgruppen ausschneiden, besitzen die Gruppen, die sie auf einer dritten von O ausgehenden Geraden bestimmen, hinsichtlich O den gleichen harmonischen Mittelpunkt. Setzt man C_n' aus n Geraden zusammen, so folgt aus früheren Entwickelungen [XXIV, 4], daſs die harmonischen Mittelpunkte der C_n, also einer beliebigen Curve angehörigen Punktgruppen, eine Gerade erfüllen; somit können Sätze über den harmonischen Mittelpunkt und die harmonischen Axen bei Gruppen von Strahlen und Punkten auf Curven C_n übertragen werden. Ich erwähne noch das Theorem: „Liegen μn von den μm Schnittpunkten einer Curve C_m mit einer Gruppe von μ Strahlen auf einer Curve C_n, so liegen die übrigen $\mu(m - n)$ Punkte auf einer Curve C_{m-n}" (227).

Bei der dualen Übertragung der bisher entwickelten Sätze findet Poncelet noch einmal Gelegenheit, seine Ansprüche gegen Gergonne kräftig hervorzuheben und nochmals eine Übersicht über die „théorie des polaires réciproques" zu geben. Gegen diesen stark polemischen Teil des letzten Abschnittes treten die Anwendungen der Relation, welche der Carnot'schen dual gegenübersteht und zwischen den Gruppen eigentlicher Tangenten obwaltet, die eine Curve C_n aus den Ecken eines Dreiecks erhält, etwas zurück. Zum Schluſs kommt Poncelet auf eine Entwickelung, die nicht unerwähnt bleiben darf. Um den Punkten und Geraden einer Ebene ihre Geraden und Punkte entgegenzustellen, kann man sich mit Vorteil der Polareigenschaften des Kegelschnittes bedienen; aber man kann denselben Zweck auch durch andere Mittel erreichen. Schneiden sich z. B. die Geraden a und b auf der Geraden AB, und ordnet man einem Punkte P die Verbindungslinie der Punkte Q, R zu, in denen a und b von AP und BP getroffen werden, so entsteht (250) ebenfalls eine Correlation, der man sich bedienen kann, um das Dualitätsgesetz zu erweisen.*)

*) Die Configuration des Pappus [II, 1] zeigt nämlich, daſs drei Punkten

10. Ich knüpfe hier die Besprechung einer umfangreichen Abhandlung an, die Poncelet zwar erst im Jahre 1866 veröffentlicht hat, die aber nach seiner Versicherung gleichzeitig mit der „analyse des transversales“ verfaſst ist und derselben sich auch inhaltlich völlig anschlieſst.*) Zunächst wird der Begriff der Involution erweitert. Eine Secante möge m Gerade $l_1, l_2, \ldots, l_m$ in den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_m$, zwei Curven C_n und C'_n, die jede der Geraden in derselben Punktgruppe schneiden, in den Gruppen $P_1 P_2 \ldots P_n$ und $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ treffen. Alsdann bestehen die Relationen

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{A_1 P_\alpha}{A_1 P'_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{A_2 P_\alpha}{A_2 P'_\alpha} = \cdots = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{A_m P_\alpha}{A_m P'_\alpha};$$

die Gruppen $P_1 P_2 \ldots P_n$, $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$ liegen mit $A_1, A_2, \ldots, A_m$ in Involution. Wächst die Anzahl der Geraden auf n, so entsteht die vollständige Involution („involution complète“) aus drei Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$, $P_1 P_2 \ldots P_n$, $P'_1 P'_2 \ldots P'_n$. Sind die beiden ersten Gruppen gegeben, so ist die letzte durch einen einzigen ihrer Punkte festgelegt. Die P'_1 enthaltende Curve C'_n des Büschels, welchen n durch die erste Gruppe gelegte Gerade und eine die zweite Gruppe aufnehmende Curve C_n bestimmen, schneidet die gesuchte Gruppe aus. Auch C_n kann in n Gerade zerfallen und so bestimmt werden, daſs sie eine durch P'_1 gezogene Gerade l in denselben Punkten trifft, wie die erste Strahlengruppe. C'_n besteht dann aus l und einer Curve C'_{n-1}, welche die Ergänzungsgruppe $P'_2 P'_3 \ldots P'_n$ ausschneidet. Bei dieser Gelegenheit treten offenbar zu den obigen Gleichungen die folgenden

$$\prod_{\alpha=1}^{n} \frac{P_1 A_\alpha}{P_1 P'_\alpha} = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{P_2 A_\alpha}{P_2 P'_\alpha} = \cdots = \prod_{\alpha=1}^{n} \frac{P_n A_\alpha}{P_n P'_\alpha}$$

hinzu, aus denen die Gleichberechtigung der drei Gruppen der vollständigen Involution hervorgeht (259—261).

11. Auf diesem Boden baut sich nun (262 ff.) die Entwickelung des Büschelbegriffes auf. Dreht man eine Gerade um den Punkt P und sucht jedesmal von der Involution, welche ihre Schnittgruppen mit zwei Curven C_n und C'_n bestimmen, die dritte, P enthaltende Gruppe, so beschreibt dieselbe die P enthaltende Curve C''_n des Büschels. Haben nämlich zwei Gruppen einer vollständigen Involution einen Punkt gemeinsam, so gehört er von selbst auch der dritten

---

P, M, N, von denen die beiden letzten a und b angehören, drei Gerade p, m, n entsprechen, die von einem Punkte ausgehen und von denen die beiden letzten B und A enthalten. Chasles hat hierauf aufmerksam gemacht.

*) Poncelet, Propriétés communes aux systèmes de lignes et de surfaces géométriques d'ordre quelconque, Traité, Bd. 2, Paris 1866, Section IV, S. 235—310. Meine Hinweise beziehen sich auf die Nummern der Abhandlung.

Gruppe an, deshalb geht das erzeugte Gebilde zunächst durch sämtliche Schnittpunkte der gegebenen Curven hindurch. Es ist ferner von der n^{ten} Ordnung, da eine von P ausgehende Gerade aufserhalb P dasselbe höchstens in $n-1$ Punkten trifft, und überdies nur eine Tangente t in P existirt. Vereinigt sich nämlich für t noch ein zweiter Punkt der dritten Gruppe mit P, so haben [XXIV, 9] die Schnittgruppen von t mit C_n und C_n' bezüglich P denselben harmonischen Mittelpunkt. Die Tangente t verbindet daher den Punkt P mit dem Schnittpunkt der beiden Geraden, welche ihm nach dem Theorem von Cotes hinsichtlich C_n und C_n' zugehören, und ist mithin eindeutig bestimmt. Wendet man jetzt den Carnot'schen Satz auf C_n und C_n' an und setzt das Dreieck aus P und zwei beliebigen Punkten Q und R von C_n'' zusammen, so erkennt man augenblicklich, dafs QR C_n und C_n' in Gruppen schneidet, die mit Q und R in Involution liegen; die drei Curven werden deshalb von jeder Geraden in einer vollständigen Involution geschnitten. Nach weiterer Ausführung dieser metrischen Beziehungen geht Poncelet (281 ff.) zur Definition des Netzes über. Der Gleichung

$$A\prod_{\alpha=1}^{n} PQ_\alpha + B\prod_{\alpha=1}^{n} PR_\alpha + C\prod_{\alpha=1}^{n} PS_\alpha + \cdots = 0$$

genügen, wenn m Gruppen $Q_1Q_2\ldots Q_n$, $R_1R_2\ldots R_n$, $S_1S_2\ldots S_n, \ldots$ einer Geraden l vorliegen, und $A, B, C, \ldots$ Constante sind, n Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ von l, die mit den gegebenen Gruppen eine vollständige Involution aus $(m+1)\,n$ Punkten bilden. Schneidet man m gegebene Curven n^{ter} Ordnung mit beliebigen Geraden und bestimmt auf jeder bei festen Constanten $A, B, C, \ldots$ eine letzte Gruppe mit Hülfe der obigen Gleichung, so erhält man Schnittgruppen einer neuen Curve, welche dem durch die ersteren Curven bestimmten linearen System angehört. Auf ähnliche Art können auch Flächennetze definiert werden. Von den hierher gehörigen Sätzen werde der folgende erwähnt: „Haben vier Flächen dieselben n^3 Schnittpunkte mit einander gemein, so begegnen sie jeder Geraden in einer vollständigen Involution aus $4n$ Punkten" (292).

12. Indem Poncelet seine Ergebnisse über den harmonischen Mittelpunkt auf Curven, Flächen und Raumcurven im allgemeinen ausdehnt, gelangt er (332 ff.) zur Begründung einiger Sätze aus der Polarentheorie. Der harmonische Mittelpunkt P eines Punktes A hinsichtlich der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$, die mit P und A auf einer Geraden liegen, wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{n}{AP} = \frac{1}{AP_1} + \frac{1}{AP_2} + \cdots + \frac{1}{AP_n}.$$

Soll also ein Punkt X umgekehrt S zum harmonischen Mittelpunkt bezüglich $P_1P_2\ldots P_n$ haben, so besteht die Gleichung

$$\frac{n}{XS} = \frac{1}{XP_1} + \frac{1}{XP_2} + \cdots + \frac{1}{XP_n}$$

oder

$$\frac{SP_1}{XP_1} + \frac{SP_2}{XP_2} + \cdots + \frac{SP_n}{XP_n} = 0,$$

durch welche eine Gruppe von $n-1$ Punkten definirt wird. Den Punkt S enthält sie dann und nur dann, wenn er mit einem der Punkte $P_1, P_2, \ldots, P_n$ zusammenfällt, hingegen sind etwaige Doppelpunkte der Gruppe $P_1 P_2 \ldots P_n$ in ihr enthalten. Wird dieselbe von einer um S gedrehten Geraden aus einer festen Curve C_n herausgeschnitten, so beschreibt die abgeleitete Punktgruppe eine Curve C_{n-1}, welche die Berührungspunkte der von S aus an die Curve gelegten Tangenten ausschneidet, also die wohlbekannte Polarcurve des Punktes S. Als eine unmittelbare Folge der Definition ergiebt sich der Satz: „Die harmonische (Cotes'sche) Gerade eines Punktes Q hinsichtlich einer Curve C_n dreht sich um den Punkt S, wenn Q über die Polarcurve desselben geführt wird.“ Es giebt demnach $(n-1)^2$ Punkte, deren Polargeraden mit einer gegebenen Geraden identisch sind, die Schnittpunkte der Polarcurven irgend zweier Punkte der Geraden (338). Bewegt sich ein Punkt über eine Gerade, so umhüllt seine Polargerade (343) eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Klasse und — fügt Poncelet hinzu — von der Ordnung $(n-1)(n-2)$. Bekanntlich ist die Curve in Wirklichkeit nur von der Ordnung $2(n-2)$. Den Abschluſs der Arbeit bieten Entwickelungen von geringerem Interesse über Osculationsverhältnisse bei Curven höherer Ordnung.

13. Ich möchte noch eine Arbeit von Reiſs*) erwähnen, die zwar erst 1837 veröffentlicht wurde, aber inhaltlich sich nahe mit den besprochenen Arbeiten berührt. Sie enthält eine Reihe von Transversalensätzen, von denen ich einen hervorhebe. Eine Transversale treffe eine Curve C_n in den Punkten $P_1, P_2, \ldots, P_n$; ist dann r_α der Krümmungsradius im Punkte P_α und φ_α der Winkel, den seine Tangente mit der Transversale einschlieſst, so besteht die Gleichung

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \frac{1}{r_\alpha} \frac{1}{\sin^3 \varphi_\alpha} = 0.$$

Sind P_1 und P_2 Wendepunkte einer Curve C_3, also r_1 und r_2 unendlich groſs, so folgt aus der Gleichung

$$\frac{1}{r_3} \frac{1}{\sin^3 \varphi_3} = 0,$$

daſs auch r_3 unendlich groſs und deshalb P_3 ebenfalls ein Wendepunkt ist (S. 293).

*) Reiſs, Mémoire sur les propriétés générales des courbes algébriques, etc., Quet. Corr., Bd 9., 1837, S. 249—308.

XXV. Untersuchungen über specielle Curven dritter und vierter Ordnung.

1. Ich bespreche zunächst einige Untersuchungen über eine specielle circulare Curve C_3, die sogenannte Quetelet'sche — bezw. van Rees'sche — Focale.*) Die Ebene eines Schnittes eines Kegels zweiter Ordnung drehe sich um eine Tangente, die zu einer der Hauptaxenebenen senkrecht steht. Die in dieser Hauptaxenebene liegenden Brennpunkte beschreiben alsdann die zu betrachtende Curve. Handelt es sich um einen Rotationskegel, so ergiebt sich eine Curve C_3 mit Doppelpunkt, die „focale à noeud", welche, wie oben erwähnt, auch von Dandelin**) behandelt und durch Inversion aus einem Kegelschnitt abgeleitet worden war. Nach einem Satze von Le François***) beschreibt diese specielle Focale der Schnittpunkt zweier um feste Punkte bewegten Strahlen o und o', von denen der erste sich doppelt so schnell dreht als der zweite, so daſs jedem Strahle des ersten Büschels zwei aufeinander senkrechte Strahlen des zweiten entsprechen. Van Rees†) führt rechnend bei der allgemeinen Focale Paare conjugirter Punkte ein, deren Entfernungen von einem bestimmten Punkte der Curve ein constantes Product ergeben, und deren Tangenten in einem dritten Punkte der Curve zusammenlaufen (369 ff.). Er weist eingeschriebene Vierseite nach, deren Paare gegenüberliegender Ecken aus derartigen Punktepaaren bestehen. Einen Ansatz zu der Erzeugung durch projectivische Strahleninvolutionen bietet van Rees in folgendem Satze: „Die Tangentenpaare, welche man von zwei festen Punkten aus an einen Kreis legen kann, begegnen sich, wenn sein Mittelpunkt festgehalten wird, in Punktgruppen einer „focale à noeud" (S. 378). Die allgemeine Focale tritt übrigens auch als Ort der Punkte auf, von denen aus zwei Strecken unter gleichen Winkeln erblickt werden (S. 375). Prägt sich in dieser Eigenschaft die Möglichkeit aus, die Curve durch zwei projectivisch bezogene Kreisbüschel zu erzeugen, so ist die Erzeugung durch einen Kreisbüschel und einen zu ihm projectivischen Strahlenbüschel in

*) Quetelet, Dissertatio de quibusdam locis geometricis nec non de curva focali, Gent 1819. Diese bereits oben [XIV, 4] erwähnte Schrift ist mir nicht zugänglich geworden.

) Vergl. a. a. O. S. 100*.

***) Le François, Théorie mathématique des courbes d'intersection apparente de deux lignes qui tournent avec rapidité autour de deux points fixes, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 120—127; Le François, De la courbe produite par les intersections successives de deux droites pivotant autour de deux points fixes, de manière que la vitesse angulaire de l'une soit double de celle de l'autre, ibidem, S. 379—385.

†) Van Rees, Mémoire sur les focales., Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 361—378. Nach der Einleitung der Arbeit scheint Quetelet nur die Focale des Rotationskegels genauer untersucht zu haben.

folgender für die „focale à noeud" bereits von Quetelet gegebenen Eigenschaft enthalten: „Man lasse einen Durchmesser eines Kreises, der sich in einem Büschel bewegt, beständig durch einen festen Punkt hindurchlaufen; alsdann beschreiben seine Endpunkte eine Focale" (S. 367). Chasles*) hat hierzu den Satz hinzugefügt: „Die Kreise eines Büschels werden von den Tangenten, die von einem festen Punkte ausgehen, in Punkten einer Focale berührt." Einige Jahre später giebt Chasles**) eine ganze Reihe von Erzeugungsweisen der Curve. Legt man von irgend einem Punkte aus Tangenten an eine Schar confocaler Kegelschnitte, so liegen ihre Berührungspunkte auf einer Focale mit Doppelpunkt. Trifft ferner eine Axe eines Tangentialkegels einer Oberfläche zweiter Ordnung eine der Hauptaxenebenen stets in demselben Punkte, so beschreibt seine Spitze ebenfalls eine solche Curve. Die allgemeine Focale ist zunächst der Ort der Brennpunkte aller Kegelschnitte, welche vier Gerade berühren, was mit der einen van Rees'schen Definition bekanntlich identisch ist. Wird ein leuchtender Punkt in einen dieser Brennpunkte verlegt, und befindet sich ein beobachtendes Auge in dem zugehörigen Brennpunkte, so liegen die Glanzpunkte auf den einzelnen Kegelschnitten auf einer Focale. Handelt es sich um confocale Kegelschnitte, so kann man beide Punkte willkürlich wählen.***) Diese Eigenschaften können, so hebt Chasles hervor, aus allgemeineren über Curven C_3 abgeleitet werden.

2. Bemerkenswert ist, dafs Chasles offenbar schon 1835 im Besitz einer Eigenschaft der Curve C_3 ist, die mit der Entstehung derselben als Tripelcurve eines Netzes von Kegelschnitten enge zusammenhängt. Es seien drei Kegelschnitte U, V, W gegeben. Alsdann liegen die 18 Ecken der V und W, W und U, U und V umschriebenen Vierseite auf einer Curve C_3; die Tangentenpaare, welche man von zwei gegenüberliegenden Ecken etwa des ersten Vierseits an den dritten Kegelschnitt legen kann, begegnen sich in vier weiteren Punkten der Curve, von der man so im Ganzen 54 Punkte erhält. Chasles scheint hiernach den Satz gekannt zu haben: „Drei nicht zu einer Schar gehörige Kegelschnitte U, V, W empfangen Tangentenpaare, welche in Involution liegen, aus den Punkten einer bestimmten Curve dritter Ordnung", der ausdrücklich von Cayley [XXXVI, 29] ausgesprochen wurde. Er fügt noch eine

*) Chasles, Sur la génération des focales, extrait d'une lettre etc., Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 207—208.

**) M. Chasles, correspondant de l'Académie, dans une lettre adressée à M. Quetelet, fait part de différens résultats géometriques etc., Bull. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 2, 1835, S. 35—40.

***) Den Specialfall concentrischer Kreise giebt van Rees am Schlusse seiner Abhandlung. Man vergleiche noch die Abhandlung: A. Q., Sur quelques problèmes relatifs aux points brillans dans les courbes réfléchissantes, Quet. Corr., Bd. 3, 1827, S. 221—223.

mechanische Erzeugung an, bei welcher sich Curven C_3 ergeben. Von den Schenkeln eines rechten Winkels gehe der eine beständig durch einen festen Punkt P der Ebene, während ein Punkt R des anderen eine Gerade beschreibt. Gelangt nun bei dieser Bewegung der Scheitel des rechten Winkels nur einmal in den Punkt P, so beschreiben mit dem rechten Winkel fest verbundene Punkte rationale Curven C_3, speciell die Punkte des P enthaltenden Schenkels Focalen.

3. Ein Briefwechsel zwischen Chasles und Quetelet zeigt, wie langsam sich manche uns jetzt so geläufige Anschauungsweisen entwickelten. Ein Cartesisches Oval, ein in bipolaren Coordinaten durch die Gleichung

$$\alpha_1 r_1 + \alpha_2 r_2 = 2a$$

dargestelltes Gebilde, hat, wie an früherer Stelle erläutert wurde, die Eigenschaft, die von dem einen Pol ausgehenden Strahlen bei einem bestimmten Brechungsexponenten in Strahlen zu brechen, die durch den anderen Pol hindurchgehen. Sie besitzt aber noch eine zweite sehr merkwürdige optische Eigenschaft, wie Quetelet entwickelt.*) Werden die von einem Punkte F ausgehenden Strahlen an einem Kreise gebrochen, so ist ein Cartesisches Oval die zugehörige „caustique secondaire“, d. h. eine ganz bestimmte Evolvente der Curve, welche die gebrochenen Strahlen umhüllen.**) Hieraus kann nun (S. 115) eine sehr anschauliche räumliche Entstehungsweise der Ovale abgeleitet werden, welche bei einem festen Brechungsverhältnis — α_1 und α_2 sind alsdann constant — zu zwei festen Brennpunkten gehören. Beschreibt man über dem in der Mannigfaltigkeit vorkommenden Kreise eine Kugel und bildet dieselbe stereographisch auf die Ebene ab, so entstehen die betrachteten Curven aus den Durchdringungscurven der Kugel mit Kegeln, die einen Kreis mit einander gemein haben. Die Spitzen dieser Kegel gehören einer Geraden an, deren Schnittpunkte mit der Kugel in die gemeinschaftlichen Brennpunkte projicirt werden. Die Curve ist ferner die orthogonale Projection der Durchdringungscurve zweier Rotationskegel mit zur Projectionsebene senkrechten Axen (S. 111). In einem Brief an Chasles giebt Quetelet***) noch andere Beispiele ebener Curven C_4, die sich aus der Durchdringungscurve zweier Oberflächen F_2 durch Projection ableiten lassen, bei allen Curven C_3 wird diese Art der Entstehung als möglich nachgewiesen. Im Anschlufs hieran stellt Quetelet (S. 195) den Satz auf, dafs jede ebene Curve C_3 oder C_4 als Central-Projection der Durchdringungscurve R_4 zweier Oberflächen F_2 und F_2' angesehen

*) Quetelet, Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 109—116.

**) Vergl. XIV, 5.

***) Quetelet, Sur les lignes aplanétiques. — Sur les lignes colorées que produit etc., et en général sur les lignes du troisième degré, Quet. Corr, Bd. 5, 1829, S. 190—196.

werden kann. Chasles äufsert sich zu dieser Frage in zwei Briefen, die im April und Mai 1829 abgefafst sind.*) Ursprünglich sei er ebenfalls, erklärt er in dem ersteren, der Meinung Quetelet's gewesen. Eine genauere Untersuchung habe ihm jedoch gezeigt, dafs die Projection der Raumcurve R_4 höchstens acht Tangenten aus einem Punkt erhalte, während doch bei Lacroix das Beispiel einer Curve C_4 vorkomme, welche aus einem Punkte zehn Tangenten empfängt. In dem zweiten Briefe glaubt er jedoch seinen Einwurf zurücknehmen zu müssen; er bekennt, zu der Meinung zurückgekehrt zu sein, dafs die Klasse einer ebenen Curve C_4, die aus der Schnittcurve zweier Oberflächen F_2 durch Projection entsteht, zwischen den Grenzen 3 und 12 schwanken kann. Es folgen dann einige Auslassungen über ebene Curven dritter Ordnung; man kann drei grofse Gattungen von Curven C_3 unterscheiden, die der Reihe nach aus Curven von der sechsten, vierten und dritten Klasse bestehen. Jede Curve C_3 besitzt entweder drei Wendepunkte in gerader Linie oder einen Wendepunkt. Im Aperçu historique stellt jedoch Chasles**), freilich immer noch in nicht ganz bestimmter Form, den Satz auf, die Projection einer Raumcurve R_4 sei eine Curve von specieller Art, nämlich eine Curve C_4 mit zwei Doppelpunkten. Man könne hieraus schliefsen, dafs die Curve C_4 von der achten Klasse sei, so dafs also die Raumcurve R_4 acht Tangentialebenen aus einer beliebigen Geraden erhalte, die zugehörige abwickelbare Fläche vom achten Grade sei. Ganz ähnlich können nur specielle Curven C_3, solche mit Doppelpunkt, als Projectionen räumlicher Curven R_3 aufgefafst werden. Im ersteren Falle können die Doppelpunkte imaginär werden, als Beispiel führt Chasles hier das Cartesische Oval und die Fufspunktcurve eines Kreises an, die zwei im Unendlichen liegende conjugirt-imaginäre Doppelpunkte besitzen.

4. Der Punkt P, von dem aus man die Durchdringungscurve zweier Oberflächen F_2' und F_2'' projicirt, kann mit derselben durch eine dritte Oberfläche F_2 verbunden werden, welche zwei von P ausgehende reelle oder nicht reelle Gerade besitzt. Beide Geraden sind Sehnen der Curve und schneiden eben deshalb die beiden Doppelpunkte aus. Diese so sehr einfache und uns jetzt so geläufige Überlegung ist ziemlich gleichzeitig von Hesse***) und Salmon†) gegeben worden.

*) Chasles. Sur les courbes du troisième et du quatrième degré, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 231—233, 234—236.

**) Chasles, Aperçu historique, Paris 1837, S. 249.

***) Hesse, Über die Wendepuncte der algebraischen ebenen Curven und die Schmiegungs-Ebenen der Curven von doppelter Krümmung, welche durch den Schnitt zweier algebraischen Oberflächen entstehen, Crelle's Journ., Bd. 41, 1851, S. 272—284 (Ludwig Otto Hesse's Gesammelte Werke. Herausgegeben von Dyck, Gundelfinger, Lüroth, Noether, München 1897, S. 263—278 (S. 278)).

†) Salmon, On the classification of Curves of double curvature, Camb. Dubl. Journ., Bd. 5 (9), 1850, S. 23—46 (S. 42).

Der letztere hatte bereits in einer früheren Abhandlung*) den Satz in folgender Weise bewiesen. Die Schnittlinie l der Polarebenen des Punktes P nach F_2' und F_2'' ist die Polare von P für die beiden Kegelschnitte derselben, welche in der durch P und l festgelegten Ebene liegen. Deshalb zerfallen die vier Schnittpunkte dieser Kegelschnitte in zwei Paare, welche durch P von l harmonisch getrennt und daher in Doppelpunkte projicirt werden.

5. Bei der Besprechung des barycentrischen Calcüls wurde mit Nachdruck auf Möbius' schöne Entwickelung über die Raumcurven R_3 hingewiesen [XXIII, 9]. Das erste Auftreten der Curve bei Chasles liegt um zwei Jahre später und findet sich in dem ersten der beiden oben genannten Briefe. Es handelt sich hier lediglich um den Satz, dafs jeder über der Curve stehende Kegel, dessen Spitze ihr angehört, vom zweiten Grade ist. Chasles giebt demselben allerdings (S. 233) die irrige Form: „Die Raumcurve R_3 ist der Ort der Spitzen aller Kegel zweiten Grades, welche durch sechs Punkte hindurchgehen"; derselbe Satz findet sich noch in der ausführlicheren Behandlung im Aperçu historique.**) Weddle***) hat hieran die Bemerkung geknüpft, dafs der frägliche Ort in Wirklichkeit eine Fläche vierter Ordnung ist. An früherer Stelle [XXII, 4] habe ich bereits erörtert, dafs bei der Betrachtung der allgemeinsten congruenten Transformation des Raumes die Raumcurve R_3 als auch die zugehörige abwickelbare Fläche F_4 (dritter Klasse) sich Chasles darbot; die enge Zusammengehörigkeit beider Gebilde tritt in der Notiz von 1829 in dem zu weit gegriffenen Satze hervor: „Die Ebenen der Kegelschnitte, die sechs Ebenen berühren, umhüllen die aus den Schmiegungsebenen einer Raumcurve R_3 bestehende abwickelbare Fläche F_4."

6. Ich will hier noch zwei Abhandlungen erwähnen, in denen die Schnittcurve einer Kugel mit einem Rotationskegel untersucht wird, dessen Spitze S ihr angehört. Als Durchmesser (AB) der Curve bezeichnet Reifs†) jede Sehne der Curve, welche die Axe des Kegels trifft, ihr Mittelpunkt beschreibt einen Kreis, dessen Ebene zur Axe senkrecht steht. Von anderen Eigenschaften mag erwähnt werden, dafs $AB^2 + A_1B_1^2$ constant ist, wenn die Ebenen SAB und SA_1B_1

---

*) Salmon, On the degree of a surface reciprocal to a given one, Camb. Dubl. Journ., Bd. 2 (6), 1847, S. 65—73 (S. 68).

**) Chasles, Relations entre sept points d'une courbe à double courbure, du troisième degré. — Diverses questions où ces courbes se présentent, Aperçu historique, Note 33, S. 403—407 (S. 403). Chasles hat den Fehler 1861 verbessert (Comptes rendus, Bd. 52, S. 1159).

***) Weddle, On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane. — Part II, Camb. Dubl. Journ., Bd. 5 (9), 1850, S. 58—69 (Fufsnote zu S. 69).

†) Reifs, Propriétés de l'intersection d'un cône de révolution et d'une sphère, le sommet du cône se trouvant sur la surface de la sphère, Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 355—362.

aufeinander senkrecht stehen, dafs ferner $SA + SB$ constant ist. Chasles*) hat die Beweise von Reifs, der vorzugsweise rechnend vorgeht, wesentlich vereinfacht. In Verbindung mit seinen Untersuchungen über Kegel zweiten Grades war Chasles, wie oben [XXI, 10] näher ausgeführt wurde, zu einigen Resultaten über den sphärischen Kegelschnitt gelangt, in einem früheren Capitel [X] wurden mehrere ältere Arbeiten erwähnt, welche die Durchdringungscurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung behandelten.

XXVI. Büschel und Bündel algebraischer Curven und Flächen. Schnittpunktsätze. Polareigenschaften.

1. Die Arbeiten, welche auf den nächsten Seiten geschildert werden, bedienen sich zwar ausschliefslich rechnender Methoden; auf den in ihnen geschaffenen Begriffen beruht indes in so hohem Mafse nicht blofs die Entwickelung der analytischen, sondern auch die der synthetischen Geometrie, dafs ihre Schilderung in diesem Referat keiner besonderen Rechtfertigung bedarf. Sie alle gehen auf die analytische Darstellung des Büschels zurück. Nachdem Lamé**) für Geraden und Kegelschnitte einerseits, für Ebenen und Oberflächen zweiter Ordnung andererseits auf die einfache geometrische Deutung eines Ausdrucks von der Form

$$e_1 F_1 + e_2 F_2 = 0$$

hingewiesen hatte, müfste, so sollte man meinen, die so nahe liegende Verallgemeinerung auf Curven und Flächen beliebig hoher Ordnung ohne weiteres erfolgen. Thatsächlich ist dieser so leichte Schritt erst von Gergonne***) gemacht worden. Die Anzahl der Punkte, welche eine Curve C_m festlegen, ist, sobald m den Wert 2 übersteigt, nicht gröfser ($m = 3$) oder kleiner ($m > 3$) als die Anzahl der Schnittpunkte, m^2, zweier Curven C_m und C'_m; einzelne der letzteren sind deshalb von den übrigen abhängig; jedenfalls ergeben die drei Curven m^{ter} Ordnung

$$M = 0, \quad M' = 0, \quad M + \lambda M' = 0$$

paarweise die gleichen Schnittpunkte, und die letzte Gleichung liefert sämtliche durch die Schnittpunkte der beiden ersten hindurchgehenden Curven m^{ter} Ordnung. Nimmt nun für irgend einen Wert von λ die letztere Gleichung die Form

$$PQ = 0$$

*) Chasles, Démonstration géométrique des propriétés de la courbe d'intersection d'une sphère etc., Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 44—47.

**) a. a. O. S. 35*. [Vergl.: IV, 3 u. X, 1].

) a. a. O. S. 162. Erste Spuren dieser Anschauung finden sich allerdings schon bei Waring. Vergl. S. 200*.

an, wo P und Q Formen vom p^{ten} und q^{ten} Grade in x und y sind, so enthalten die beiden Curven $P = 0$, $Q = 0$, zusammen genommen, die m^2 Schnittpunkte der Curven $M = 0$, $M' = 0$. Enthält umgekehrt eine Curve C_p $(P = 0)$ pm Schnittpunkte von $M = 0$ und $M' = 0$, so mufs bei geeigneter Wahl des Coefficienten λ der Ausdruck $M + \lambda M'$ den Factor P enthalten. Der zweite Factor Q, gleich Null gesetzt, stellt dann eine Curve q^{ter} Ordnung dar, welche die übrigen qm Schnittpunkte enthält. Mit diesen Wendungen etwa begründet Gergonne das Theorem: „Wenn $p(p+q)$ von den $(p+q)^2$ Schnittpunkten zweier Curven C_{p+q} und C'_{p+q} sich auf einer Curve C_p befinden, so gehören die $q(p+q)$ übrigen einer Curve C_q an" (S. 220). Die gegebenen Curven können ebenfalls zerfallen. Die weiteren Schnittpunkte einer Curve C_m mit den Tangenten, deren Berührungspunkte einer Transversale angehören, liegen z. B. auf einer Curve $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung (S. 225). Liefs sich Gergonne hier den interessantesten Specialfall des Satzes, den Satz von der Satellite bei Curven C_3, und den in ihm enthaltenen Wendepunktsatz entgehen, so entnahm er andererseits aus der Beobachtung, dafs jede der beiden Curven C_{p+q} und C'_{p+q} aus $p+q$ Strahlen bestehen kann, den eleganten Satz: „Ist ein $2m$-Eck einem Kegelschnitt eingeschrieben, so trifft das eine System nicht aneinander stofsender Seiten das andere aufserhalb des Kegelschnittes selbst nur in Punkten einer Curve C_{m-2}" und gewann so, wie oben [II, 14] erörtert wurde, insbesondere einen äufserst einfachen Beweis des Pascal'schen Satzes $(m = 3)$.

Wenn jetzt drei Curven $M = 0$, $M' = 0$, $M'' = 0$ $(p+q)^{\text{ter}}$ Ordnung einer Curve p^{ter} Ordnung, $P = 0$, in denselben $p(p+q)$ Punkten begegnen, die Curven q^{ter} Ordnung $Q = 0$; $Q' = 0$; $Q'' = 0$ die übrigen Schnittpunkte von M', M''; M'', M; M, M' enthalten, so ist

$$\lambda M + M'' = PQ', \quad \lambda' M' + M'' = PQ.$$

Hieraus folgt:

$$\lambda M - \lambda' M' = P(Q' - Q).$$

Die Curven $Q' - Q = 0$ und $Q'' = 0$ sind also mit einander identisch; man hat das Theorem: „Treffen drei Curven C_{p+q}, C'_{p+q}, C''_{p+q} eine Curve C_p in denselben $p(p+q)$ Punkten, so haben die drei Curven C_q, C'_q, C''_q, von denen eine jede $q(p+q)$ aufserhalb C_p gelegene Schnittpunkte zweier der genannten Curven enthält, dieselben q^2 Punkte mit einander gemein" (S. 227). Ein Beispiel dieses Theorems bietet die projectivische Verallgemeinerung des Satzes von den Radicalaxen dreier Kreise.

Wichtig ist, dafs das obige Theorem auch dann noch eine Bedeutung besitzt, wenn p verschwindet. Eine ganz analoge Betrachtung beweist nämlich den folgenden Satz: „Den drei Büscheln C'_m, C''_m; C''_m, C_m; C_m, C'_m, die sich mit Hülfe dreier Curven C_m; C'_m; C''_m

bilden lassen, kann man auf unendlich viele Weisen drei Curven — die beiden ersten sind ganz willkürlich — entnehmen, die sich in denselben m^2 Punkten begegnen." Der Beweis dieses von Gergonne aufgestellten Satzes*) ist nach seiner obigen Entwickelung evident und in der That in dieser Form sogleich von Bobillier**) erbracht worden. Es wäre mit diesem Theorem offenbar der Begriff des Netzes zweiter Stufe gegeben. Sind U, V, W beliebige Curven n^{ter} Ordnung, so begegnen sich beliebig den Büscheln U, V und U, W entnommene Curven in einer Grundpunktgruppe des Netzes, und zwei beliebige Gruppen dieser Art können nach dem Satze durch eine Curve des Netzes verbunden werden. Die Gleichung des linearen Systems zweiter Stufe

$$\lambda M + \lambda' M' + M'' = 0$$

wird bei Gergonne nur im Raume, zur Darstellung eines Bündels von Flächen F_m mit m^3 gemeinsamen Schnittpunkten, benutzt. Daſs die obige Gleichung eine geometrische Bedeutung auch dann besitzt, wenn $M = 0$, $M' = 0$, $M'' = 0$ ebene Curven gleicher Ordnung sind, ist von Gergonne nicht bemerkt worden. Als einen ersten Ansatz zu hierher gehörigen Entwickelungen kann aber der erwähnte Hinweis Bobillier's gelten, nach welchem die einem trimetrischen Coordinatensystem angepaſsten Entwickelungen statt auf die Geraden einer Ebene auch auf Curven n^{ter} Ordnung Anwendung finden können [XXIII, 2].

2. Zu räumlichen Betrachtungen übergehend, stellt Gergonne zunächst den auf Curvenbüschel bezüglichen Theoremen entsprechende über Flächenbüschel an die Seite. Zwei Flächen F_{p+q} und F'_{p+q}, welche eine Fläche F_p in derselben Curve $R_{p(p+q)}$ schneiden, treffen sich überdies in einer Curve $R_{q(p+q)}$, die einer Fläche F_q angehört. Hiernach schneiden sich z. B. zwei Flächen F_2, die einen Kegelschnitt mit einander gemein haben, noch in einem zweiten Kegelschnitt (S. 239). Ein weiterer Specialfall ist (S. 238) der Satz: „Begegnen sich zwei Tripel von Ebenen in sechs Geraden einer Fläche F_2, so haben sie überdies drei in einer Ebene liegende Gerade mit einander gemein"; man erkennt in ihm Dandelin's Hülfssatz zum Beweise des Pascal'schen Satzes [II, 10]. Weniger glücklich ist nun Gergonne bei der Behandlung des Flächenbündels. Treffen alle Flächen F_{p+q} eines Bündels eine Fläche F_p in den gleichen $p(p+q)^2$ Punkten, so liegen die übrigen $q(p+q)^2$ Grundpunkte des Bündels auf

*) Théorèmes de géométrie, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S 255—256. Dieser und der entsprechende Satz für vier Flächen m^{ter} Ordnung werden auch dual umgeformt.

**) Bobillier, Démonstration des quatre théorèmes de géométrie proposés à la page 255 du précédent volume, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 25—28.

einer Fläche F_q. Diesem Satz giebt nun Gergonne eine offenbar unrichtige Verallgemeinerung. Treffen die Flächen F_m eines Bündels die Schnittlinie zweier Flächen F_p und F_s in denselben $p \cdot s \cdot m$ Punkten, so glaubt Gergonne (S. 250) in dem Bündel zwei Flächen nachweisen zu können, von denen die eine F_p, die andere F_s vollständig enthält. Demgemäfs würden sich die m^3 Grundpunkte des Bündels auf vier verschiedene Raumcurven verteilen.

3. Ein letzter Schritt führt von den Entwickelungen Gergonne's zur endlichen Lösung jenes wohlbekannten, bereits bei Maclaurin*) auftretenden Paradoxons, das gewöhnlich nach Cramer bezeichnet wird. Maclaurin war durch Induction zu dem Ergebnis gelangt, dafs zwei Curven C_m und C_n mn Punkte mit einander gemein haben, und dafs folglich die Anzahl der zur Bestimmung einer Curve C_n hinreichenden Punkte ($n \geq 3$) gröfser oder nicht kleiner als die ihrer Schnittpunkte mit einer zweiten Curve C_n' ist. Bereits Euler**) fand die richtige Erklärung dieser Erscheinung darin, dafs ν lineare Gleichungen nicht immer zur Bestimmung von ν Unbekannten hinreichen, dafs nämlich einige von ihnen die Folge der anderen sein können. Insbesondere können neun Punkte, durch die man eine Curve C_3 eindeutig festlegen will, in der Ebene völlig willkürlich gewählt werden. Hingegen ist der neunte Schnittpunkt zweier Curven C_3, die acht gegebene mit einander gemein haben, durch die letzteren fixirt. Die neun gemeinsamen Punkte zweier Curven C_3' und C_3'' sind noch in unendlich vielen Curven C_3 enthalten. Cramer***) übertrug dies auf Curven im allgemeinen. Eine Curve C_n ist durch $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte beliebiger Lage bestimmt; hingegen sind $\frac{1}{2}n(n+3)$ Schnittpunkte zweier Curven C_n' und C_n'' in unendlich vielen anderen Curven C_n enthalten; Cramer schliefst jedoch (S. 79) seine Darlegung mit den Worten: „ce qui est un véritable paradoxe“.

Das Paradoxe der Erscheinung schwand in der That erst völlig, nachdem man in Verallgemeinerung des Lamé'schen Gedankens zu einer einfachen Darstellung des Curvenbüschels gelangt war. Man pflegt nach dem Vorgange von Plücker†) folgende Betrachtungen anzustellen. Sind $\frac{1}{2}n(n+3) - 1$ Punkte der Ebene zunächst in zwei Curven C_n' und C_n'' ($F_1 = 0$ und $F_2 = 0$) enthalten, so bestimmt die Gleichung

$$e_1F_1 + e_2F_2 = 0$$

*) Vergl. I, 8.

**) Euler, Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes, Hist. de l'ac., Année 1748, Berlin 1750, S. 219—233.

***) Cramer, Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750, S. 78.

†) Plücker, Recherches sur les courbes algébriques de tous les degrés, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 und 1829, S. 97—106 (Abh., Bd. 1, S. 76—82).

Curven C_n, welche die Schnittpunkte von C'_n und C''_n enthalten, und von denen eine durch einen beliebigen Punkt der Ebene hindurchgeht, also mit der „im allgemeinen“ einzigen Curve zusammenfällt, welche die jetzt gegebenen $\frac{1}{2}n(n+3)$ Punkte enthält. „Alle $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ feste Punkte enthaltenden Curven C_n schneiden sich „im allgemeinen“ noch in $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ weiteren festen Punkten der Ebene.“ Eine Curve C_n ist in der obigen Form aber auch dann dargestellt, wenn allgemeiner $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ lineare homogene Gleichungen unter den Coefficienten ihrer Gleichung obwalten. Bei einem Kegelschnitt führt z. B. die Forderung, dafs die Polare eines Punktes P durch einen Punkt Q hindurchgeht, auf eine lineare Beziehung unter den Coefficienten seiner Gleichung. Sind also von einem Kegelschnitt $4-k$ Punkte und k Paare conjugirter Punkte gegeben, so geht er noch durch k feste Punkte hindurch (S. 82). Ein specieller Fall dieses Satzes tritt ein, wenn die Richtungen zweier conjugirten Durchmesser gegeben sind. Mit ihm in Verbindung steht der Brianchon-Poncelet'sche Satz [III, 11], den Plücker als einfachste Anwendung seines Princips*) voranstellt: „Alle gleichseitigen Hyperbeln, welche drei Punkte enthalten, begegnen sich in einem bestimmten vierten Punkte.“ In einer zweiten Abhandlung entwickelt Plücker**) die räumlichen Gegenstücke zu diesen Sätzen: „Alle Oberflächen F_n, welche $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-3$ feste Punkte mit einander gemein haben, begegnen sich in $n^3-\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)+3$ weiteren festen Punkten; alle Flächen, die $\frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3)-2$ Punkte mit einander gemein haben, begegnen sich in sämtlichen Punkten einer Curve der Ordnung n^2.“ In erster Linie ergeben sich die Sätze: „Sämtliche Oberflächen F_2, welche sieben Punkte mit einander gemein haben, begegnen sich noch in einem bestimmten achten Punkte. Die Oberflächen F_2, welche acht Punkte mit einander gemein haben, treffen sich in einer Curve vierter Ordnung.“ Anstatt gegebener Punkte können Paare conjugirter Punkte eintreten.***) Sind z. B. zu vier Punkten ihnen conjugirte Geraden gegeben, so beschreibt die Fläche F_2 einen Büschel. In beiden Arbeiten sind auf Grund des Dualitätsgesetzes entsprechende Sätze über Gebilde n^{ter} Klasse beigefügt.

Es ist noch auf eine von Gergonne herrührende Fufsnote der

---

*) Die beiden unendlich fernen Kreispunkte sind für alle gleichseitigen Hyperbeln conjugirt. Bezieht man eine gleichseitige Hyperbel auf ein rechtwinkliges Axenkreux, so verschwindet die Summe der Coefficienten von x^2 und y^2. Von diesem Umstand geht Plücker aus (S. 80).

**) Plücker, Recherches sur les surfaces algébriques de tous les degrés, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 129—137 (Abh., Bd. 1, S. 83—88).

***) Aus der Umkehrung dieser Anschauung entstehen (S. 88) Sätze, die Bobillier ziemlich primitiv etwas früher entwickelt hatte [XXVI, 5].

Arbeit (S. 133) hinzuweisen. Von einem Ungenannten*) war der Satz entwickelt worden: „Alle Flächen zweiter Ordnung, welche sieben Ecken eines Hexaeders allgemeinster Art enthalten, gehen auch durch die achte Ecke hindurch und sind folglich dem Hexaeder umschrieben." Der duale Satz war von Steiner**) hinzugefügt worden. Derselbe bemerkt mit Bezug hierauf, daſs „nach einer gewissen Regel, welche die französischen Geometer „théorie des polaires réciproques" nennen, und nach welcher die Dualität solcher Sätze erschlossen wird", der eine Satz aus dem anderen folge, er giebt aber dann noch eine besondere Herleitung des zweiten Satzes, wobei er sich des Polarsystems einer Fläche zweiter Ordnung bedient, die sieben Ebenen eines allgemeinsten Octaeders berührt. Gergonne macht im Anschluſs daran darauf aufmerksam, daſs die drei Paare gegenüberliegender Ebenen eines Hexaeders als Flächen zweiter Ordnung

$$M = 0, \quad M' = 0, \quad M'' = 0$$

aufgefaſst werden können; die durch sieben Ecken des Hexaeders bestimmten Flächen F_2 seien dann sämtlich durch Gleichungen von der Form

$$\lambda M + \lambda' M' + M'' = 0$$

dargestellt und hätten folglich auch die letzte Ecke mit einander gemein. Übrigens ist, wie Gergonne noch hinzufügt, das Theorem auch in seinem Satze enthalten: „Liegen vier von den acht Schnittpunkten dreier Flächen F_2 in einer Ebene, so ist dasselbe mit den vier anderen der Fall."

4. Einige Jahre später kommt Plücker***) nochmals auf diese Theoreme zurück. Er entwickelt zunächst die oben angegebenen Sätze über Curven C_n und $\mathfrak{K}_n$ und ihre allgemeinere Fassung bei Zulassung linearer Beziehungen unter den Coefficienten ihrer Gleichungen. Zu den speciellen Sätzen über Büschel und Scharen von Kegelschnitten tritt (S. 250) z. B. folgender hinzu: „Die Kegelschnitte, welche drei feste Tangenten berühren und von irgend einem Punkte aus Paare aufeinander senkrechter Tangenten empfangen, berühren noch eine vierte Tangente." In der Folge werden beiläufig Curven C_3 behandelt, welche acht aufeinanderfolgende Punkte und noch einen weiteren Punkt mit einander gemein haben; der neunte Schnittpunkt gehört z. B. der Tangente des Osculationspunktes an, wenn sechs der acht aufeinander folgenden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen. Nur

*) Bemerkung über ein Polyëder. (Von einem Ungenannten.) (Aufsatz 18), Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 199—200.

**) Steiner, Anmerkungen zu dem Aufsatze No. 18, Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 205—206 (Ges. W., Bd. 1, S. 169—172).

***) Plücker, Analytisch-Geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 242 ff.

in einzelnen singulären Punkten, unter denen ihre Wendepunkte auftreten, kann eine Curve C_3 eine neunpunktige Osculation mit anderen Curven C_3 eingehen (S. 245). Noch 1828 stellt Plücker*) ohne Bedenken den Satz auf: „$\frac{1}{2}n(n+3)-1$ beliebige Punkte einer Curve C_m sind in unendlich vielen Curven C_n $(n > m)$ enthalten, welche dieselben mn Punkte mit C_m gemein haben, sobald $\frac{1}{2}n(n+3)-1 < mn$ ist.“ Erst 1837 gewann er durch Einordnung zerfallender Curven in einen Büschel von Curven C_n aus dem Satze von den notwendigen Punkten einen seitdem typisch gewordenen Beweis für den Satz: „$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ von den Schnittpunkten zweier Curven C_n und C_m sind $(n > m)$ im allgemeinen durch die übrigen bestimmt“, dessen elegante rechnende Herleitung durch Jacobi ein Jahr vorher erfolgt war. An späterer Stelle wird auf diese und die entsprechenden räumlichen Sätze näher eingegangen werden. Für jetzt sei nur daran erinnert, dafs Poncelet von dem Jacobi'schen Satze den Fall erörtert hat, in dem die Curve C_m aus m Geraden besteht, und bei einer aus drei Geraden bestehenden Curve C_3 eine höchst elegante Construction für den Zusammenhang ihrer $3n$ Schnittpunkte mit einer Curve C_n gegeben hat. Auch von dem Satze: „Liegen pm Schnittpunkte zweier Curven C_{p+q} und C_m auf einer Curve C_p, so gehören die qm übrigen einer Curve C_q an“, trat bei Poncelet der specielle Fall auf, in dem C_m in m Gerade zerfiel [XXIV, 9].

5. Oben [XXIV, 2, 4, 5, 9, 12] hatten sich mehrere Ansätze zur Erörterung der Polarentheorie bei Curven C_n erkennen lassen. Es müssen hier mehrere Abhandlungen von Bobillier erwähnt werden, in denen auf rechnendem Wege eine erste Gruppe von Polareigenschaften abgeleitet wird. Nach modernen Begriffen gestaltet sich die Entwickelung ziemlich umständlich, da Bobillier von einer nicht homogenen Gleichungsform ausgeht.

Die früheste dieser Abhandlungen**), auf welche Steiner in der oben genannten Notiz rühmend Bezug nimmt, bezieht sich auf Flächen zweiter Ordnung. Soll eine Fläche F_2

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Ezx + 2Fxy + 2Gx + 2Hy + 2Kz + L = 0$$

durch sieben Punkte hindurchgehen, so kann man G, H, K beliebig annehmen; die übrigen Coefficienten sind dann lineare homogene Functionen dieser Gröfsen; da beispielsweise

$$L = \alpha G + \beta H + \gamma K$$

---

*) Plücker, Analytisch-Geometrische Entwicklungen, Bd. 1, Essen 1828 (S. 230, Fufsnote).

**) Bobillier, Démonstration des deux théorèmes de géométrie énoncés à la page 200 du présent volume, Gerg. Ann., Bd. 17, 1826 u. 1827, S. 360—366.

ist, so enthält die Polarebene des Anfangspunktes der Coordinaten

$$G(x+\alpha)+H(x+\beta)+K(x+\gamma)=0,$$

welche Werte G, H, K annehmen mögen, den Punkt $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$. Man hat also den Satz: „Die Polarebenen sämtlicher sieben Punkte enthaltenden Flächen F_2 hinsichtlich eines beliebigen Punktes — das ist der Anfangspunkt der Coordinaten — haben einen Punkt mit einander gemein.“ Für Flächen F_2 mit acht gemeinsamen Punkten ergiebt sich, indem erst einer, dann ein anderer derselben aufser Betracht bleibt, der Satz: „Geht eine Fläche F_2 durch acht Punkte hindurch, so beschreibt ihre Polarebene hinsichtlich eines beliebigen Poles einen Ebenenbüschel.“ Die dual gegenüberstehenden Sätze enthalten als Specialfälle die Theoreme: „Sind von einer Oberfläche F_2 sieben bezw. acht Tangentialebenen gegeben, so ist eine Ebene bezw. eine Gerade der Ort des Mittelpunktes.“ Dieselben waren in der Aufgabe, welche Bobillier in der Überschrift seiner Abhandlung erwähnt, zum Beweise vorgelegt. Ungefähr gleichzeitig hatte auch Poncelet*) die auf Büschel und Scharen von Flächen F_2 bezüglichen Sätze entwickelt. Poncelet stieg zu den räumlichen Sätzen unter Benutzung seines Hülfssatzes auf: „Die Polaren eines Punktes bezüglich der Kegelschnitte eines Büschels haben einen (reciproken) Punkt mit einander gemein.“**)

6. In einer zweiten Arbeit entwickelt Bobillier***) zunächst in ziemlich umständlicher Weise den beinahe in Vergessenheit geratenen — obwohl von Poncelet in Erinnerung gebrachten — Monge'schen Satz, dafs eine Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung die Berührungspunkte der Tangenten enthält, die sich von einem Punkte aus an eine Curve C_n legen lassen [V, 4, 10]. Die Gleichung $f(x, y)=0$ einer Curve C_n möge, indem man die Glieder gleicher Dimension zusammenfafst, die Form annehmen

$$f_n(x,y)+f_{n-1}(x,y)+\cdots+f_1(x,y)+f_0=0,$$

alsdann liegen (S. 91) die Berührungspunkte der Tangenten, die vom Anfangspunkt der Coordinaten ausgehen, auf der Curve C_{n-1}

$$f_{n-1}(x,y)+2f_{n-2}(x,y)+3f_{n-3}(x,y)+\cdots+nf_0=0,$$

was unter Zuziehung von Polarcoordinaten erwiesen wird. Andererseits liegen die Berührungspunkte der Tangenten einer bestimmten Richtung auf einer Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

*) Vergl. XXI, 2 und die zugehörige Berichtigung.

) Der Satz vom Mittelpunkt-Ort der Schar findet sich schon a. a. O. S. 161 (S. 268).

***) Bobillier, Démonstration de quelques théorèmes sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 und 1828, S. 89—98.

Diese Curve enthält, wenn die Richtung und mithin die Gröfse a sich ändert, stets dieselben $(n-1)^2$ Punkte. Die entsprechenden Resultate werden bei Oberflächen dargethan. Unter Benutzung der „méthode des projections“ gelangt Bobillier (S. 97) zu dem Ergebnis: „Die Polaren sämtlicher Punkte einer Geraden bezw. einer Ebene hinsichtlich einer Curve C_n bezw. einer Fläche F_n enthalten dieselben $(n-1)^2$ bezw. $(n-1)^3$ Punkte.“ Diese Eigenschaften lassen sich nun auf Curven und Flächen n^{ter} Klasse übertragen. Hierauf gelangt Bobillier*) zu der ganzen Reihe der successiven Polaren C_{n-1}, $C_{n-2}, \ldots, C_1$ einer Curve C_n hinsichtlich eines Punktes. Diejenigen des Anfangspunktes der Coordinaten besitzen bei der oben benutzten Darstellung von C_n die Gleichungen:

$$f_{n-1}(x, y) + 2 f_{n-2}(x, y) + \cdots + (n-1) f_1(x, y) + n f_0 = 0,$$
$$2 \cdot 1 f_{n-2}(x, y) + 3 \cdot 2 f_{n-3}(x, y) + \cdots + n(n-1) f_0 = 0,$$
$$\text{— — — — — — — — — — — — — — — — — —}$$
$$(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 f_1(x, y) + n(n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot f_0 = 0.$$

Unter Benutzung einer Coordinatentransformation entwickelt Bobillier in ziemlich complicirter Weise den Satz: „Die ersten Polaren von Punkten der Polargeraden C_1 eines Punktes enthalten diesen Punkt selbst.“ Auch dieser Satz wird auf Flächen ausgedehnt und alsdann in dualistischer Weise umgebildet.

7. In einer neuen Arbeit gelangt Bobillier**) zu dem Resultate: „Die Polarflächen eines Punktes P hinsichtlich der einem Bündel angehörigen Flächen F_n haben $(n-1)^3$ Punkte mit einander gemein, welche, wenn der Pol auf eine Ebene π beschränkt wird, einer Fläche $F_{3(n-1)}$***) angehören; dieselbe enthält die Pole von π nach den einzelnen Flächen des Bündels. Beschränkt man den Punkt auf eine Gerade l von π, so durchlaufen die Grundpunkte des Bündels erster Polaren eine bestimmte $F_{3(n-1)}$ angehörige Curve, die Schnittlinie zweier $F_{2(n-1)}$. Greift man einen Büschel des Bündels heraus, so erfüllen die Grundcurven seiner zu Punkten von l gehörigen Büschel erster Polaren eine jener Flächen $F_{2(n-1)}$“ (S. 267). Zur Er-

*) Bobillier, Recherches sur les lignes et surfaces algébriques de tous les ordres, ibidem, S. 157—166.

**) Bobillier, Recherches sur les lois générales qui régissent les lignes et surfaces algébriques, ibidem, S. 253—269.

***) Bobillier giebt die Gleichung dieser Fläche, wenn die Ebene ins Unendliche hinausrückt, $M = 0$, $M' = 0$, $M'' = 0$ drei bestimmende Flächen des Bündels sind, in der Form (S. 266):

$$\sum \pm \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{\partial M'}{\partial y} \cdot \frac{\partial M''}{\partial z} = 0.$$

Die Mittelpunkte der Flächen F_2 eines Bündels gehören einer solchen Fläche (einer F_3) an (Fufsnote zu S. 269).

läuterung zieht Bobillier den Fall $n = 2$ heran. Der Ort der Pole einer Ebene π nach den Flächen F_2 eines Bündels ist eine Fläche F_3, die zugleich jeden der Punkte Q enthält, der für alle F_2 des Bündels zu einem Punkte P von π conjugirt ist. Wird P auf eine Gerade l beschränkt, so durchläuft Q eine F_3 angehörige Curve, die Schnittlinie zweier Flächen G_2. Die Polarebenen der Punkte von l nach den Flächen eines im Bündel enthaltenen Büschels bilden Ebenenbüschel; die Axen derselben erfüllen eine Fläche G_2. Die Polargeraden von l nach den Flächen des Bündels treffen sämtlich die obige Curve zweimal (S. 268).

Bobillier stellt ferner folgenden Satz auf: „Ist ein Büschel von Flächen F_n gegeben und eine Gerade l, so wird eine und dieselbe Fläche $F_{2(n-1)}$ ausgefüllt von den Grundcurven der Büschel, welche die Polarfläche eines Punktes von l nach einer Fläche F_n des Büschels beschreibt, wenn man entweder den Punkt von l oder die Fläche F_n festhält. Wird l in einer Ebene π bewegt, so haben alle diese $F_{2(n-1)}$ eine Curve*) mit einander gemein, welche die Pole der Flächen F_n nach der Ebene enthält" (S. 262). Auch hier zieht Bobillier die Oberflächen zweiter Ordnung zur Erläuterung heran und bemerkt, dafs, sobald es sich um die unendlich ferne Ebene handelt, die Curve der Ort der Mittelpunkte wird. Bei einem Büschel ebener Curven C_n macht Bobillier auf die doppelte Entstehungsweise gewisser Curven $C_{2(n-1)}$ aufmerksam, die einerseits die Pole der einzelnen Curven nach einer Geraden l enthält, andererseits die Punktgruppen, in deren jeder sich die Polarcurven eines Punktes von l nach allen Curven des Büschels begegnen. Den auf Kegelschnitte bezüglichen Fall hebt er hervor, ohne Poncelet's zu gedenken. Bobillier rückt die Gerade l bezw. die Ebene π zunächst ins Unendliche hinaus und gelangt zu den bezeichneten Sätzen erst durch die „méthode des projections". Auf die entwickelten Eigenschaften wird das Dualitätsprincip angewendet.

8. In zwei letzten Arbeiten greift Bobillier endlich behufs Vereinfachung seiner Beweise auf die von Monge gegebene Gleichung

*) Es bleibt unklar, ob Bobillier die Ordnung der Curve $3(n-1)^2$ richtig erkannt hat, das heifst sich davon Rechenschaft gegeben hat, dafs zwei $F_{2(n-1)}$ auch in einer veränderlichen Curve, der Grundcurve eines bestimmten Büschels erster Polaren, sich begegnen. Er bezeichnet (S. 261) für den Fall, dafs die Ebene im Unendlichen liegt, $M = 0$ und $M' = 0$ zwei beliebige Flächen des vorliegenden Büschels sind, das Gebilde als gemeinsame Curve der Flächen

$$\frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial M'}{\partial z} - \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial M'}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial M'}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M'}{\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial M}{\partial x}\frac{\partial M'}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial y}\frac{\partial M'}{\partial x} = 0.$$

Diese drei Gleichungen zählen, wie er sich ausdrückt, nur für deren zwei.

der Polare, bezw. Polarfläche eines Punktes zurück. Bei der Curve C_n oder $f(x, y) = 0$ enthält die Curve $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(y-b) - nf = 0$$

die Berührungspunkte der von P oder (a, b) ausgehenden Tangenten.*) Eine Gerade, welche der Pol P durchläuft, hat bei geeigneter Wahl des Coordinatensystems die Gleichung $y = \alpha \cdot x$. Aus der Gleichung der Polare von P

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y - nf - a\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 0$$

wird alsdann evident, dafs die Polarcurven der Punkte einer Geraden einem Büschel angehören. Indem man den Anfangspunkt der Coordinaten in einen beliebigen Punkt verlegt, kann man seine Polarcurven nach den Curven C_n eines Büschels

$$f(x, y) + \mu g(x, y) = 0$$

in der Form darstellen:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y - nf + \mu\left(\frac{\partial g}{\partial x}x + \frac{\partial g}{\partial y}y - ng\right) = 0.$$

Diese Polaren bilden also ebenfalls einen Büschel. Ist $g(x, y)$ eine homogene Function n^{ten} Grades, so verschwindet der mit μ multiplicirte Ausdruck identisch; man gewinnt den Satz: „Liegen die Schnittpunkte zweier Curven C_n und C'_n auf n Geraden, die von einem Punkte P ausgehen, so haben sie hinsichtlich P die gleiche erste Polare.“ Die moderne Geometrie kennt den Satz: „Liegen mn Schnittpunkte zweier Curven C_n und C'_n auf m von einem Punkte P ausgehenden Geraden, so fallen ihre $(n-m+1)^{\text{ten}}$ Polaren und damit alle folgenden Polaren hinsichtlich P zusammen.“ Der eine bei Kegelschnitten wohlbekannte Anfang dieses Theorems $(m = n)$ wird hier bei Bobillier für Curven C_n entwickelt, den anderen Ausläufer $(m = 2)$ desselben fanden wir bei Poncelet in einem Zusatz zum Theorem von Cotes; specielle Fälle desselben lassen sich in Sätzen von Newton, Maclaurin und Chasles erkennen [XXIV, 1, 2, 5, 9].

Bobillier überträgt dies nun auf den Raum.**) Die ersten Polaren der Flächen F_n eines Büschels oder Bündels hinsichtlich eines beliebigen Punktes bilden einen zweiten Büschel oder Bündel. Kommt in dem Büschel ein Kegel n^{ter} Ordnung vor, so haben für seine Spitze alle Flächen F_n dieselbe erste Polarfläche. Liegen die n^3

*) Bobillier, Recherches sur les lois générales qui régissent les courbes algébriques, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 106—114.

**) Bobillier, Recherches sur les lois générales qui régissent les surfaces algébriques, ibidem, S. 138—150.

Grundpunkte des Bündels auf n^2 Geraden verteilt, die von einem Punkte P ausgehen, so besitzen alle seine Flächen F_n für P die gleiche Polarfläche.

9. Sehr viel einfacher ergeben sich die Polareigenschaften, wenn man von einer homogenen Form der Curvengleichung Gebrauch macht. Mit Anwendung derselben entwickelte Plücker*) den wichtigen Satz von der gemischten Polare. Bei der Darstellung einer Curve $U = 0$ im trimetrischen Coordinatensystem hat die Polare des Punktes p', q', r' die Gleichung

$$p'\frac{\partial U}{\partial p} + q'\frac{\partial U}{\partial q} + r'\frac{\partial U}{\partial r} \equiv U' = 0.$$

Die Gleichung stellt nämlich, wenn man in $\frac{\partial U}{\partial p}, \frac{\partial U}{\partial q}, \frac{\partial U}{\partial r}$ die Coordinaten p_0, q_0, r_0 eines Punktes P_0 der Curve $U = 0$ einsetzt, p', q', r' zu laufenden Coordinaten macht, die Tangente von P_0 dar.

Die Polare dieser Curve nach einem zweiten Punkte p'', q'', r'' hat also die Gleichung

$$p''\frac{\partial U'}{\partial p} + q''\frac{\partial U'}{\partial q} + r''\frac{\partial U'}{\partial r} = 0.$$

Man sieht sofort, daſs die neue Gleichung bei Vertauschung der beiden Punkte P', P'' sich nicht ändert. Nimmt man also nach zwei Punkten P', P'' die ersten Polaren, so fällt die Polare der ersten Curve nach P'' mit derjenigen der zweiten Curve nach P' zusammen. Dieser Satz kann auf Gruppen von 3, 4, ..., $n - 1$ Punkten ausgedehnt werden, auch gilt er für algebraische Flächen und ist der dualen Übertragung fähig.

*) a. a. O. S. 200.** (Nr. 46).

Dritter Teil.

Von Steiner bis auf Staudt (1832—1847).

Erster Abschnitt.

Kegelschnitte und einschalige Hyperboloide.

XXVII. Steiner's Systematische Entwickelung und daran sich anschliefsende Arbeiten.

1. Bereits an verschiedenen Stellen ist auf das Epoche machende Werk Steiner's*) hingewiesen worden, mit dem ich mich auf den folgenden Seiten beschäftige. Aus der Einleitung ist zu ersehen, mit welchen umfassenden Plänen sich der Verfasser trug, als das Werk die Presse verliefs. Hiernach enthält es die grundlegenden Entwickelungen eines Lehrgebäudes, dessen vollständiger Ausbau in vier weiteren Bänden erfolgen sollte. Es unterliegt keinem Zweifel, dafs der letzte dieser Bände, der fünfte der ganzen Reihe, am weitesten der Ausführung entgegengebracht war. Derselbe sollte eine ausführliche Behandlung der Curven und Flächen zweiten Grades, gestützt auf projectivische Eigenschaften, bieten. Indessen kann man auch für die Entwickelungen des zweiten und dritten Bandes, welche über die projectivische — collineare oder reciproke — Zuordnung von Gebilden zweiter und dritter Stufe handeln sollten, die Ausgangspunkte deutlich erkennen. Hingegen sind wir für den vierten Band, welcher sich, wie es scheint, mit dem Aufbau der Polarsysteme in der Ebene und im Raume beschäftigen sollte, auf eine ganz flüchtige Andeutung angewiesen, in der von einer eigentümlichen Beziehung zwischen projectivischen Gebilden die Rede ist, durch welche auch die Involution ihre Erklärung finde. Endlich sollten sich hieran noch zwei weitere Werke anschliefsen,

*) Steiner, Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, Erster Theil, Berlin 1832 (Ges. W., Bd. 1, S. 229—460). Meine Hinweise beziehen sich auf die Seiten der neuen Ausgabe.

deren eines der Transversalentheorie gewidmet war, während das andere eine zusammenfassende Darstellung der Steiner'schen Entwickelungen über das Schneiden und Berühren der Kreise und Kugeln, eine weitere Ausführung der oben mehrfach [z. B. XV, 7, 10] erwähnten Abhandlung bieten sollte. Einen Teil der für den fünften Band bestimmten Entwickelungen pflegte Steiner in seinen Vorlesungen an der Berliner Universität zu bringen. Schröter hat dieselben mit Resultaten der Schüler Steiner's, besonders solchen von Seydewitz und mit eigenen Entwickelungen verknüpft und so ein vielgelesenes, jüngst in dritter Auflage erschienenes Lehrbuch der synthetischen Geometrie der Kegelschnitte geschaffen.*)

Es wurde schon [XX, 4] eine Stelle der Einleitung angeführt, in welcher Steiner hervorhebt, dafs das Gesetz der Dualität an Ursprünglichkeit die „théorie des polaires réciproques" übertrifft. Um das Gesetz von Anfang an hervortreten zu lassen, nimmt er Gergonne's Schreibweise in zwei Colonnen an und fügt auch häufig die beiden parallel laufenden Beweise für zwei duale Sätze an.

2. Die Grundlage für Steiner's Entwickelungen bildet jener auf Poncelet zurückgehende Schlufssatz des barycentrischen Calcüls [XXIII, 16]. Eine Gerade s werde von zwei beliebigen Strahlen a und d eines Strahlenbüschels mit dem Centrum S in den Punkten A und D, von dem von S auf s gefällten Lote in P getroffen, so besteht die Gleichung

$$\frac{AD}{\sin ad} = \frac{SA \cdot SD}{SP},$$

welche man, „wie der Gegensatz erfordert", auch auf die Form

$$\frac{AD}{\sin ad} = \frac{SP}{\sin as \sin ds}$$

bringen kann. Ordnet man jetzt jedem Strahle des Büschels S den Punkt zu, welchen er auf s ausschneidet, verschiebt beide Gebilde beliebig in der Ebene, so besteht auch für beide „in schiefer Lage" befindliche projectivische Gebilde zwischen zusammengehörigen Quadrupeln $ABCD$ und $abcd$ die Beziehung

$$\frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{\sin ad}{\sin bd} : \frac{\sin ac}{\sin bc}.$$

Obgleich nun Steiner auf das Vorzeichen der auftretenden Strecken und Winkel keine Rücksicht nimmt, so kann er (246) aus der Gleichung doch die wichtige Folgerung ziehen, dafs „das ganze System der einander entsprechenden Elementenpaare zweier projectivischen Gebilde — s, S — bestimmt ist, sobald irgend drei Paare gegeben sind".

---

*) Vergl. S. 18†. Die dritte Auflage des Buches ist 1898 von Sturm herausgegeben worden.

An und für sich werden für zwei Lagen des Punktes D die Doppelverhältnisse einander gleich, wenn A, B, C und a, b, c, d gegeben sind. Der eine dieser Punkte wird von C durch A und B getrennt, der andere nicht. Je nachdem c, d demselben der von a und b begrenzten Strahlenwinkel angehören oder nicht, kommt in unzweideutiger Weise der zweite oder der erste der beiden möglichen Punkte in Betracht. In einer Fufsnote (247) hebt Steiner hervor, dafs, wenn die gegenseitige Lage der Elemente durch das Vorzeichen unterschieden würde, durch das Vorzeichen von $\frac{AD}{BD}$ der Punkt D eindeutig bestimmt sein würde.

Wird ein Strahlenbüschel so verschoben, dafs die drei Strahlen a, b, c drei Punkte A, B, C einer Geraden s projiciren, so gelangt der Scheitel in einen von zwei hinsichtlich s symmetrischen Punkten; es folgt (248) also die Umkehrung des vorigen Satzes*): „Sind die Elemente a, b, c, d, . . . und $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, . . . zweier Gebilde B und A der Reihe nach solcher Gestalt gepaart, dafs je vier Elementenpaare dem obigen Gesetze“ — der Doppelverhältnisgleichheit — „genügen, wobei nothwendiger Weise die jedesmaligen vier Elemente des einen Gebildes mit denen des anderen Gebildes übereinstimmende gegenseitige Lage haben müssen, so sind die Gebilde, in Beziehung auf alle jene Elementenpaare, projectivisch.“

3. Steiner betrachtet jetzt den Fall der harmonischen Gruppe, bei der das Doppelverhältnis den Wert 1 annimmt und die Punktepaare A B und C D, wie andererseits die Geradenpaare a b und c d einander trennen. Er erweist nochmals, dafs eine harmonische Strahlengruppe von allen Geraden in harmonischen Punktgruppen geschnitten, eine harmonische Punktgruppe von beliebigen Punkten aus durch harmonische Strahlengruppen projicirt wird. Zwei Gerade werden insbesondere durch die aufeinander senkrechten Halbirungsstrahlen der durch sie bestimmten Strahlenwinkel, die Endpunkte einer Strecke durch ihren Halbirungspunkt und den unendlich fernen Punkt der sie tragenden Geraden harmonisch getrennt.

Zwei Strahlenbüschel bezw. zwei Punktreihen heifsen projectivisch, wenn sie zu einer Punktreihe, bezw. zu einem Strahlenbüschel in perspectivische Lage gebracht werden können. Auf Grund der dann obwaltenden Doppelverhältnisgleichungen läfst sich nun (266) der Lehrsatz aufstellen, auf dem alles Folgende beruht. „Ist bei irgend einer Anzahl [von] n Gebilden — Gerade und ebene Strahlbüschel — in irgend einer bestimmten Ordnung genommen, der Reihe nach jedes Gebilde mit dem darauf folgenden projectivisch, so ist jedes mit jedem, also namentlich auch das erste mit dem letzten projectivisch.“

*) Ich bezeichne abweichend von Steiner Punkte mit grofsen, Geraden mit kleinen Buchstaben, Ebenen mit griechischen Buchstaben.

Steiner entwickelt nun (266) aus den Doppelverhältnisgleichungen die Beziehung projectivischer Punktreihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots$

$$AQ \cdot A_1R_1 = BQ \cdot B_1R_1 = CQ \cdot C_1R_1 = \cdots$$

gegen die Fluchtpunkte („Durchschnitte der Parallelstrahlen") Q und R_1, wie die entsprechende Beziehung

$$\operatorname{tg} aq \cdot \operatorname{tg} a_1r_1 = \operatorname{tg} bq \cdot \operatorname{tg} b_1r_1 = \operatorname{tg} cq \cdot \operatorname{tg} c_1r_1 = \cdots$$

bei projectivischen Strahlenbüscheln $abc\ldots$ und $a_1b_1c_1\ldots$ Die homologen rechten Winkel qr und q_1r_1 werden in der üblichen Weise ermittelt, nachdem beide Strahlenbüschel zu einer Punktreihe in perspectivische Lage gebracht sind. Die Aufsuchung der Doppelpunkte ineinander liegender Punktreihen läſst sich mit Hülfe der Fluchtpunkte auf eine bekannte elementare Aufgabe zurückführen. Indem Steiner die beiden Fälle gleichlaufender und ungleichlaufender Punktreihen unterscheidet, gelangt er (281) zu Regeln für die Realität der Doppelpunkte, die man jetzt in die eine Bedingung

$$AQ \cdot A_1R_1 > -\tfrac{1}{4}\, QR_1^2$$

zusammenzuziehen pflegt. Die Aufgabe wird aber bei weitem einfacher mit Hülfe eines festen Kreises und des Lineals allein gelöst, indem man von irgend einem Punkt des Kreises aus die Punktreihen projicirt und die Axe der so auf dem Kreise entstehenden projectivischen Beziehung aufsucht. Die uns jetzt so geläufige Begründung der Construction liefert Steiner an späterer Stelle (356). Die Aufsuchung der Doppelstrahlen zweier concentrischen projectivischen Strahlenbüschel kann entweder auf genau duale Weise mittels der Tangentenreihe des Kreises bewirkt werden, oder, was praktisch einfacher ist, unter Benutzung einer Schnittgeraden auf die vorige Aufgabe zurückgeführt werden.

4. Zum Abschluſs des Capitels giebt nun Steiner einige Anwendungen seiner Theorie. Nach Einführung des vollständigen n-Ecks und n-Seits wird auf das Auftreten harmonischer Gruppen beim vollständigen Viereck und Vierseit hingewiesen. Das Lineal allein genügt nach diesen Sätzen, um zu drei Elementen eines einförmigen Gebildes ein viertes harmonisches zu finden. Bei der Betrachtung von zuerst drei, dann n perspectivischen Punktreihen, die einen Punkt entsprechend gemein haben, ergiebt sich aufs natürlichste der in Form eines Bewegungsgesetzes gebrachte Dreieckssatz Desargues' und das allgemeinere Porisma des Pappus [I, 7]. Treten drei Gerade a, b, c oder BC, CA, AB paarweise in perspectivische Beziehung, so geht von jedem der Punkte A, B, C eine bestimmte Gerade a_1, b_1, c_1 aus, welche drei homologe Punkte der Reihen enthält. Die gegenseitigen Schnittpunkte A_1, B_1, C_1 dieser Geraden sind deshalb die perspecti-

vischen Centren für b und c, c und a, a und b; man erhält (297) den Satz: „Ist ein Dreieck ABC einem anderen $A_1B_1C_1$ eingeschrieben, so giebt es unendlich viele dem zweiten umschriebene, dem ersten eingeschriebene Dreiecke $A_2B_2C_2$." Die aus drei solchen Dreiecken ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ gebildete Configuration kommt, wie auch Steiner hervorhebt, schon bei Pappus vor.*) Die Aufgabe, ein n-Eck zu construiren, das einem gegebenen n-Eck eingeschrieben, einem anderen umschrieben ist, bietet (303) Gelegenheit, die Regel zur Aufsuchung der Doppelpunkte ineinander liegender projectivischen Punktreihen an einem Beispiel anzuwenden.**)

Im Zusammenhange hiermit löst Steiner alsdann die Aufgabe, zwei unter sich projectivische Gerade, die sich in schiefer Lage befinden, auf eine dritte Gerade perspectivisch zu beziehen und beweist, nach gehöriger Specialisirung, auf die oben [II, 6] angedeutete Weise, dafs die Träger zweier projectivischen Punktreihen und irgend vier Strahlen, von denen jeder zwei homologe Punkte verbindet, ein Brianchon'sches Sechsseit bilden, dafs andererseits die Mittelpunkte zweier projectivischen Strahlenbüschel und vier Punkte, in deren jedem sich zwei homologe Strahlen schneiden, ein Pascal'sches Sechseck ergeben.

5. Nunmehr wird im zweiten Capitel der Ebenenbüschel eingeführt. Das Doppelverhältnis von vier Ebenen α, β, γ, δ, die von einer Axe ausgehen, der Ausdruck $\frac{\sin\alpha\delta}{\sin\beta\delta} : \frac{\sin\alpha\gamma}{\sin\beta\gamma}$, ist offenbar das Doppelverhältnis der vier Strahlen, welche eine zur Axe senkrechte Ebene aus den Ebenen herausschneidet. Da ein Ebenenbüschel zwei beliebige Ebenen in Strahlenbüscheln schneidet, die zur Schnittlinie ihrer Ebenen perspectivisch liegen, so ist das Doppelverhältnis der vier Ebenen zugleich das der Strahlen- und Punktgruppen, welche sie auf beliebigen Geraden und Ebenen ausschneiden. Hiernach kann der Ebenenbüschel zunächst auf diese zu ihm perspectivischen Gebilde, dann auf beliebige Punktreihen und Strahlenbüschel projectivisch bezogen werden.

6. Das dritte Capitel giebt zunächst die projectivische Erzeugung des Kegelschnitts. Da bei einem Kreise die Peripheriewinkel über einem Bogen einander gleich sind, so ist er (330) das Erzeugnis

*) Es handelt sich hier um die bekannte oben [II, 1] erwähnte Configuration des Pappus, welche ausdrückt, dafs unter sechs zu drei und drei auf zwei Geraden verteilten Punkten der Pascal'sche Satz besteht.

**) Sollen unendlich viele n-Ecke $P_1P_2\ldots P_n$ möglich sein, die einem n-Eck $A_1A_2\ldots A_n$ eingeschrieben, einem anderen $B_1B_2\ldots B_n$ umschrieben sind, so kann man $B_1, B_2, \ldots, B_{n-2}$ beliebig wählen; B_{n-1}, B_n können dann beliebige entsprechende Punkte zweier projectivischen Punktreihen sein (447, Aufg. 42). Die Bestätigung dieses Satzes ist leicht.

congruenter und zwar gleichliegender Strahlenbüschel, deren Centren zwei beliebige Punkte des Kreises sind. Das Wort „gleichliegend" ist, wie Steiner in einer Fufsnote ausführt, in diesem Satze wesentlich. Ungleichliegende congruente Strahlenbüschel erzeugen eine gleichseitige Hyperbel, „wie man zu seiner Zeit sehen wird". Bei der projectivischen Erzeugung des Kreises entspricht der Verbindungslinie der beiden Scheitel, wenn man sie zu dem einen der beiden Büschel rechnet, die Tangente in dem Scheitel des anderen. Ist von einem Tangentendreieck eines Kreises nur eine Seite AA_1 beweglich, so erscheint sie vom Mittelpunkt des Kreises aus stets unter demselben Winkel. Um hieraus die Erzeugbarkeit des Kreises durch projectivische Punktreihen abzuleiten, benutzt Steiner merkwürdigerweise die Fluchtpunktbeziehung, welche die specielle Form

$$QA \cdot R_1A_1 = QB \cdot R_1B_1 = QC \cdot R_1C_1 = \cdots = \tfrac{1}{4}\, QR_1^2$$

annimmt. Die Berührungspunkte der beiden festen Tangenten gehören dem Schnittpunkte derselben zu.

Steiner überträgt dies nun durch Projection zunächst auf den Kegel, alsdann auf den Kegelschnitt, der nach antiker Art als Schnitt eines schiefen oder geraden Kegels mit kreisförmiger Grundfläche definirt wird. „Jede zwei Punkte B, B_1 eines Kegelschnitts sind die Mittelpunkte zweier projectivischen ebenen Strahlbüschel, deren entsprechende Strahlen sich in den übrigen Punkten desselben schneiden, und zwar entsprechen den vereinigten Strahlen (d, e_1) die Tangenten (d_1, e) in den gegenseitigen Mittelpunkten (B_1, B)." Andererseits: „Jede zwei Tangenten A, A_1 eines Kegelschnitts sind in Ansehung der Punktenpaare, in welchen sie von den übrigen Tangenten geschnitten werden, projectivisch, und zwar entsprechen den in ihrem Durchschnitte vereinigten Punkten $(\mathfrak{d}, \mathfrak{e}_1)$ ihre wechselseitigen Berührungspunkte $(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{e})$." (332). Umgekehrt behauptet Steiner, dafs ein projectivisches Erzeugnis der einen oder anderen Art stets ein Kegelschnitt ist. Er selbst hat es in einem oben [II, 7] erwähnten Schriftstück als die schwache Stelle seines Systems gekennzeichnet, dafs diese Umkehrungen ohne hinlänglichen Grund gegeben werden. Alle früheren Entwickelungen über schiefliegende projectivische Gebilde werden jetzt auf den Kegelschnitt anwendbar, es ergeben sich z. B. ohne weiteres die Sätze von Pascal und Brianchon. Der Satz vom umschriebenen Vierseit und eingeschriebenen Viereck wird ohne Grenzübergang aus dem Theorem abgeleitet: „Bei zwei projectivischen Punktreihen $ABC\ldots$ und $A_1B_1C_1\ldots.$ liegen die Punkte (AB_1, A_1B); (AC_1, A_1C); $\ldots$; (BC_1, B_1C); $\ldots$ auf einer Geraden, welche notwendig auch die dem gemeinschaftlichen Punkte der Träger entsprechenden Punkte enthält." Steiner hebt hervor, dafs der Satz gewöhnlich durch einen Grenzübergang aus dem Satz von Brianchon oder Pascal abgeleitet

würde und erläutert diese Methode an Maclaurin's Satz, nach dem beim Kegelschnitt ein Tangentendreieck und das der Berührungspunkte perspectivisch liegen. Der Satz von der projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte kann (344) in folgender Weise umgeformt werden: „Der Punkt, an dem vier feste Punkte eine Gruppe von constantem Doppelverhältnis bestimmen, beschreibt einen diese Punkte enthaltenden Kegelschnitt; andererseits umhüllt eine Gerade, wenn sie vier feste Gerade unter constantem Doppelverhältnis trifft, einen Kegelschnitt, welcher auch diese Geraden berührt." Dieser letztere Satz, fügt Steiner hinzu, ist unter anderer Form bekannt. Dasselbe gilt aber, wie oben [XXI, 13] hervorgehoben wurde, auch von dem ersten Satz. Die speciellen Fälle, wo das Doppelverhältnis den Wert — 1 annimmt, führen, da man vier Gerade oder Punkte auf drei Arten in zwei Paare zerlegen kann, zu je drei harmonischen Kegelschnitten, welche vier gegebene Punkte enthalten, vier gegebene Geraden berühren. Diese speciellen Kegelschnitte traten uns bei Chasles [XXI, 13] und bei Staudt [XXII, 2], der sie im Sinne Poncelet's nachwies, entgegen.

Steiner giebt nunmehr einige Hauptsätze über die Polarentheorie des Kegelschnittes und über das Dualitätsprincip der Ebene. Er verweist hierbei auf eine spätere genauere Behandlung der Polareigenschaften, bei der, nach seinen Andeutungen zu schliefsen, der Aufbau des Polarsystems unabhängig von seiner Ordnungscurve aus einer richtigen Auffassung der Involution heraus erfolgen sollte (352).*)

7. Der Abschnitt: „Zusammengesetztere Sätze und Porismen" (354 ff.) mufs als einer der wichtigsten des Werkes gelten, obgleich die in ihm aufgeführten Sätze an und für sich alle bekannt waren. Bisher waren sie jedoch aus ganz heterogenen Gesichtspunkten erwiesen worden. Eben darin liegt das neue, dafs sie alle als leichteste Abwandelungen des Grundgesetzes zu erkennen sind: „Einförmige Gebilde sind dann unter sich projectivisch, wenn sie zu einem und demselben dritten Gebilde projectivisch sind." Die einfache Bemerkung, dafs congruente Strahlenbüschel oder Punktreihen selbstverständlich auch projectivisch sind, läfst (359) augenblicklich Newton's Descriptio organica [I, 7; III, 3] evident werden, wie auch die zu ihr gewissermafsen duale Erzeugungsweise, die Chasles 1831 [XXI, 10] auf beträchtlichen Umwegen entwickelt hatte. Ebenso evident ist, dafs eine Strecke, deren Endpunkte über zwei Gerade bewegt werden, und die von einem festen Punkte aus beständig unter einem und demselben Winkel erblickt wird, einen Kegelschnitt umhüllt. Freilich, dafs F der Brennpunkt des Kegelschnittes ist, wie Poncelet [XVIII, 2] gezeigt hatte, verspricht Steiner erst an späterer Stelle zu erweisen. Auch die beiden Geraden sind Tangenten des Kegelschnittes. Indem Steiner

*) Bruchstücke hierauf bezüglicher Entwickelungen aus Steiner's Papieren sind von Schröter verwertet worden. Vergl. a. a. O. S. 181 [S. VIII].

eine dieser Geraden ins Unendliche entfernt, gelangt er einfacher, als dies Poncelet gelungen war, zu Lambert's Satze: „Beschreibt der Scheitel eines festen Winkels eine Gerade und geht der eine Schenkel desselben beständig durch einen Punkt, so umhüllt der andere Schenkel eine Parabel, welche auch den Ort des Scheitels berührt.“ Als eine andere sehr einfache Folge der allgemeinen Principien ergiebt sich der Satz: „Durchlaufen sämtliche Ecken eines einfachen n-Ecks Gerade, während alle Seiten bis auf die letzte sich um feste Punkte drehen, so umhüllt diese einen Kegelschnitt, welcher die Geraden berührt, auf denen ihre begrenzenden Ecken fortschreiten.“ Für jede der anderen Geraden kann man, ohne dafs der Satz aufhört zu bestehen, einen Kegelschnitt eintreten lassen, welcher die ihr benachbarten Drehpunkte enthält. Für $n = 3$ ergiebt sich, wie Steiner hervorhebt, dann als specieller Fall (356) der Satz: „Irgend zwei einem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke sind einem zweiten Kegelschnitt umschrieben.“*)

8. Die nun (362 ff.) sich anschliefsende Behandlung des einschaligen, oder, nach Steiner's Bezeichnung, einfachen Hyperboloids hat als eine der besten Partieen des Werkes in alle Lehrbücher ihren Eingang gefunden. Das einfache Hyperboloid besteht aus den Strahlen a, b, c, d, ..., welche homologe Punkte zweier projectivischen Punktreihen $ABCD$ ... und $A_1B_1C_1D_1$ ... auf zwei windschiefen Geraden l und l_1 verbinden. Projicirt man die erste Punktreihe von l_1, die zweite von l aus, so schneiden sich andererseits je zwei homologe Ebenen der so entstehenden projectivischen Ebenenbüschel in einer Geraden des einfachen Hyperboloids. Die Geraden a, b, c, d, ..., welche drei unter sich windschiefe Erzeugende l, l_1, l_2 zugleich treffen, bilden aber notwendig ein derartiges einfaches Hyperboloid. Denn jede der Geraden liegt mit l_2 in einer Ebene, verbindet also zwei homologe Punkte der projectivischen Reihen, welche der Ebenenbüschel mit der Axe l_2 auf l und l_1 ausschneidet. Ebenso wird die Geradenschar durch Ebenenbüschel mit den Axen l und l_1 erzeugt, welche zu der Punktreihe auf l_2 perspectivisch, mithin unter sich projectivisch sind. Projectivische Punktreihen auf l und l_1 sind durch drei Paare homologer Punkte, deren Verbindungslinien a, b, c sein mögen, bestimmt. Versteht man unter l_2 eine beliebige a, b, c zugleich treffende Gerade, so schneidet der Ebenenbüschel mit der Axe l_2 eben die gegebenen projectivischen Punktreihen aus; es wird also jede einzelne Gerade der Schar $abcd$ ... von l_2 getroffen. Die Fläche enthält deshalb zwei Scharen unter sich windschiefer Geraden;

*) Hiermit in Verbindung steht die im Anhange des Buches gestellte Aufgabe 41. Verbindet man drei feste Punkte der Reihe nach mit den Punktepaaren B_1B_2, B_2B_3, ..., B_nB_1 durch Kegelschnitte K_1, K_2, ..., K_n, so giebt es unendlich viele einfache n-Ecke, deren Ecken P_1, P_2, ..., P_n den Kegelschnitten angehören, und deren Seiten P_1P_2, P_2P_3, ..., P_nP_1 die Punkte B_2, B_3, ..., B_1 enthalten.

die Geraden einer jeden Schar werden von denen der anderen in unter sich projectivischen Punktreihen geschnitten und werden von ihnen aus durch unter sich projectivische Ebenenbüschel projicirt. Je nachdem man die erste oder die zweite Erzeugung benutzt, ergiebt sich, dafs die einen Punkt enthaltenden Tangentialebenen einen Kegel zweiten Grades berühren, dafs ferner jede Ebene einen Kegelschnitt mit der Fläche gemein hat. Zu jeder Erzeugenden der einen ist eine bestimmte Erzeugende der anderen Schar parallel, die Ebenen, welche solche parallele Gerade verbinden, gehen sämtlich — Steiner verweist auf eine spätere Entwickelung — durch einen Punkt hindurch. Der Asymptotenkegel besteht aus den Geraden, welche man durch diesen Punkt parallel zu den Erzeugenden der einen oder anderen Schar legen kann.

Nach verschiedenen Variationen seines Hauptresultates giebt Steiner noch andere Erzeugungsweisen des einschaligen Hyperboloids, von denen besonders eine (373) hervorgehoben zu werden verdient. „Trifft eine Gerade beständig einen Kegelschnitt und zwei windschiefe ihn schneidende Gerade, so beschreibt sie ein einschaliges Hyperboloid.“ Er geht sodann zu dem Falle des hyperbolischen Paraboloids über unter Benutzung zweier projectivisch-ähnlichen Punktreihen. Einer der Projectionsstrahlen $a, b, c, \ldots$ rückt jetzt ins Unendliche hinaus. Von ihm aus wird die Leitschar $l l_1 l_2 \ldots$ durch einen Büschel paralleler Ebenen projicirt. Auf irgend zwei der Geraden $a, b, c, \ldots$ schneidet derselbe projectivisch-ähnliche Punktreihen aus, von denen irgend zwei die Leitschar $l l_1 l_2 \ldots$ erzeugen; aus diesem Grunde wird auch die Regelschar $abc \ldots$ durch einen Büschel paralleler Ebenen projicirt. Das Erzeugnis zweier projectivischen Ebenenbüschel artet in ein hyperbolisches Paraboloid aus, sobald irgend zwei homologe Ebenen zu einander parallel sind. Auf einfache Weise läfst sich auch die zweite unendlich ferne Gerade des Erzeugnisses nachweisen; die unendlich ferne Ebene mufs, wie eine beliebige durch eine Gerade eines einschaligen Hyperboloids gelegte Ebene, noch eine zweite ihm angehörige Gerade ausschneiden.

9. Zwei aufeinander senkrechte Ebenen, welche zwei windschiefe Gerade l und l_1 projiciren, werden von einer Ebene, die zu einer der Geraden l oder l_1 senkrecht ist, in zwei aufeinander senkrechten Geraden getroffen, welche die Spuren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}_1$ der Geraden l und l_1 projiciren. Der Scheitel dieses Winkels beschreibt einen Kreis über dem Durchmesser $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, wenn der Ebenenwinkel bewegt wird. Aus diesem Grunde beschreiben seine Flächen projectivische Ebenenbüschel, seine Scheitelgerade ein einschaliges Hyperboloid, das die zu l bezw. l_1 senkrechten Ebenen in Kreisen trifft. Wenn die beiden Axen sich schneiden, geht dieses — zuerst von Binet [IX, 7] nachgewiesene — orthogonale Hyperboloid in einen von Hachette betrachteten Kegel über, wie Chasles [XXI, 10] ebenfalls

mit Hülfe der Kreisschnitte 1830 gezeigt hatte.*) Die Lote, welche die Flächen des Ebenen-Winkels von einem Hülfspunkt aus erhalten, stehen senkrecht auf einander und beschreiben zwei projectivische Strahlenbüschel. Mit Benutzung zweier zu ihnen perspectivischen Punktreihen gelangt man zu der Bobillier-Poncelet'schen Erzeugung des einschaligen Hyperboloids [XXI, 5]. Die Strahlenbüschel selbst erzeugen einen speciellen Kegel, den Chasles [XXI, 10] mit Hülfe der Polareigenschaften der Kugel eingeführt hatte. Wichtig ist der Zusatz, dafs bei zwei projectivischen Ebenenbüscheln der Winkel, den zwei homologe Ebenen mit einander einschliefsen, nur zweimal ein rechter wird, wenn dies nicht beständig der Fall ist. Zwei beliebige projectivische Ebenenbüschel können (390) stets in derartige Lage gebracht werden, dafs sie ein orthogonales Hyperboloid erzeugen, und zwar mufs, wenn der eine Büschel fest bleibt, die Axe des anderen in eine von zwei Richtungen gebracht werden. Soll dieselbe einen bestimmten Punkt P enthalten, so mufs der zweite Ebenenbüschel $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 \ldots$ in perspectivische Lage zu dem Strahlenbüschel $a_1 b_1 c_1 \ldots$ aus den Loten gebracht werden, die man von P aus auf die Ebenen des ersten Büschels fällen kann. Entsprechen den Strahlen a_1, b_1 zwei auf einander senkrechte Ebenen α_1, β_1 des zweiten Büschels, so gehört die gesuchte Axe offenbar dem Hachette'schen Kegel über a_1 und b_1 an. Die Spurpunkte von a_1 und b_1 in einer beliebigen zu a_1 senkrechten Ebene begrenzen einen Durchmesser eines dem Kegel angehörigen Kreises. Für s_1, t_1, die beiden aufeinander senkrechten Strahlen des Büschels, denen zwei aufeinander senkrechte Ebenen σ_1, τ_1 entsprechen, artet der Kegel in die beiden Ebenen aus, welche zur Ebene des Strahlenbüschels in s_1 und t_1 senkrecht stehen. Eine von diesen beiden Ebenen, welche offenbar a_1 und b_1 trennen, wird von dem erwähnten Hülfskreise in zwei Punkten getroffen, deren jeder eine Axe der gesuchten Art festlegt. Sollen zwei projectivische Strahlenbüschel so angeordnet werden, dafs homologe Strahlen aufeinander senkrecht stehen, so mufs man die beiden homologen rechten Winkel mit zwei nicht homologen Schenkeln aneinander legen und die Ebene des einen Strahlenbüschels so lange drehen, bis irgend ein Strahl desselben in die zum homologen Strahle senkrechte Ebene gelangt. Dies ist in reeller Weise bei einem der beiden in Betracht kommenden Fälle möglich. Überdies kann man, wie Steiner hervorhebt, eine Aufgabe auf die andere zurückführen. Ein Binet'sches Hyperboloid ist von besonderer Art. Zu jedem System von Kreisebenen steht eine Gerade einer der beiden Scharen senkrecht. Die Poncelet-Bobillier'sche Erzeugungs-

*) Steiner hat indes auf dieses Hyperboloid und die Lage seiner beiden Kreisreihen bereits 1827 hingewiesen. Vergl.: Steiner, Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen, 3., (Aufg. 54—65), Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 287—292 (Ges. W., Bd. 1, S. 155—162, Lehrs. 12).

weise hingegen kann im allgemeinen auf jedes Hyperboloid angewendet werden. Sind $ABCD\ldots$ und $A_1B_1C_1D_1\ldots$ beliebige projectivische Punktreihen, und schneiden sich die Kugeln über den Durchmessern AA_1, BB_1, CC_1 in zwei reellen Punkten S, S', so werden von S oder S' aus irgend zwei homologe Punkte durch zwei aufeinander senkrechte Strahlen projicirt (399).

10. Steiner giebt nur verschiedene mechanische Erzeugungen des Hyperboloids im Anschlufs an die analogen Entwickelungen der Ebene. Drehen sich z. B. die Ebenen eines einfachen n-Flachs um feste Gerade und treffen $n-1$ Kanten desselben fortwährend feste Gerade, so beschreibt auch die letzte Kante ein einschaliges Hyperboloid. Hiernach ergeben sich zwei Lösungen der Aufgabe, ein räumliches n-Seit zu construiren, dessen Ecken auf n gegebenen Geraden liegen, während seine Seiten n andere Gerade treffen. Als sehr specieller Fall der vorigen erscheint die neue Aufgabe, die Geraden zu construiren, welche vier gegebene Gerade l, l_1, l_2, l_3 zugleich treffen. Die bisherigen Lösungen derselben gingen von der Erwägung aus, dafs die gesuchten Geraden dem durch die drei Geraden l_1, l_2, l_3 bestimmten Hyperboloid angehören, also die Schnittpunkte dieses Hyperboloids mit der vierten Geraden enthalten. Die Punkte gehören dem Kegelschnitte an, den irgend eine l enthaltende Ebene aus dem Hyperboloid herausschneidet, von dem man unter Benutzung der zweiten Geradenschar des Hyperboloids leicht fünf Punkte zusammenbringen kann. Auf dieser Überlegung beruhten Lösungen von Bobillier und Garbinski*), und von Steiner**) selbst, die durch eine Aufgabe Gergonne's hervorgerufen waren. Von demselben Princip gingen auch frühere Lösungen von Dulleau, Petit und Brianchon aus, auf welche oben hingewiesen wurde [IX, 7]. Steiner giebt der Aufgabe nunmehr die neue Form: „Es sollen die von l und l_1 verschiedenen gemeinschaftlichen Geraden der beiden einfachen Hyperboloide aufgesucht werden, welche durch die Geraden l, l_1, l_2 einerseits, l, l_2, l_3 andererseits festgelegt werden." Legt man durch l drei beliebige Ebenen α; β; γ, welche l_1, l_2, l_3 in A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 treffen mögen, so gehören A_1A_2; B_1B_2; C_1C_2, welche l in A; B; C schneiden, dem einen, A_1A_3; B_1B_3; C_1C_3, welche l in A'; B'; C' schneiden, dem zweiten Hyperboloid an. Die Doppelpunkte der projectivischen Punktreihen $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ sind dann offenbar in den gesuchten Transversalen enthalten (402).

---

*) Bobillier und Garbinski, Solution du problème de géométrie descriptive, énoncé à la pag. 83 du présent volume, Gerg. Ann. Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 182—184. [Statt „présent" mufs es heifsen „précédent".]

**) Steiner, Auflösung einer Aufgabe aus den Annalen der Mathematik von Herrn Gergonne, Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 268—275 (Ges. W., Bd. 1, S. 145—154).

Möbius hatte 1828 [XXIII, 17] zwei Tetraeder $ABCD$, $PQRS$ construirt, von denen ein jedes dem anderen in der Art umschrieben war, dafs P, Q, R, S den Ebenen BCD, CAD, ABD, ABC und A, B, C, D den Ebenen QRS, RPS, PQS, PQR angehören. Steiner beweist (406), dafs die beiden Quadrupel AR, CP, BS, DQ und AC, BD, PR, QS den beiden Geradenscharen eines und desselben einschaligen Hyperboloids angehören. Wenn A, B, C, D, P, R gegeben sind, kann QS in der einen Geradenschar des schon völlig bestimmten Hyperboloids verschoben werden. Indem man A, B, C, D in anderer Weise, als Möbius gethan hatte, auf die Ebenen QRS, RPS, PQS, PQR verteilt, entstehen, wie Steiner hervorhebt, 24 verschiedene Fälle; in drei anderen gelange man zu ganz ähnlichen Resultaten, wie im ersten Falle (405).

11. Die Eigenschaften des einschaligen Hyperboloids führen (407 ff.) zu einer sehr anschaulichen Methode, zwischen zwei Ebenen — durch sogenannte „schiefe Projection" — eine quadratische Verwandtschaft einzuleiten. Von den Strahlen, welche zwei untereinander windschiefe Gerade l und m treffen, dem Strahlensystem $\mathfrak{R}$ oder (l, m) angehören, wird jeder durch einen einzigen weiteren Punkt festgelegt. Jedem Punkte einer Ebene ε kann mithin der einzige ihn projicirende Strahl des Strahlensystems zugewiesen werden. Zwei verschiedene Ebenen ε und ε_1 treten, indem man sie auf diese Weise mit dem Strahlensystem in Zusammenhang bringt, selbst in eindeutige Beziehung. In der Ebene ε bilden die Spuren der ε_1 angehörigen Geraden des Systems $\mathfrak{R}$ und der Geraden l und m selbst das Hauptdreieck RST; umgekehrt werden die Hauptpunkte X_1, Y_1, Z_1 der Ebene ε_1 von der ε angehörigen Geraden des Systems und den gegebenen Geraden l, m ausgeschnitten. Es entsprechen dann augenscheinlich den Punkten R, S, T die Geraden Y_1Z_1, Z_1X_1, X_1Y_1, den Punkten X_1, Y_1, Z_1 die Geraden ST, TR, RS. Die von entsprechenden Hauptpunkten ausgehenden Geraden sind paarweise auf einander bezogen und beschreiben projectivische Strahlenbüschel. Eine Gerade a von ε bestimmt mit l und m ein einschaliges Hyperboloid, welches von den a treffenden Strahlen des Systems $\mathfrak{R}$ ausgefüllt wird. Der Geraden a entspricht deshalb ein Kegelschnitt, der die Ecken X_1, Y_1, Z_1 des Hauptdreiecks enthält, weil a die entsprechenden Seiten des Hauptdreiecks RST in drei Punkten X, Y, Z trifft. Umgekehrt entspricht einer Geraden a_1 von ε_1 ein dem Hauptdreieck RST umschriebener Kegelschnitt.

Die zu ε parallelen Strahlen, welche l und m treffen, füllen ein hyperbolisches Paraboloid aus, welches von ε_1 in einem dem Hauptdreieck $X_1Y_1Z_1$ umschriebenen Kegelschnitt (Q_1) geschnitten wird. Weil nun rückwärts einem derartigen Kegelschnitt eine Gerade entspricht, so sind (413) die unendlich fernen Punkte der Ebene ε als in einer Geraden q liegend anzusehen. Steiner fügt hier die

Fufsnote bei: „Dieses ist in der Perspectivlehre ein bekannter alter Satz; im zweiten Abschnitt wird er einfacher und klarer dargestellt werden.“ Einer Geraden von ε_1 entspricht, je nachdem sie (Q_1) schneidet, berührt, oder nicht trifft, eine Hyperbel, Parabel oder Ellipse, die dem Hauptdreieck RST umschrieben ist.

Da eine beliebige Curve C_n der Ebene ε einen dem Hauptdreieck RST umschriebenen Kegelschnitt in $2n$ Punkten schneidet, so trifft die zugehörige Curve (C'_{2n}) eine Gerade in $2n$ Punkten, ist von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung. Da C_n jede Seite des Fundamentaldreiecks RST in n Punkten trifft, so hat C'_{2n} die Ecken X_1, Y_1, Z_1 des zweiten Fundamentaldreiecks zu n-fachen Punkten, die Tangenten in X_1 entsprechen den von R ausgehenden Strahlen, welche die Schnittpunkte von C_n mit ST enthalten. Liegen r $(= 1, 2, 3)$ Ecken von RST in C_n, so entspricht ihr eine Curve C'_{2n-r}. Einem Kegelschnitte C_2 entspricht im allgemeinen eine Curve C'_4 mit drei Doppelpunkten X_1, Y_1, Z_1. Ist C_2 dem Dreieck RST eingeschrieben, so hat C'_4 X_1, Y_1, Z_1 zu Rückkehrpunkten; die Rückkehrtangenten haben, weil RST zu dem Dreieck der Berührungspunkte von C_2 perspectivisch liegt, einen Punkt mit einander gemein. Steiner wirft die Frage auf, ob dies eine allgemeine Eigenschaft aller Curven C'_4 mit drei Rückkehrpunkten sei, ob, anders ausgedrückt, jede von ihnen einem Kegelschnitt in der beschriebenen Weise entspricht. Die bejahende Antwort auf diese Frage hätte in dem etwas allgemeineren Satz gelegen: „Einer Curve C'_m, welche die drei Ecken X_1, Y_1, Z_1 des Hauptdreiecks p-fach, q-fach, r-fach enthält, entspricht eine Curve $C_{2m-p-q-r}$“, dessen Beweis nach dem obigen offenbar ist.*) Kegelschnitten von ε, welche einen oder zwei Hauptpunkte enthalten, entsprechen Curven C_3 mit einem Doppelpunkt und Kegelschnitte, die zwei Ecken des Hauptdreiecks von ε_1 enthalten. Das letztere Resultat kann übrigens aus dem Satze direct entnommen werden, nach dem ein Kegelschnitt und zwei windschiefe ihn treffende Gerade ein einschaliges Hyperboloid eindeutig festlegen.

Steiner stellt nun zunächst eine Anzahl von Tabellen auf, welche das Wesen der Beziehung verdeutlichen. Vier harmonischen von A ausgehenden Strahlen entsprechen zum Beispiel vier harmonische Kegelschnitte, welche vier Punkte X_1, Y_1, Z_1, A_1 enthalten; dieselben schneiden auf jedem $X_1 Y_1 Z_1$ umschriebenen Kegelschnitt und auf jeder A_1 enthaltenden Geraden harmonische Punktgruppen aus, ein Satz, dem der allgemeinere hätte an die Seite gestellt werden können: „Die Kegelschnitte eines Büschels treffen Geraden und Kegelschnitte,

*) Andererseits kann man daran anknüpfen, dafs eine Curve vierter Ordnung mit drei Rückkehrpunkten von der dritten Klasse ist, und alsdann etwa nach der von Chasles gegebenen Methode [XXIV, 5] beweisen, dafs der Schnittpunkt zweier Rückkehrtangenten in einer dritten enthalten ist.

die einen Grundpunkt, bezw. deren drei enthalten, in projectivischen Punktreihen.“ Den Geraden, welche einen — R und S enthaltenden — Kegelschnitt (RS) berühren, entsprechen Kegelschnitte ($X_1 Y_1 Z_1$), die einen Kegelschnitt ($X_1 Y_1$) berühren, zwei dieser Kegelschnitte gehen durch einen Punkt, es kommen unter ihnen vier Parabeln vor u. s. w.

12. „Hiernach sieht man,“ fährt Steiner (420) fort, „dafs, wie schon erwähnt, die meisten Resultate, welche bei frühern Betrachtungen entwickelt worden, und welche sich auf Figuren in der Ebene beziehen, und zwar vorzugsweise das Netzgewebeartige derselben betreffen, sich nach den vorstehenden Schemata auf mehrfache Weise travestiren lassen... Auch lassen sich die neuen Resultate wiederum auf dieselbe Weise umwandeln, u. s. w. Wollte man jedoch diese Umwandlungen weiter wiederholen, so würden sie ins Langweilige führen, sie würden nichts wesentliches Neues enthalten, mithin weniger wichtig sein, als die einfachen Elementarsätze, von welchen sie hergeleitet, und von welchen sie im Grunde nur als Carricaturen erschienen.“

Diese Ansicht läuft derjenigen stracks zuwider, die Chasles*) in den bekannten Schlufsworten seines Aperçu historique ausgesprochen hat: „Aujourd'hui, chacun peut se présenter, prendre une vérité quelconque connue, et la soumettre aux divers principes généraux de transformation; il en retirera d'autres vérités, différentes ou plus générales; et celles-ci seront susceptibles de pareilles opérations; de sorte qu'on pourra multiplier, presque à l'infini, le nombre des vérités nouvelles déduites de la première: toutes, il est vrai, ne mériteront pas de voir le jour, mais un certain nombre d'entre elles pourront offrir de l'intérêt et conduire même à quelque chose de très général. Peut donc qui voudra, dans l'état actuel de la science, généraliser et créer en Géometrie; le génie n'est plus indispensable pour ajouter une pierre à l'édifice.“ Worte, denen Poncelet**) den derben Commentar beifügte: „Ce qui est de toute vérité, pourvu qu'on ne confonde pas trop le maçon avec l'architecte et l'accumulation sans ordre des matériaux, je veux dire des théorèmes et des corollaires, avec la conception première de l'édifice.“ Unzweifelhaft nehmen Poncelet und Steiner an der Thatsache, dafs eine Transformation der einen oder anderen Art besteht, das lebhafteste Interesse. Ihre Äufserungen richten sich wohl nur gegen die kritiklose Anhäufung von Resultaten durch gleichsam mechanisch wiederholte Umformung schon bekannter Gesetze.

13. Projicirt man das System $\mathfrak{R}$ der Strahlen, welche zwei windschiefe Gerade l und m treffen, von beliebigen Hülfspunkten $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ aus, so entsteht zwischen den von $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ ausgehenden Ebenenbündeln eine eindeutige Beziehung. Den Ebenen eines Büschels des

*) Chasles, Aperçu historique, S. 268..
**) Poncelet, Traité, Bd. 2, S. 422.

einen Bündels entsprechen im anderen die Tangentialebenen eines Kegels, der drei feste Ebenen berührt. Indem man die beiden Ebenenbündel mit Hülfsebenen η und η_1 schneidet, entsteht eine quadratische Verwandtschaft zwischen den in ihnen gelegenen Strahlenfeldern. Indem man endlich das Strahlensystem mit einer Ebene, ε, schneidet und dasselbe andererseits von einem Hülfspunkte aus auf eine zweite Ebene, η, projicirt, werden den Punkten von ε die Strahlen von η zugeordnet. Bewegt sich der Punkt von ε über eine Gerade, so gleitet der zugehörige Strahl zu ihm projectivisch an einem Kegelschnitt mit drei festen Tangenten, dreht sich die Gerade von η um einen Punkt, so durchläuft der entsprechende Punkt von ε zu ihm projectivisch einen Kegelschnitt, der drei feste Punkte enthält.

Um zu einer freieren Auffassung der Verwandtschaften zu gelangen, betrachtet Steiner zwei feste zunächst einer Ebene η angehörige Punktreihen und bringt sodann ihre Träger l und m in windschiefe Lage. In der zweiten Lage bilden die Verbindungslinien der Punkte von l und m ein Strahlensystem $\mathfrak{R}$, in der ersten Lage erfüllen sie die gesamte Ebene η, und zwar ist jeder Geraden der Ebene ein bestimmter Strahl von $\mathfrak{R}$ zugewiesen. Einem Strahlenbüschel von η entspricht, da er l und m in perspectivische Beziehung setzt, ein einschaliges Hyperboloid, welches die Strahlen l und m in der räumlichen Lage enthält, sodann einen Strahl e, dessen Stützpunkte auf l und m bei der Überführung in die Ebene η in den Schnittpunkt der beiden Träger gelangen. Aber in der räumlichen Lage sind l und m auch Träger von Ebenenbüscheln, die man so verschieben kann, dafs ihre Axen von einem Punkt $\mathfrak{D}$ ausgehen, und dafs in die sie nun verbindende Ebene die beiden Ebenen übergehen, welche bei der räumlichen Lage sich im Strahle e schneiden. Dann entspricht jedem Strahle von $\mathfrak{R}$, in dem sich zwei Ebenen der Büschel bei allgemeiner Lage schneiden, ein bestimmter von $\mathfrak{D}$ ausgehender Strahl. Indem man noch den Strahlenbündel mit einer Hülfsebene ε schneidet, wird offenbar das Strahlensystem auf ein Strahlenfeld η und auf ein Punktfeld ε eindeutig abgebildet, es entspricht jeder Regelschar, welche den Strahl e enthält, ein Strahlenbüschel im Strahlenfeld und eine Punktreihe im Punktfeld. Diese Entwickelung, fügt Steiner (437) bei, „enthält übrigens die Fundamentalsätze, auf denen die sogenannte „Théorie des polaires réciproques" beruht, welche Theorie gewöhnlich mittelst eines Hülfskegelschnitts dargestellt wird, wobei nothwendigerweise beide Systeme von Figuren [ε und η] in einer und derselben Ebene liegen."*)

*) Steiner schaltet hier folgende Worte der Anerkennung ein: „Indessen gebührt das Verdienst, die genannte Theorie zuerst freier, unabhängig vom Kegelschnitt, aufgefafst zu haben, dem gründlichen Forscher Möbius (Barycentr. Calcül)." [Vergl. XX, 5].

Offenbar werden bei der jetzt gewonnenen Beziehung zunächst zwei Punktreihen von η auf zwei Strahlenbüschel von ε projectivisch bezogen; dem gemeinsamen Punkte der ersteren entspricht der gemeinsame Strahl der letzteren. Einem Strahle von η als Verbindungslinie zweier Punkte der beiden Reihen, gehört ein Punkt von ε, der Schnittpunkt der beiden entsprechenden Strahlen, zu. Jeder Punktreihe der einen Ebene entspricht ein projectivischer Strahlenbüschel der anderen. Poncelet hatte kurze Zeit zuvor [XXIV, 9] eine die Polareigenschaften des Kegelschnittes nicht benutzende Methode angegeben, zwei ineinander liegende Ebenen reciprok aufeinander zu beziehen; sie geht aus Steiner's Regel hervor, wenn die beiden Strahlenbüschel zu den zugehörigen Punktreihen perspectivisch sind, sodafs der Kegelschnitt, dessen Punkte bei einer beliebigen reciproken Beziehung der Ebene in sich in den zugehörigen Geraden liegen, hier in ein Geradenpaar ausartet.

Wenn man bei den beschriebenen Abbildungen des Strahlensystems $\mathfrak{R}$ ganz beliebig die beiden Punktreihen auf l und m in eine Ebene η bringt, die Ebenenbüschel mit den Axen l und m in einen Strahlenbündel ($\mathfrak{D}$) gelangen läfst, so wird der gemeinschaftliche Punkt der beiden Punktreihen aus einem Strahle f, die gemeinsame Ebene der beiden Ebenenbüschel aus einem anderen Strahl e von $\mathfrak{R}$ entstehen. Den Strahlen von $\mathfrak{R}$ werden aber nach wie vor die Geraden der Ebene η und die Punkte einer zu ($\mathfrak{D}$) perspectivischen Ebene ε zugewiesen. Den Hyperboloiden des Systems welche l, m, f enthalten, entsprechen Strahlenbüschel der Ebene η und Kegelschnitte der Ebene ε, welche drei feste Punkte enthalten, die Spuren der Axen der Ebenenbüschel in ihrer zweiten speciellen Lage und desjenigen von $\mathfrak{D}$ ausgehenden Strahles, der f entspricht. Umgekehrt gehören den Punktreihen von ε Hyperboloide, welche l, m, e enthalten, und folglich in η Tangentenreihen von Kegelschnitten mit drei gemeinsamen Tangenten zu. Man kann nun das vermittelnde Strahlensystem ausschalten und direct von η zu ε dadurch übergehen, dafs man zwei Punktreihen von η projectivisch auf zwei Strahlenbüschel von ε bezieht. Einem Punktepaar der beiden Reihen und ihrem Verbindungsstrahl gehört ein Strahlenpaar der beiden Büschel und ihr Schnittpunkt zu. Steiner verspricht nun in einer abschliefsenden Bemerkung, diesen Regeln später eine Wendung zu geben, bei der die auftretenden Hauptelemente, die bei dem jetzigen Beziehungssystem immer reell sein mufsten, imaginär werden können. Auch sollen ähnliche Beziehungssysteme im Raume behandelt werden; es sei möglich, zwei Räume so aufeinander zu beziehen, dafs einer Ebene eine Oberfläche zweiter Ordnung entspricht. Aus dieser Beziehung sollen alsdann die Eigenschaften der Oberfläche zweiter Ordnung ermittelt werden.

14. Steiner hatte in früheren Aufgaben und Lehrsätzen bereits auf quadratische Transformationen hingedeutet, wie er in einer Fafs-

note hervorhebt.*) Tritt ein Dreieck $A_1 B_1 C_1$, welches einem festen Dreieck ABC eingeschrieben ist, zu demselben in perspectivische Beziehung, so entsprechen Axe und Centrum derselben einander in einer quadratischen Verwandtschaft. Nach einem Zusatze bilden die Mittelpunkte der Seiten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ ebenfalls ein zu ABC perspectivisches Dreieck. Steiner deutet hierbei auf eine zweite quadratische Verwandtschaft hin. Ist ABC ein zu ihm perspectivisches Dreieck $A_1 B_1 C_1$ eingeschrieben, so wird ein $A_1 B_1 C_1$ eingeschriebenes Dreieck $A_2 B_2 C_2$ gleichzeitig zu ABC und $A_1 B_1 C_1$ perspectivisch. Die beiden Centren dieser perspectivischen Beziehungen entsprechen einander in einer quadratischen Verwandtschaft.

Eine andere quadratische Verwandtschaft besteht in der Ebene eines vollständigen Vierecks. Je zwei gegenüberliegende Seiten desselben trennen zwei homologe Punkte harmonisch. Durchläuft der eine Punkt eine Gerade, so beschreibt der andere einen Kegelschnitt. Derselbe enthält die Punkte, in deren jedem sich zwei gegenüberliegende Seiten des Vierecks schneiden. Auch für jeden dem Viereck umschriebenen Kegelschnitt sind zwei entsprechende Punkte conjugirt. Diese quadratische Verwandtschaft, welche bisweilen als Steiner'sche Verwandtschaft bezeichnet wird, ist, wie hervorgehoben wurde, bereits von Poncelet [XVI, 4; XVII, 10] näher untersucht worden. Die dualen Verwandtschaften treten hinzu.

Steiner's Anregungen hat Seydewitz weiter verfolgt; eine entsprechende Behandlung der collinearen Beziehung im Raume war bereits durch einen Satz von Möbius vorbereitet [XXIII, 13]. In dem Vorwort zu seinem Werke hebt Steiner hervor, dafs er die letzten Resultate bereits im Jahre 1828 gefunden habe, besonders weist er hier auf die soeben geschilderte Behandlung der quadratischen Verwandtschaft (§ 59) hin. Es sei leicht erklärlich, dafs mittlerweile einiges davon ins Publicum gekommen sei, da er kein Geheimnis daraus machte. Steiner, „welcher sich", mit Clebsch**) zu reden, „reich genug hätte fühlen können, um dergleichen doch schliefslich müfsige Kämpfe um Prioritäten entbehren zu dürfen", bezieht sich hiermit offenbar auf die erste, oben [XXII, 8] erwähnte Abhandlung von Magnus, der sich wenigstens mit aller Entschiedenheit gegen Steiner's Äufserung auflehnte***) und besonders darauf aufmerksam machte, dafs bei der räumlichen Erweiterung der Verwandtschaft nur in speciellen Fällen den Ebenen Oberflächen zweiter Ordnung entsprechen.

15. Über die Art, in der Steiner sein fundamentales Werk fortzusetzen gedachte, finden sich mancherlei Andeutungen in einer dem-

*) Steiner, Aufgaben und Lehrsätze, erstere aufzulösen, letztere zu beweisen, Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 207—212 (Ges. W., Bd. 1, S. 173—180, Lehrsätze 12—15).

**) a. a. O. S. 203† (Abh. v. Plücker, Bd. 1, S. XXI).

***) a. a. O. S. 195* (S. VII).

selben angehängten Sammlung von 85 Aufgaben. Zwei einförmige Gebilde können auf acht Arten projectivisch so bezogen werden, dafs die Elemente zweier gegebenen harmonischen Gruppen einander entsprechen. Steiner fragt nach den Beziehungen unter den acht so entstehenden Erzeugnissen oder nach den bei Herbeiführung perspectivischer Lagen entstehenden Configurationen.*) Bemerkenswert ist, dafs Steiner zwei Punktgruppen auf einem Kegelschnitt ins Auge fafst, also nach dem Erzeugnis krummliniger projectivischen Gebilde fragt (Aufg. 5). Aus Steiner's Frage nach dem Erzeugnisse dreier projectivischen Ebenenbüschel bezw. dreier projectivischen Punktreihen ersieht man, auf welche Weise er zur Untersuchung räumlicher eindeutigen Transformationen vorzuschreiten gedachte (Aufg. 8).

Bei einigen Aufgaben sollen stets zwei projectivische Gebilde so gelegt werden, dafs sie ein besonderes Gebilde — Kreis, Rotationshyperboloid, orthogonales Hyperboloid, u. s. w. — erzeugen. Von einer dieser Aufgaben, bei der mit zwei vorgelegten projectivischen Punktreihen ein Kreis erzeugt werden soll, hat Kramer die nach der oben [XXVII, 6] angegebenen Steiner'schen Entwickelung selbstverständliche Lösung gegeben.**) Hierauf folgt eine eigentümlich falsche Frage (Aufg. 15) nach der Hüllfläche der Geraden, die vier Ebenen unter gleichem Doppelverhältnis schneiden. Das Auftreten eines derartigen Irrtums zu einer Zeit, wo man sich noch wenig mit der Vorstellung des Strahlencomplexes vertraut gemacht hatte, kann nicht auffällig gefunden werden. Bekanntlich erfüllen die erwähnte Bedingung die Strahlen eines tetraedralen Complexes. Die Aufg. 17, 19, 20, 21 beziehen sich auf verschiedene Erzeugungen von Hyperboloiden und Kegeln, welche zum Teil den Erzeugungen des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel durch congruente Strahlenbüschel, der Parabel durch ähnliche Punktreihen (Aufg. 18) nachgebildet sind und sämtlich auf Grund des Projectivitätsprincips evident werden; zum Teil waren sie von Chasles auf recht complicirte Weise abgeleitet worden. Ebenfalls evident richtig sind die Lehrsätze der Aufg. 24—27, 29.***)

16. Steiner fragt inzwischen nach dem Kegel, welchen der Scheitelstrahl eines Ebenenwinkels von constanter Gröfse beschreibt, wenn seine Ebenen beständig zwei sich schneidende Gerade projiciren, und nach dem anderen Kegel, der ihm im Polarsystem einer unendlich

*) Die erste dieser Aufgaben hat Schällibaum gelöst; derselbe behandelt auch (Aufg. 44) die Construction eines n-Ecks, welches einem gegebenen n-Eck zugleich ein- und umgeschrieben ist. Vergl.: Schällibaum, Auflösung der Aufgabe 1. (links) im Anhange des ersten Bandes etc.; Ueber die 44. Aufgabe im Anhange etc., Crelle's Journ., Bd. 18, 1838, S. 127—133, 134—141.

**) Kramer, Auflösung der 10. Aufgabe im Anhange etc., ibidem, S. 185—188.

***) Das der Aufg. 28 genügende hyperbolische Paraboloid braucht hingegen nicht notwendig gleichseitig zu sein.

kleinen Kugel entspricht (Aufg. 22). „Diese Aufgaben sind Bedürfnifs in der Stereometrie. Wenn auch die genannten Kegelflächen vom vierten Grade sind, so sind sie vielleicht von solcher besonderen Art, dafs sie deshalb doch bequem bei verschiedenen Konstructionen angewandt werden können.“ Es wird dann (Aufg. 28) nach den Regelflächen gefragt, welche ein zwei windschiefe Gerade treffender Strahl beschreibt, wenn er mit ihnen einen Ebenenwinkel von gegebener Gröfse bestimmt, oder die durch seine Stützpunkte begrenzte Strecke von einem festen Punkte aus unter einem bestimmten Winkel erblickt wird.

Steiner fragt ferner (Aufg. 31) nach dem Hüllkegel solcher Ebenen, die unter sich ähnliche Kegelschnitte aus einer Oberfläche F_2 herausschneiden und einen Punkt $\mathfrak{D}$ enthalten. Im Falle der Parabel handelt es sich um einen zum Asymptotenkegel congruenten Kegel. Auch für gleichseitige Hyperbeln wird man, wie Steiner für das einschalige Hyperboloid anführt (Aufg. 30) und wie sich aus einem Satze von Staudt [XXII, 1] ergiebt, auf einen Kegel zweiten Grades geführt. In der That schneidet ja die unendlich ferne Gerade einer Ebene, die mit F_2 eine gleichseitige Hyperbel gemein hat, den unendlich fernen Kegelschnitt der Oberfläche F_2 und den einer Kugel in zwei sich harmonisch trennenden Punktepaaren.*)

In der Aufg. 32 stellt Steiner den bekannten Satz auf: „Die Normalen eines einschaligen Hyperboloids längs einer Erzeugenden desselben füllen ein hyperbolisches Paraboloid aus“, ein Satz, der sich sofort auf geradlinige Flächen überhaupt ausdehnen läfst und von Chasles in diesem Umfange ausgesprochen wurde.**) Bei drei anderen Aufgaben (35—37) kommen Polareigenschaften einer Oberfläche F_2 und ihres Asymptotenkegels in Betracht. Nach Aufg. 35 beschreibt z. B. der eine von zwei aufeinander senkrechten conjugirten Durchmessern von F_2 einen Kegel zweiten Grades, wenn der andere eine Ebene durchläuft. Aus den Polareigenschaften der Kugel heraus hat, wie ich schon oben andeutete [VIII, 7], meines Er-

*) Nach einer Untersuchung von Bobillier [IX, 4] gehören Punkte eines einschaligen Hyperboloids, deren Erzeugende sich unter einem bestimmten Winkel schneiden, einer concentrischen Oberfläche vierter Ordnung an. Zu den Durchmesser-Ebenen, welche unter sich ähnliche Hyperbeln aus einem einschaligen Hyperboloid ausschneiden, gehören also als conjugirte Durchmesser die Strahlen eines Kegels vierter Ordnung. Hiernach ist der von Steiner gesuchte Kegel von der vierten Klasse. Bobillier's Rechnung zeigt auch, dafs man für gleichseitige Hyperbeln zu einem Kegel zweiter Klasse gelangt. Die von ihm betrachtete Curve wird jetzt von der Monge'schen Kugel ausgeschnitten. Verwandte Fragen werden rechnend in der Abhandlung behandelt: Townsend, On a class of curves on the hyperboloid of one sheet connected with the generatrices of the surface, Camb. Dubl. Journ., Bd. 4 (8), 1849, S. 66—80.

**) Chasles, Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite; particulièrement sur l'hyperboloïde, le paraboloïde et le cône du second degré, Quet. Corr., Bd. 11, 1839, S. 49—113 (S. 97).

achtens Steiner den Satz entwickelt, dafs zwei von einem Punkt ausgehende orthogonale Trieder einem Kegel eingeschrieben, einem zweiten umschrieben sind (Aufg. 59), den er ausdrücklich als Specialfall eines umfassenderen Satzes bezeichnet. Steiner meint offenbar den entsprechenden Satz für zwei Tripel conjugirter Durchmesser einer Oberfläche zweiter Ordnung, der von Chasles*), später rechnend von Göpel**) aufgestellt wurde. Wesentlich mit diesem Satze identisch ist der Satz (Aufg. 46): „Zweimal drei 'zugeordnete harmonische Pole' in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen allemal in irgend einem anderen Kegelschnitt. Zweimal drei 'zugeordnete Harmonische' in Bezug auf einen Kegelschnitt berühren allemal irgend einen anderen Kegelschnitt" [Vergl.: XVIII, 11]. Die Gesetze der schiefen Projection ergeben unmittelbar, dafs die Geraden, welche eine ebene Curve C_n und zwei windschiefe Gerade treffen, von denen keine in der Ebene von C_n liegt, einer Fläche $2n^{\text{ter}}$ Ordnung angehören; die Ebenen eines speciellen Büschels, dessen Axe offenbar die Spuren der gegebenen Geraden in der Ebene von C_n enthält, schneiden die Fläche jedoch in Curven n^{ter} Ordnung (Aufg. 38). Aus der Anwendung einer quadratischen Transformation entspringt auch der Satz: „Die einem Dreieck umschriebenen unter sich ähnlichen Kegelschnitte umhüllen eine Curve vierter Ordnung, welche die Ecken des Dreiecks zu Doppelpunkten hat; für die Parabeln geht die Curve in die unendlich ferne Gerade über, für die gleichseitigen Hyperbeln reducirt sie sich auf einen Punkt" (Aufg. 39). Man kann die einzelnen Kegelschnittreihen aus den Tangentenreihen unter sich concentrischer Kreise mittels einer quadratischen Verwandtschaft herstellen, welche die unendlich ferne Gerade einer jeden der beiden Ebenen in einen Kreis der anderen verwandelt.

17. Steiner wirft die Frage nach dem Ort des Punktes auf, dessen Harmonische (Polaren) nach drei beliebigen Kegelschnitten durch einen Punkt gehen***) (Aufg. 48), und überträgt diese Aufgabe auf den Raum (Aufg. 51). Haben die drei Kegelschnitte zwei Punkte mit einander gemein, so ist (Aufg. 47) der Ort ein vierter Kegelschnitt, der diese Punkte enthält; und zwar gehen die Tangenten, welche diesen neuen Kegelschnitt und einen der gegebenen in ihren vier

---

) Vergl. a. a. O. S. 154 (S. 168). Den Ausgangspunkt bildet das Theorem von den Polardreiecken des Kegelschnittes.

**) Göpel, Drei Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung und ihrer conjugirten Halbmesser, Grunert's Arch., Bd. 4, 1844, S. 202—210 (S. 206, 207, 209). Der Fall zweier orthogonalen Trieder wird in der Notiz behandelt: Luchterhand, Zwei Eigenschaften der Kegelfläche zweiten Grades, ibidem, S. 99—106. Dafs zwei orthogonale Trieder einem Kegel zweiten Grades angehören, hatte Ampère schon gelegentlich der Betrachtung der Trägheitsaxen eines Körpers bemerkt [X, 6].

***) Die Curve C_3 der Aufg. 48 kommt zuerst bei Hesse vor. Die in der synthetischen Geometrie übliche Ableitung hat zuerst A. Jacobi gegeben [XXXVI, 23, 19].

gemeinsamen Punkten berühren, zu je vier von zwei Punkten aus. Entsprechendes gilt von der zu vier Oberflächen F_2 mit gemeinsamem Kegelschnitt gehörigen Fläche. Diese Sätze sind in ihrer anschaulichsten auf Kreise und Kugeln bezüglichen Form schon von Durrande*) gegeben worden. Je zwei in Bezug auf einen Kreis conjugirte Punkte begrenzen einen Durchmesser eines ihn senkrecht schneidenden Kreises, wie Poncelet gezeigt hatte [XVI, 4]. Daher wird jeder Durchmesser des Kreises, welcher drei gegebene senkrecht schneidet, von zwei für alle drei Kreise conjugirten Punkten begrenzt. In dem Mittelpunkte des neuen Kreises und eines jeden der gegebenen laufen augenscheinlich vier von den Tangenten zusammen, welche die beiden Kreise in ihren Schnittpunkten berühren. Die analoge Entwickelung gilt für Kugeln.

18. Steiner stellt nun auf das Hexagrammum mysticum bezügliche Sätze auf (Aufg. 54): Die 60 Pascal'schen Geraden, die zu sechs Punkten eines Kegelschnittes gehören, laufen zu drei und drei durch 20 Punkte; diese Punkte liegen zu vier und vier auf 15 Geraden verteilt. Es wird hervorgehoben, dafs bei einer früheren Aufstellung dieses Satzes sich eine Unrichtigkeit eingeschlichen hatte.**) Steiner unterliefs einen Hinweis auf eine Arbeit von Plücker***), in der diese richtige Form des Satzes entwickelt und in allerdings sehr scharfer Art auf Steiner's Irrtum hingewiesen worden war. Steiner selbst hat über die Herleitung dieser Theoreme meines Wissens nichts veröffentlicht. Die Art, in der man jetzt die Steiner'schen Punkte und die Plücker'schen Geraden nachzuweisen pflegt, entspricht genau der Methode in der erstgenannten Arbeit Plücker's. Ich komme auf diese Entwickelungen in einem besonderen Capitel des zweiten Bandes zurück. Erwähnt mag werden, dafs der Satz von den Kirkmann'schen Punkten in etwas anderer Form bei Steiner vorkommt. Steiner benutzt, dafs zwei einem Kegelschnitt eingeschriebene Dreiecke einem anderen Kegelschnitt umschrieben sind, und wendet auf ihre sechs Seiten den Satz von Brianchon an. Die betreffenden drei Diagonalen sind als Pascal-sche Gerade der ursprünglichen sechs Punkte — die einen Punkt

*) Durrande, Solution de deux des quatre problèmes de géométrie proposés à la page 68 du XI^e. volume des Annales, et de deux autres problèmes analogues, Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 112—117.

**) Steiner, Théorèmes sur l'Hexagramum mysticum, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 339—340 (Ges. W., Bd. 1, S. 224–225).

***) Plücker, Über ein neues Princip der Geometrie und den Gebrauch allgemeiner Symbole und unbestimmter Coefficienten, Crelle's Journ. Bd. 5, 1830, S. 268—286 (Abh., Bd. 1, S. 159—177). In dem Aufsatze: Note sur le théorème de Pascal, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 337—340 (Abh., Bd. 1, S. 413—416) hebt Plücker noch einmal hervor, dafs Steiner ursprünglich eine irrige Form des Satzes mitgeteilt und sich bewogen gefühlt habe (a bien voulu), in einem späteren Werk die von ihm selbst herrührende richtige Fassung anzunehmen.

mit einander gemein haben — wenigstens in der Figur gekennzeichnet.*)

In einer Reihe von Aufgaben handelt es sich um die Bestimmung einer Oberfläche oder eines Kegels zweiten Grades. Auf eine Lösung weist Steiner nur bei der Frage nach den Kegeln zweiten Grades hin, welche die Seiten eines räumlichen Sechsecks berühren; der Ort ist (Aufg. 67) ein einschaliges Hyperboloid, das, wie Seydewitz**) aus dem Satze von Brianchon in einfachster Weise entwickelt hat, durch die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken festgelegt wird.

19. Aufg. 79 bietet die Wiederholung eines schon früher aufgestellten Lehrsatzes.***) „Treffen die Lote, welche man von den Punkten P, Q, R, S aus auf die Ebenen BCD, CAD, ABD, ABC fällen kann, in einem Punkte E zusammen, so haben auch die Lote, welche die Ebenen QRS, RPS, PQS, PQR aus den Punkten A, B, C, D erhalten, einen Punkt T mit einander gemein. Ist $P_1 Q_1 R_1 S_1$ hinsichtlich E zu $PQRS$ perspectivisch, und tritt dann T_1 an die Stelle von T, so steht die Ebene der perspectivischen Beziehung senkrecht zu der Geraden TT_1." Es scheint mir unzweifelhaft, dafs Steiner den ersten Teil des Satzes aus den Polareigenschaften der Oberflächen F_2 entnommen hat. Legt man eine Oberfläche F_2 durch das Polartetraeder $PQRS$ und den Mittelpunkt E fest, so besitzt eine zweite, G_2, das Polartetraeder $ABCD$ und einen unendlich fernen Kegelschnitt, welcher dem von F_2 hinsichtlich des unendlich fernen Kugelkreises polar gegenüber steht. Mit ihrem Mittelpunkte fällt der Punkt T zusammen. Beschreiben jetzt P, Q, R, S auf den von E ausgehenden Loten perspectivische Punktreihen, QRS, RPS, PQS, PQR also perspectivische Ebenenbüschel, so beschreiben die von A, B, C, D ausgehenden Lote projectivische Strahlenbüschel; der gemeinsame Punkt derselben durchläuft also eine Punktreihe. Wenn QRS, RPS, PQS, PQR in die gemeinschaftliche Ebene der von ihnen beschriebenen Ebenenbüschel gelangen, so werden alle Lote parallel; der Ort ihres gemeinschaftlichen Punktes ist also zu dieser Ebene, hinsichtlich welcher irgend zwei der Tetraeder perspectivisch liegen, senkrecht. Die letzten Aufgaben der Sammlung behandeln die auf Kreis- und Kugelreihen bezüglichen Schliefsungstheoreme Steiner's, auf welche ich in einem besonderen Capitel des zweiten Bandes dieses Berichtes zurückkomme.

) a. a. O. S. 268 (Ges. W., Bd. 1, Lehrsatz 4). Steiner fügt die Worte hinzu: „Dieser Satz ist nur ein Teil eines umfassenderen Satzes".

**) Seydewitz, Über den geometrischen Ort des Scheitels eines Kegels zweiten Grades, welcher die Seiten eines windschiefen Sechsecks berührt, Grunert's Arch., Bd. 10, 1847, S. 202—203.

***) a. a. O. S. 261* (Ges. W., Bd. 1, S. 158, Lehrs. 3. Die Lehrs. 1 u. 2 beziehen sich auf analoge Sätze in der Ebene und auf der Kugel).

XXVIII. Andere Schriften Steiner's zur Lehre von den Kegelschnitten.

1. Ich komme zu anderen Arbeiten Steiner's, welche in die Lehre von den Kegelschnitten gehören. Über das zweite selbständige Druckwerk Steiner's, welches er 1833 der Systematischen Entwickelung folgen liefs, habe ich bereits oben [XVII, 7] ausführlich gesprochen. Einen speciellen Fall des Analogons zu dem Tetraedersatz, den ich soeben [XXVII, 19] aus den Polareigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung ableitete, entwickelt Steiner 1828 aus Transversalensätzen*) (Nr. 3). Steiner beschäftigt sich in der betreffenden Arbeit mit der Schar von Kegelschnitten, die vier gemeinsame Tangenten besitzen, und ganz besonders mit der Schar der Parabeln mit drei gemeinsamen Tangenten. Die Arbeit läfst in keiner Weise die neuen Gesichtspunkte erkennen, die in der Systematischen Entwickelung zur Herrschaft gelangen. Schritt für Schritt geht Steiner von einem Theorem zum anderen fort, längst Bekanntes und ohne Beweis Angenommenes mit neuen meist elementar entwickelten Sätzen verknüpfend. Er entwickelt (Nr. 4) zunächst elementar den Satz: „Laufen von den Loten, die man auf den Geraden BC, CA, AB in ihren Schnittpunkten mit einem Kreise errichten kann, irgend drei in einem Punkte P zusammen, so laufen die drei anderen in einem Punkte P' zusammen und die drei Winkel PAP', PBP', PCP' weisen dieselben Halbirungslinien auf, wie die Winkel des Dreiecks, sodafs z. B. $\sphericalangle AB, AP = \sphericalangle AP', AC$ ist.“ Von hier aus gelangt Steiner zu dem Satze, dafs P und P' die Brennpunkte eines ABC eingeschriebenen Kegelschnittes sind, dessen grofse Axe ein Durchmesser des Kreises ist. Rückt man P' ins Unendliche hinaus, so ergiebt sich als Ort von P der ABC umschriebene Kreis. Ein Punkt als Brennpunkt aufgefafst charakterisirt eindeutig einen dem Dreieck eingeschriebenen Kegelschnitt. Die Gebiete, innerhalb deren P liegen mufs, um Ellipsen und Hyperbeln zu bestimmen, werden durch die Seiten des Dreiecks und den erwähnten Kreis gegen einander abgegrenzt. Nach einem von Servois auf Simson zurückgeführten Satze**) liegen die Fufspunkte der Lote, die man auf die Seiten eines Dreiecks von einem Punkte des ihm umschriebenen Kreises aus fällen kann, auf einer Geraden. Steiner bringt den Satz, nach dem Vorgange von Poncelet, mit dem Umstande in

---

*) Steiner, Développement d'une série de théorèmes relatifs aux sections coniques, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 37—64 (Ges. W., Bd. 1, S. 189—210).

**) Vergl. S. 318*.

Verbindung, daſs die Fuſspunktcurve der Parabel für den Brennpunkt derselben mit der Scheiteltangente zusammenfällt.

2. Eine Ergänzung bietet Steiner in dem Satze: „Die Directrices sämtlicher einem Dreieck eingeschriebenen Parabeln gehen durch den Höhenpunkt desselben hindurch" (Nr. 19). Steiner's ziemlich complicirter Beweis läſst freilich die eigentliche Quelle des Satzes nicht erkennen. An dem Höhenpunkt des Dreiecks bestimmt offenbar das aus den Seiten des Dreiecks und der unendlich fernen Geraden bestehende Vierseit eine circulare Involution. Jede dem Dreieck eingeschriebene Parabel empfängt ein dieser Involution angehöriges Tangentenpaar, das aus zwei aufeinander senkrechten Strahlen besteht, aus dem Höhenpunkt. Paare senkrechter Tangenten einer Parabel aber gehen von Punkten ihrer Directrix aus, die deshalb den Höhenpunkt enthalten muſs. Die einzige Parabel $\mathfrak{P}_2$, welche vier Gerade berührt, ist jedem einzelnen der vier Dreiecke, die sich aus dreien von ihnen bilden lassen, eingeschrieben. Man erhält also aus dem Obigen folgende von Steiner an anderer Stelle*) zusammengestellte Sätze, deren ersten bereits Poncelet**) auf diese Weise entwickelt hatte. Die vier Kreise, welche den Dreiecken eines Vierseits umschrieben sind, gehen durch einen Punkt P, den Brennpunkt der Parabel $\mathfrak{P}_2$, hindurch; die Fuſspunkte der Lote, die von ihm aus auf die vier Seiten sich fällen lassen, liegen in einer Geraden r, der Scheiteltangente von $\mathfrak{P}_2$. Die Höhenpunkte der vier Dreiecke liegen auf einer zu r parallelen Geraden r', der Directrix der Parabel, r enthält augenscheinlich den Mittelpunkt des Lotes, das man von P aus auf r' fällen kann. Als Mittelpunkt von $\mathfrak{P}_2$ ist der unendlich ferne Punkt der Geraden anzusehen, welche die Mittelpunkte der Diagonalen des vollständigen Vierseits enthält. Diese Gerade steht deshalb zu r und r' senkrecht. Ein anderer in der Notiz aufgestellter Satz läſst sich durch Inversion, wenn man den Pol nach P verlegt, leicht ableiten. Alsdann entstehen aus den vier eingeführten Kreisen und den Geraden des gegebenen Vierseits die Seiten eines neuen Vierseits und die Kreise, die den einzelnen Dreiecken desselben umschrieben sind; sie schneiden sich in P. Die Fuſspunkte der Lote, welche die Seiten des neuen Vierseits aus P erhalten, liegen also in einer Geraden, oder, wenn man wieder rückwärts transformirt, der Punkt P liegt mit den Punkten auf einem Kreise, welche ihm in den vier ursprünglichen Kreisen diametral gegenüber liegen. Hieraus entspringt Steiner's Satz: „Die Mittelpunkte der Kreise, welche den vier Dreiecken eines Vierseits umschrieben sind, und der ihnen gemeinschaftliche Punkt liegen auf einem Kreise." Steiner's Sätze über zwei andere

*) Steiner, Théorème sur le quadrilatère complet, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 302—303 (Ges. W., Bd. 1, S. 223—224).

) Vergl. a. a. O. S. 56* (S. 9).

Gruppen von Kreisen, auf denen die Mittelpunkte der Kreise verteilt liegen, die drei der vier Geraden berühren, scheinen aus ganz anderer Quelle zu entstammen. Der Satz von den Höhenpunkten ist übrigens von Seydewitz mit dem Umstande in Verbindung gebracht worden, daſs dem Vierseit zwei gleichseitige Hyperbeln eingeschrieben werden können [III, 13].

Ich kehre zu der Arbeit von 1828 zurück. Für jede einem gleichseitigen Dreieck eingeschriebene Parabel ist (Nr. 10) der Brennpunkt zugleich der gemeinsame Punkt der Geraden, deren jede eine Ecke des Tangentendreiecks mit dem Berührungspunkte der gegenüberliegenden Seite verbindet. Durch Parallelprojection gewinnt Steiner hieraus das Kriterium von Möbius [XXIII, 15] für die Natur des Kegelschnittes, den bei einem beliebigen Tangentendreieck der Kreuzungspunkt der genannten Transversalen bestimmt. Parabeln werden hierbei von Punkten der Ellipse dargestellt, welche dem Dreieck umschrieben ist und seinen Schwerpunkt zum Mittelpunkt hat. Steiner verallgemeinert den Satz durch centrale Projection und gelangt (Nr. 12) auch beiläufig zu Sätzen, aus denen die erste der oben [XXVII, 14] gekennzeichneten quadratischen Verwandtschaften entspringt.

3. Die Polaren des Höhenpunktes H eines Dreiecks hinsichtlich der ihm eingeschriebenen Parabeln sind, weil er den Directrices derselben angehört, und die Brennpunkte den umschriebenen Kreis ausfüllen, nach de la Hire's Satz [VI, 3] die Lote, welche man in den einzelnen Kreispunkten auf ihren Verbindungslinien mit H errichten kann. Diese Polaren umhüllen mithin einen Kegelschnitt, der H zum einen Brennpunkt, den H enthaltenden Durchmesser des Kreises zur groſsen Axe hat, und insbesondere die Geraden berührt, welche durch die Ecken des Dreiecks parallel zu den gegenüberliegenden Seiten gezogen sind (Nr. 23). Durch Parallelprojection kann man dies auf einen beliebigen Punkt in der Ebene einer Parabelschar übertragen und gewinnt schlieſslich durch Centralprojection den Satz: „Die Polaren eines beliebigen Punktes bezüglich der Kegelschnitte K_2, K_2', K_2'', ... einer Schar umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem K_2, K_2', K_2'', ... gemeinsamen Polardreieck eingeschrieben ist." Mit Hülfe des Newton'schen Mittelpunktsatzes wird wenig befriedigend erwiesen, daſs der Kegelschnitt, wenn der entsprechende Punkt über eine Gerade l geführt wird, stets noch eine vierte Gerade l_1 berührt, den Ort der Pole von l hinsichtlich K_2, K_2', K_2'', ···. Implicite ist hierin die zweite Deutung des Kegelschnittes gegeben als Hüllcurve der Geraden, deren jede einem Strahle eines Büschels bezüglich aller Kegelschnitte einer Schar conjugirt ist, und hiermit der Keim zu dem zweiten Paar dualer quadratischen Verwandtschaften, auf das Steiner an der oben [XXVII, 14] erwähnten Stelle hingewiesen hatte.

In einer anderen kleinen Arbeit*) löst Steiner die Aufgabe, aus einem Büschel diejenige Ellipse auszusondern, welche dem Kreise am nächsten kommt. Die Kegelschnitte eines Büschels, der überhaupt Ellipsen enthält, haben ein reelles Paar unendlich ferner conjugirter Punkte mit einander gemein. Diese Punkte werden durch die Axen der fraglichen Ellipse harmonisch getrennt; erscheinen sie von einem Hülfspunkte aus unter dem Winkel α, so erfüllen die Halbaxen der gesuchten Ellipse die Beziehung $b = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$. Die beiden unendlich fernen Punkte können, wie Steiner erwähnt, auch durch die Axen der im Büschel vorkommenden Parabeln festgelegt werden.

4. In einer wesentlich später liegenden Arbeit geht Steiner**) nochmals auf die Mannigfaltigkeiten der Kegelschnitte mit drei gemeinsamen Punkten oder drei gemeinsamen Tangenten ein. Dieselbe besteht allerdings, wie so viele der späteren Arbeiten Steiner's, lediglich aus einer Aufeinanderfolge von Behauptungen, deren Beweis, soweit mir bekannt, bis jetzt noch nicht völlig erfolgt ist. Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts, welcher die drei Seiten eines Dreiecks ABC berührt, kann noch willkürlich gewählt werden, charakterisirt ihn aber vollständig. Die Gebiete, deren Punkte auf diese Art Ellipsen und Hyperbeln bestimmen, werden durch die Verbindungslinien der Mitten A', B', C' der Seiten BC, CA, AB abgegrenzt. Ist r der Radius des ABC umschriebenen Kreises, und sind l', m', n' die auf die Seiten von $A'B'C'$ von einem Punkte O aus gefällten Lote, so ist der Inhalt des ABC eingeschriebenen Kegelschnitts mit dem Mittelpunkte O, falls derselbe eine Ellipse ist,

$$E = 2\pi \sqrt{r\, l' m' n'}.$$

Hat ferner O von den Seiten des Dreiecks ABC die Entfernungen l, m, n, so ist der Inhalt des dem Dreieck umschriebenen Kegelschnitts mit dem Mittelpunkt O, falls derselbe eine Ellipse ist,

$$F = \pi \frac{l m n \sqrt{r}}{\sqrt{l' m' n'}}.\ ***)$$

---

*) Steiner, Auflösung einer geometrischen Aufgabe. (Tom. XVII. p. 284 der Annales de mathém. von Gergonne.), Crelle's Journ., Bd. 2, 1827, S. 64—65 (Ges. W., Bd. 1, S. 121—124). Eine ausführlichere Darstellung der Steiner'schen Lösung wird in der Abhandlung gegeben: Gergonne, Démonstration d'un théorème relatif aux lignes du second ordre etc., Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 100—110.

**) Steiner, Teoremi relativi alle coniche inscritte e circoscritte (Estratto del giornale arcadico di Roma tomo XCIX.), Crelle's Journ., Bd. 30, 1846, S. 97—106 (Ges. W., Bd. 2, Berlin 1882, S. 327—337).

***) Hierhin gehörige Formeln hat Schröter mit grofser Vollständigkeit zusammengestellt. Die Summe und das Product der Halbaxenquadrate eines Kegelschnittes werden gegeben, wenn aufser dem Mittelpunkt O ein Polardreieck, ein umschriebenes, oder ein eingeschriebenes Dreieck vorliegt. Die Formeln für die Producte umfassen die Steiner'schen Formeln und ein unten [S. 314*] erwähntes Resultat von Seydewitz. Die For-

Aus diesem Theorem fliefsen für den Büschel und die Schar von Kegelschnitten mannigfache Folgerungen, aufserdem verknüpft es Steiner mit Poncelet's Schliefsungstheorem für den Fall der Dreiecke. Die Ecken von Dreiecken, welche einem Kegelschnitt umschrieben, einem zweiten zu ihm concentrischen Kegelschnitt eingeschrieben sind, halbiren die Seiten von Dreiecken, denen inhaltsgleiche mit den beiden ersten concentrische Kegelschnitte eingeschrieben werden können (S. 330). Tangentendreiecke eines gegebenen Kegelschnittes können dem Kreise eingeschrieben werden, welcher einen Brennpunkt desselben zum Mittelpunkt, seine Hauptaxe zum Radius hat. Die ein- und angeschriebenen Kreise dieser Dreiecke, deren Höhenpunkte mit dem anderen Brennpunkte zusammenfallen, berühren sämtlich den Kreis, welcher die Hauptaxe des Kegelschnittes zum Durchmesser hat.*)

meln für die Summe der Halbaxenquadrate knüpfen an den Faure'schen Satz von den Polardreiecken eines Kegelschnittes umschriebenen Kreisen an. Vergl.: a. a. O. S. 18† (S. 219, Aufg. 14—16).

) Diese letzten Sätze ergeben sich unmittelbar aus einem Theorem, welches Steiner 1828 (a. a. O. S. 274, Nr. 6) aufgestellt hatte: „Der Höhenpunkt F_1 eines Dreiecks und der Mittelpunkt F des ihm umschriebenen Kreises sind Brennpunkte eines dem Dreiecke eingeschriebenen Kegelschnittes, dessen grofse Axe ein Durchmesser des Feuerbach'schen Kreises des Dreieckes ist." Der letztere Kreis gehört dem Kegelschnitt nämlich offenbar als Fufspunktcurve von F, wie von F_1 zu. Hiermit verknüpfe man das zweite von Steiner 1833 aufgestellte Theorem: „Der einem Dreieck umschriebene Kreis und sein Feuerbach'scher Kreis haben den Höhenpunkt zum Ähnlichkeitspunkt und stehen im Ähnlichkeitsverhältnis 2 : 1" (a. a. O. S. 134* (Ges. W., Bd. 1, Fufsnote zu S. 489, I)). Man erhält dann den Satz: „Alle Tangenten-Dreiecke eines Kegelschnittes, deren Höhenpunkte in den einen Brennpunkt F_1 fallen, haben denselben Feuerbach'schen Kreis, welcher über der Hauptaxe $2a$ als Durchmesser beschrieben ist, und sind einem Kreise vom Radius $2a$ eingeschrieben, welcher den anderen Brennpunkt F zum Mittelpunkt hat." Spricht man den Feuerbach'schen Kreis als Mittelpunktort eines Büschels gleichseitiger Hyperbeln an, so folgt sofort: „Der zweite Endpunkt des Durchmessers einer A, B, C enthaltenden gleichseitigen Hyperbel, welcher auf der einen Seite durch den Höhenpunkt des Dreiecks ABC begrenzt wird, beschreibt den ABC umschriebenen Kreis." Da vier Punkte A, B, C, D eine gleichseitige Hyperbel eindeutig festlegen, so folgt: „Ein Kreisviereck $ABCD$ und das zweite aus den Höhenpunkten der Dreiecke BCD, CAD, ABD, ABC gebildete Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ gehen mittels einer halben Umdrehung (durch 180°) um einen bestimmten Punkt O, den Mittelpunkt der bezeichneten Hyperbel, auseinander hervor." Steiner stellt diesen Satz, den er sich jedenfalls auf diese Weise verschafft hat, in der Abhandlung auf: Geometrische Lehrsätze und Aufgaben, Crelle's Journ., Bd. 31, 1846, S. 90—92 (Ges. W., Bd. 2, S. 355—360, Lehrsatz 3). Bei vier beliebigen Punkten einer Ebene schneiden sich die Feuerbach'schen Kreise der Dreiecke BCD, CAD, ABD, ABC und der dem Diagonaldreiecke des Vierecks $ABCD$ umschriebene Kreis im Mittelpunkte der einzigen A, B, C, D enthaltenden gleichseitigen Hyperbel [Vergl.: III, 11]. Derselbe gehört in analoger Weise zu dem Viereck $A_1 B_1 C_1 D_1$ der Höhenpunkte, und man kann so ohne Ende fortfahren. Übrigens kommt der erste Satz auch schon in der erwähnten Fufsnote (IV) und auch in der Abhand-

5. Wiederholt hat sich Steiner mit den beiden Reihen von Kreisen beschäftigt, die einen Kegelschnitt doppelt berühren. Ich hatte an früherer Stelle [VII, 6] gezeigt, wie leicht sich einige dieser Resultate aus räumlichen Betrachtungen ableiten lassen, und will hier noch einige Bemerkungen nachtragen. Steiner wurde zunächst auf sehr eigentümliche Art zur Betrachtung dieser Kreisreihen veranlaſst.*) Bei einem Dreieck ABC kann man nach einem Punkte D der Grundlinie AB fragen, welcher der Forderung

$$CD^2 = q \cdot AD \cdot DB$$

Genüge leistet. Aus seinen sehr einfachen Entwickelungen schlieſst nun Steiner, daſs diese Aufgabe bei gegebenem positiven oder negativen Werte von q für alle diejenigen Punkte lösbar ist, welche dem Innern einer Ellipse oder Hyperbel mit den Brennpunkten A und B angehören. Ein Kreis, welcher um einen beliebigen Punkt D der endlichen bezw. unendlich groſsen Strecke AB mit dem Radius $\sqrt{q \cdot AD \cdot DB}$ beschrieben ist, enthält nun nur Punkte, für welche die Aufgabe lösbar ist. Der Kreis liegt daher ganz innerhalb des bezeichneten Gebietes, berührt also den begrenzenden Kegelschnitt in jedem Punkte, in dem er ihn erreicht, und gehört deshalb in diejenige Reihe doppelt berührender Kreise des Kegelschnittes, deren Mittelpunkte der Hauptaxe angehören. Denkt man nun an den Potenzsatz des Apollonius, so entsteht folgendes Theorem (S. 408): „Die Kreise, welche über einer beliebigen Reihe paralleler Sehnen eines Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ als Durchmessern beschrieben sind, werden von einem Kegelschnitte K eingehüllt, von dem zwei Brennpunkte den zur Richtung der Sehnen conjugirten Durchmesser von $\mathfrak{K}$ begrenzen, die zweite Axe von K ist ein Durchmesser des Kreises der Schar, dessen Mittelpunkt mit dem des Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ zusammenfällt; jeder Endpunkt der ersten Axe von K sendet zwei aufeinander senkrechte Tangenten von $\mathfrak{K}$ aus; seine Polare nach $\mathfrak{K}$ enthält den Mittelpunkt des

---

lung von 1828 (a. a. O. S. 274*, Fuſsnote zu S. 195) vor. Daſs eine Ecke D des Kreisvierecks $ABCD$ und der Höhenpunkt D_1 des Dreiecks ABC aus den anderen Ecken einen Durchmesser einer gleichseitigen Hyperbel begrenzen, geht übrigens aus den Winkelvergleichungen

$$\sphericalangle\, CD_1, BD_1 = \sphericalangle\, BD, CD = \sphericalangle\, BA, CA; \ldots$$

unmittelbar hervor. Sie zeigen, daſs die entgegengesetzt gerichteten projectivischen Strahlenbüschel $D(ABC\ldots)$ und $D_1(ABC\ldots)$ congruent sind. Man kann auf diese Weise den zahlreichen Beweisen, welche den Feuerbach'schen Kreis eines Dreiecks als Mittelpunktort der ihm umschriebenen gleichseitigen Hyperbeln kennzeichnen, noch einen weiteren hinzugesellen.

*) Steiner, Elementare Lösung einer geometrischen Aufgabe, und über einige damit in Beziehung stehende Eigenschaften der Kegelschnitte (Auszug aus einer am 19ten April 1847 der Akademie der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung.), Crelle's Journal, Bd. 37, 1848, S. 161—192 (Ges. W., Bd. 2, S. 389—420).

zu ihm gehörigen Krümmungskreises. $\mathfrak{K}$ und K berühren sich in zwei Punkten H und H_1 und zwar längs Tangenten, die zu den gegebenen Sehnen senkrecht stehen.“ Einen speciellen Fall, in dem der erste Kegelschnitt in einen Kreis übergeht, hatte Steiner schon bei früherer Gelegenheit angegeben.*) Projicirt man auf eine Ebene α in beliebiger Richtung einen gröſsten Kreis einer Kugel, dessen Ebene zu α senkrecht steht, und die Kreise derselben, deren Ebenen zu α parallel sind, so entsteht (S. 402) eine einfache Begründung dieses Theorems. Projectionsstrahlen, welche den gröſsten Kreis treffen oder die Kugel berühren, schneiden Punkte von $\mathfrak{K}$ oder K, welche aber Ellipsen sind, aus. Auch die sogenannte plagiographische Projection Anger's**) führt mit Leichtigkeit zu dem Steiner'schen Theorem. Man beschreibe über einer Sehne des Kegelschnitts $\mathfrak{K}$ als Durchmesser zwei Kreise, den ersten in der Ebene von $\mathfrak{K}$ selbst, den zweiten in einer zu ihr senkrechten Ebene. Der zweite Kreis beschreibt, wenn die Sehne sich selbst parallel bewegt wird, eine Oberfläche F_2, der erste ihre plagiographische Projection. Da der erste Kreis aus dem zweiten durch Projection in einer ganz bestimmten Richtung hergestellt werden kann, berührt er beständig den zu dieser Richtung gehörigen scheinbaren Umriſs der Fläche F_2 in zwei Punkten, dasselbe gilt offenbar von dem Kegelschnitt $\mathfrak{K}$.

6. Indem man in dem geschilderten Beweise eine Fläche F_2 mit imaginären Nabelpunkten benutzt, kann man den Satz auch auf die zweite Reihe einen Kegelschnitt K doppelt berührender Kreise anwenden, deren Mittelpunkte der Nebenaxe angehören; Steiner's Beweisverfahren kann verallgemeinert werden, indem man die Kugel durch eine Rotationsfläche zweiten Grades ersetzt. Steiner giebt (S. 406) für die zweite Kreisreihe folgende höchst anschauliche Entstehung: „Die Endpunkte der Strecken, welche von einem Brennpunkte eines Kegelschnittes aus unter einem bestimmten Winkel φ nach den Tangenten desselben hin gezogen sind, erfüllen einen Kreis, der den Kegelschnitt doppelt berührt, und dessen Mittelpunkt seiner Nebenaxe angehört.“ Man kann dieses Resultat mit Hülfe von Ähnlichkeitssätzen leicht aus Apollonius' Specialfall [VI, 2] ableiten, in dem $\varphi = 90^0$ ist, und erkennt auch sofort, daſs der Radius des Kreises zur Entfernung seines Mittelpunktes von einem Brennpunkte in einem bestimmten Verhältnis $(a : e)$ steht.

Aus der Betrachtung der Kugeln, die einem Rotationskegel, bezw. einem einschaligen Rotationshyperboloid eingeschrieben sind, lieſsen sich dieses und andere Resultate erklären, die Steiner in einer zweiten hierhin gehörigen Arbeit***) entwickelte [VII, 6]. Ich trage aus dieser Abhandlung nur noch einige Sätze Steiner's über

) a. a. O. S. 268 (Ges. W., Bd. 1, S. 176, Lehrsatz 2).

**) Anger, Über plagiographische Projection, Grunert's Arch., Bd. 8, 1846, S. 235—250.

***) Vergl. a. a. O. S. 63*.

die durch zwei Kreise bestimmte Schar von Kegelschnitten nach.*) „Die Tangenten eines Kegelschnittes der Schar schneiden (S. 467) auf den beiden Kreisen Sehnen aus, die in einem bestimmten Verhältnis stehen, das für die Parabel der Schar gleich 1 wird. Die Brennpunkte der Kegelschnitte liegen zum Teil auf der Centrale der beiden Kreise, zum Teil auf einem Kreise u. s. w.“

7. Steiner geht nun in einer dritten Arbeit**) zunächst auf die Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte ein, die zwei Kegelschnitte doppelt berühren. Er entwickelt den von Chasles verallgemeinerten Satz, dafs die beiden Berührungssehnen zwei gegenüberliegende gemeinschaftliche Sehnen der beiden Kegelschnitte harmonisch trennen [XI, 2; XXX, 2]. Nach diesem Theorem sind die Kegelschnitte auf drei Reihen verteilt: „Bei zwei Kegelschnitten derselben Mannigfaltigkeit liegen die acht Berührungspunkte allemal auf einem Kegelschnitt“ (S. 472). Als specieller Fall tritt das schon bei Staudt und Chasles [XXII, 1] vorkommende Theorem auf, dafs die Berührungspunkte zweier Kegelschnitte mit ihren gemeinsamen Tangenten einem Kegelschnitt angehören. Mit Hülfe von Transversalensätzen hatte Steiner schon in einer früheren Abhandlung***) den Satz erwiesen: „Die sechs Punkte, in denen die Seiten eines Dreiecks von zwei Kegelschnitten berührt werden, gehören einem dritten Kegelschnitt an.“ Die entwickelten und die zu ihnen dualen Sätze ergeben Mittel, einen Kegelschnitt zu construiren, der zwei gegebene doppelt berührt und einen Punkt enthält, bezw. eine gegebene Gerade berührt.

Steiner betrachtet vorzugsweise noch die Bedingungen, unter denen drei Kegelschnitte von einem und demselben vierten doppelt berührt werden. Steiner entwickelt zunächst die bei Poncelet auftretende [XIX, 3] und die zu ihr duale Form der Bedingung und stellt schliefslich folgenden Satz†) auf: „Es giebt 27 Dreiecke, die je eine Ecke von den drei Polardreiecken enthalten, welche die drei Kegelschnitte paarweise mit einander gemein haben. Jedem einzelnen entspricht ein zweites Dreieck, das aus den gegenüberliegenden Seiten der Polardreiecke gebildet ist. Sobald alle drei Kegelschnitte von einem vierten doppelt berührt werden, wird irgend eines der ersteren Dreiecke zu dem entsprechenden perspectivisch.“

*) Steiner spricht von einem „Büschel“ von Kegelschnitten, er braucht die Worte Schar und Büschel überhaupt umgekehrt, wie dies jetzt üblich ist.

**) Steiner, Allgemeine Betrachtung über einander doppelt berührende Kegelschnitte, Crelle's Journ., Bd. 45, 1853, S. 212—224 (Ges. W., Bd. 2, S. 469—483).

***) Steiner, Démonstration de quelques théorèmes, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 1—8 (Ges. W., Bd. 1, S. 181—188). Weiter unten [XXXIV, 11] werden die entsprechenden Sätze über Flächen F_2 in Betracht kommen.

†) Derselbe findet sich bereits a. a. O. S. 279* (S. 415).

XXIX. Die projectivische Beziehung bei Chasles. Historische Übersicht.

1. Ehe Chasles' Arbeiten zur projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte und einschaligen Hyperboloide zur Schilderung kommen, ist es wohl angezeigt, eine Übersicht über die Entwickelung des Gedankens zu geben, das Doppelverhältnis bei Untersuchung dieser Gebilde zu verwenden. Chasles' Name wird hier mehrfach zu nennen sein. Die Beziehung zwischen zwei projectivischen Punktreihen nimmt ihre einfachste Form bei Einführung der Fluchtpunkte F und G_1 an; sind AA_1, BB_1, $CC_1, \ldots$ Paare homologer Punkte, so ist

$$AF \cdot A_1G_1 = BF \cdot B_1G_1 = CF \cdot C_1G_1 = \cdots.$$

Die Beziehung zwischen zwei projectivischen Strahlenbüscheln läſst sich mit Hülfe der Fluchtpunktrelation zweier zu ihnen perspectivischen Punktreihen darstellen. Ein hierauf bezüglicher Satz findet sich, wie oben erwähnt*), bereits bei Apollonius. Man ziehe in den Punkten F und G_1 eines Kegelschnittes Parallelen f und g_1 zu seinen Tangenten in G_1 und F; die Schnittpunkte A und A_1 von f und g_1 mit zwei Strahlen G_1P und FP, die sich in einem Punkte P des Kegelschnittes schneiden, bestimmen, wie Apollonius zeigt, ein constantes Product $FA \cdot G_1A_1$. In der That schneiden die beiden den Kegelschnitt erzeugenden Strahlenbüschel mit den Scheiteln G_1 und F, da der Verbindungslinie FG_1 einmal eine Parallele zu f, hernach eine solche zu g_1 entspricht, auf f und g_1 Punktreihen mit den Fluchtpunkten F und G_1 aus.

Andererseits schneiden zwei beliebige den Kegelschnitt erzeugende Strahlenbüschel mit den Mittelpunkten S und S_1 auf zwei beliebigen parallelen Sehnen SF und S_1G_1 desselben projectivische Punktreihen $ABC\cdots$ und $A_1B_1C_1\cdots$ mit den Fluchtpunkten F und G_1 aus. Diese Form des Fluchtpunktsatzes kommt in etwas anderer Form bei Simson**) vor. Besteht nämlich für zwei Punkte T und T_1 von SF und S_1G_1 die Proportion

$$\frac{G_1A_1}{ST} = \frac{S_1T_1}{FA},$$

so schneiden sich auch G_1T und FT_1 in einem Punkte des Kegelschnittes. Aus der Proportion schloſs Simson den Pascal'schen Satz für ein Sechseck, von dem zwei gegenüberliegende Seiten parallel sind. Wenn man endlich projectivische Strahlenbüschel mit Geraden schneidet, die zu zwei homologen Strahlen parallel sind, so entstehen projectivisch-ähnliche Punktreihen. Specielle Fälle dieses Satzes von Cavalerius gaben

*) Vergl. I, 9.
**) Vergl. II, 4.

L'Hospital und Mydorgius.*) L'Hospital verlegte die beiden Scheitel in die beiden Endpunkte der Hauptaxe und schnitt die Strahlenbüschel mit Geraden, die parallel und senkrecht zur Hauptaxe sind. Mydorgius gab eine häufig angewendete Construction der Parabel.

Vielfältiger, als die projectivische Erzeugung durch Strahlenbüschel, findet sich die durch projectivische Punktreihen in der älteren Litteratur vor. Ich erwähnte schon [I, 9], dafs die Erzeugung der Parabel durch ähnliche Punktreihen in einem Theorem von Apollonius sich ausspricht. Für die projectivischen Punktreihen, $ABC \cdots$ und $A_1 B_1 C_1 \cdots$, welche eine bewegliche Tangente auf zwei festen unter sich parallelen Tangenten ausschneidet, sind die Berührungspunkte P und $\mathfrak{P}$ die Fluchtpunkte; die so entstehende Relation

$$PA \cdot \mathfrak{P}A_1 = PB \cdot \mathfrak{P}B_1 = PC \cdot \mathfrak{P}C_1 = \cdots$$

bildet [VI, 2 ff.] bei Apollonius und Späteren den Ausgangspunkt zur Untersuchung der Brennpunkteigenschaften, wobei $P\mathfrak{P}$ mit der Hauptaxe zusammenfällt. Apollonius folgert die Relation aus seiner oben [V, 1] gegebenen Definition der Tangente. Bei den Punktreihen auf zwei beliebigen Tangenten besteht eine ganz ähnliche Relation, nur sind die Fluchtpunkte P und $\mathfrak{P}$ die Schnittpunkte der zu den gegebenen parallelen Tangenten. Es wurde dargethan, auf welche Weise Newton diesen allgemeineren Satz entwickelte [III, 5]. Die auf die Asymptoten einer Hyperbel bezügliche Relation kommt ebenfalls schon bei Apollonius vor.

2. Alle diese Anfänge waren völlig in Vergessenheit geraten, als man sich im Anfange des 19ten Jahrhunderts von Neuem mit derartigen Untersuchungen zu beschäftigen begann. Zunächst mag eine Arbeit von Raymond**) Erwähnung finden. Er hebt hervor, dafs Strahlenbüschel, welche einen Kegelschnitt erzeugen, in eindeutiger Beziehung stehen, und dafs folglich eine einfache Beziehung zwischen den Neigungswinkeln φ und ψ zusammengehöriger Strahlen gegen die x-Axe bestehen müsse. Jedoch nur in dem Specialfall, in welchem die Scheitel der Büschel die Hauptaxe des Kegelschnittes begrenzen, wird die Relation entwickelt und auf die Form

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = \text{const.}$$

gebracht. Die Fluchtpunktrelation für zwei parallele Tangenten brachte Gergonne in einer Aufgabe in Erinnerung, die von Bérard und Brianchon gelöst wurde.***) Brianchon's Lösung ent-

*) Vergl. a. a. O. S. 9†, 13** (u. 10***).

**) Raymond, De la génération des lignes du second ordre, par l'intersection de deux lignes droites, Gerg. Ann., Bd. 2, 1811 u. 1812, S. 360—368.

***) Bérard, Brianchon, Démonstrations du dernier des deux théorèmes énoncés à la page 296 du quatrième volume de ce recueil, Gerg. Ann., Bd. 5, 1814 u. 1815, S. 52—54.

behrt nicht eines gewissen Interesses. Berühren die parallelen Seiten AB und A_1B_1 eines dem Kegelschnitte umschriebenen Trapezes ABB_1A_1 in den Punkten P und $\mathfrak{P}$, so schneiden sich B_1A und A_1B in einem Punkte Q von $P\mathfrak{P}$. Aus Ähnlichkeitssätzen folgt also unmittelbar, dafs

$$PA \cdot \mathfrak{P}A_1 = PB \cdot \mathfrak{P}B_1$$

ist. Eine andere Entwickelung von Brianchon*) sei hier angeführt. Werden zwei parallele Tangenten eines Kreises, die in P und $\mathfrak{P}$ berühren, von einer dritten, welche im Punkte $\mathfrak{A}$ berührt, in den Punkten A und A_1 geschnitten, so ist

$$PA = A\mathfrak{A}, \quad \mathfrak{P}A_1 = A_1\mathfrak{A};$$

da AA_1 am Mittelpunkt des Kreises, welcher der Normale von $\mathfrak{A}$ angehört, einen rechten Winkel bestimmt, so ergiebt sich

$$PA \cdot \mathfrak{P}A_1 = A\mathfrak{A} \cdot A_1\mathfrak{A} = r^2,$$

wobei r der Radius des Kreises ist. Durch affine Transformation entsteht eine entsprechende Relation bei der Ellipse.

3. Kann man diesen letzteren Bestrebungen nur einen relativen Wert beimessen, so sind um so wichtiger die Resultate von Poncelet, Chasles und Bobillier, die ich an verschiedenen Stellen erwähnt habe und des besseren Zusammenhangs wegen hier noch einmal kurz anführe. Im Jahre 1813 verallgemeinerte Chasles**) eine bekannte Eigenschaft des „quadrilatère gauche" und gelangte in sehr einfacher Weise zu einem Theorem, welches die Erzeugung des einschaligen Hyperboloids durch projectivische Punktreihen zur Folge hatte. Schneiden drei Erzeugende a, b, c der einen Schar drei Erzeugende l; l_1; l_2 der anderen Schar in den Punkten A, B, C; A_1, B_1, C_1; A_2, B_2, C_2, so ist

$$\frac{AC}{BC} = \alpha \frac{A_1C_1}{B_1C_1}; \quad \frac{AA_2}{A_1A_2} = \alpha \frac{BB_2}{B_1B_2}.$$

Hält man die Gerade A_2B_2 fest und bewegt CC_1 in ihrer Schar, so bleibt α constant. Die Relation drückt aus, dafs l und l_1 von vier Geraden der anderen Schar in Gruppen von gleichem Doppelverhältnis getroffen werden. Projicirt man die sechs Geraden in einer beliebigen Richtung auf eine Hülfsebene, so gehen sie in Tangenten eines Kegelschnittes über; unter ihren Schnittpunkten gelten also, wie Chasles 1828 [XXI, 13] entwickelte, ebenfalls die obigen Gleichungen. Durch Elimination von α entsteht ein dem Brianchon'schen Satz gleichwertiges Theorem, das von Poncelet in der That aus demselben abgeleitet wurde [XVII, 2]. Poncelet hat aus seinem Resultate die Folgerung gezogen, dafs bei einer Parabel die Relation

*) Brianchon, Géométrie, Corr. de l'éc pol, Bd. 3, Nr. 1, 1814, S. 1—4.
**) Vergl. IX, 8.

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A_1 C_1}{B_1 C_1}$$

besteht, dieselbe also durch projectivisch-ähnliche Punktreihen auf zwei beliebigen Tangenten erzeugt werden kann. Im Jahre 1829 brachte Chasles [XXI, 13] ein Theorem, das die Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Strahlenbüschel zur unmittelbaren Folge hat. Schneiden die Strahlen, welche zwei feste Punkte eines Kegelschnitts von einem beliebigen Punkte des Kegelschnittes aus projiciren, eine feste Sehne $\alpha\beta$ desselben in den Punkten μ und ν, so besteht die Beziehung

$$\frac{\mu\alpha}{\mu\beta} : \frac{\nu\alpha}{\nu\beta} = \text{const.}$$

Es gilt also der Satz: „Vier Punkte eines Kegelschnittes werden von allen Punkten desselben aus durch Gruppen von demselben Doppelverhältnis projicirt.“ Chasles hat freilich aus dieser Entwickelung nur den Schlufs gezogen: „Einem Kegelschnitt gehören die Punkte an, von denen aus vier Punkte durch eine harmonische Strahlengruppe projicirt werden“, und hat diesem Resultat das duale beigesellt; beide Theoreme hat Staudt in Poncelet's Sinne 1831 [XXII, 2] abgeleitet. Die Darstellung der Erzeugung von Kegelschnitten und einschaligen Hyperboloiden durch projectivische Strahlenbüschel und Ebenenbüschel im Sinne der analytischen Geometrie ist 1828 von Bobillier gegeben worden [XXIII, 2; IX, 5; S. 27†].

4. Chasles liefs noch mehrere Jahre verstreichen, bis er aus den oben gegebenen Anfängen heraus zu dem Doppelverhältnisbegriff überging und die Wichtigkeit der obigen Theoreme für die Kegelschnittlehre entwickelte. Während dieser langen Pause erfolgte die Drucklegung des Aperçu historique. Der zweite Teil dieses Werkes ist eine von der Brüsseler Akademie im Jahre 1830 mit einem Preise ausgezeichnete Abhandlung. In derselben benutzt Chasles in ausgiebiger Weise die Erhaltung des Doppelverhältnisses bei der collinearen und reciproken Transformation. Mit dem Umstande, dafs diese Schrift das officielle Datum 1830 trage, hat es Chasles später zu rechtfertigen gesucht, dafs er die unzweifelhafte Priorität der Deutschen mit keinem Worte hervorhebt.*) Ob derselbe Anspruch für die Noten

*) Zu einer solchen Äufserung wurde Chasles durch die Bemerkung Poncelet's veranlafst, dafs sich Chasles ebenso, wie vor ihm Steiner, des Doppelverhältnisses bediene. Dieselbe findet sich in dem Werke: Poncelet, Applications d'analyse et de géométrie etc., Bd. 1, Paris 1862 (S. 492 ff.). Als Poncelet diese Schrift der Pariser Akademie überreichte, ohne übrigens auf jene Äufserung zurückzugreifen, hob Chasles hervor, dafs das officielle Datum seiner Abhandlung das des Tages der Preiserteilung (1830) sei, dafs er in demselben keinesfalls von Steiner's Syst. Entwickelung hätte Nutzen ziehen können. Vergl.: Après cette lecture, M. Chasles demande la parole et s'exprime ainsi etc., Comptes rendus,

des ersten Teils gestellt werden kann, in denen die Wichtigkeit der projectivischen Erzeugung der Kegelschnitte und einschaligen Hyperboloide hervorgehoben wird, bleibt zweifelhaft. Auf ihre Besprechung mufs ich zunächst eingehen.

Der aus vier Punkten A, B, C, D einer Geraden gebildete Ausdruck

$$\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$$

nimmt den Wert 1 an, wenn A und B durch C und D harmonisch getrennt werden; aus diesem Grunde wählt Chasles für den Ausdruck den Namen „fonction (oder rapport) anharmonique".*) Vier Punkte einer Geraden zeigen das gleiche Doppelverhältnis, wie vier Strahlen oder Ebenen, welche dieselben von einem Punkte oder von einer Geraden aus projiciren. Man kann das Doppelverhältnis auch aus den sinus der Neigungswinkel berechnen, welche die Strahlen oder Ebenen der eingeführten Quadrupel bestimmen.**) Aus der Relation

$$AD \cdot BC + CD \cdot AB = BD \cdot AC,$$

die auf Euler***) und Poncelet†) zurückgeführt wird, folgt sodann die Gleichung

Bd. 54, 1862, S. 1146—1148. Selbst wenn man als Datum für die Abhandlung 1830 zugiebt, so bleibt für das Auftreten des Doppelverhältnisses bei reciproken Verwandtschaften in der Ebene, bei collinearen im Raume die Priorität von Möbius unbestreitbar. Die Erzeugung der Kegelschnitte und einschaligen Hyperboloide durch projectivische Gebilde war wohl, wie man zugeben kann, durch die oben erwähnten Arbeiten Chasles' beinahe vollständig vorbereitet. Aber erst die Erkenntnis, dafs projectivische Gebilde durch drei Paare homologer Elemente festgelegt sind, macht diese Erzeugung, wie ich an früherer Stelle [XVII, 2] hervorhob, fruchtbar. Es ist das unbestreitbare Verdienst Steiner's, diesen Gedanken in methodischer Weise zuerst ausgenutzt zu haben, während er bei Chasles erst im Aperçu historique zur Anwendung kommt. Dafs Chasles bei der ersten Herausgabe seines Buches (1837) auf die Schriften der Deutschen nicht hinwies, kann erklärlich gefunden werden, verwunderlich aber bleibt es, dafs er auch 1875 bei Herausgabe der zweiten Auflage, die allerdings ein unveränderter Abdruck der ersten ist, mit keinem Worte auf diese Verhältnisse eingeht.

*) Aperçu historique, S. 35.

**) Chasles, Sur la fonction anharmonique de quatre points, ou de quatre droites, Aperçu historique, Note 9, S. 302—308.

***) Euler, Variae demonstrationes geometricae, Novi Comm. ac. sc. imp. Petropolitanae f. 1747 u. 1748, Bd. 1, 1750, S. 49—66 (S. 49).

†) Poncelet, Mémoire sur les centres de moyennes harmoniques etc., Crelle's Journ., Bd. 3, 1828, S. 213—272 (Traité, Bd. 2, S. 54). Poncelet beobachtet, dafs die Relation

$$AC \cdot PB = AB \cdot PC + BC \cdot PA$$

projectivischer Natur ist und deshalb, wenn man den Punkt P in die Unendlichkeit hinaus projicirt, aus der evident richtigen Beziehung

$$A'C' = A'B' + B'C'$$

hervorgeht.

$$\frac{AD}{BD}:\frac{AC}{BC}+\frac{CD}{BD}:\frac{CA}{BA}=1$$

mit zwei anderen gleicher Art. Stimmen nun bei zwei Gruppen $ABCD$ und $A'B'C'D'$ von Punkten, die zwei Geraden angehören, zwei entsprechend gebildete Doppelverhältnisse überein, so ist dasselbe mit irgend zwei anderen der Fall, und man kann auch in den Relationen der zuletzt gegebenen Art ein Doppelverhältnis durch das entsprechend gebildete der anderen Gruppe ersetzen. Mit Benutzung des Doppelverhältnisses von vier Ebenen zeigt Chasles genau so wie Steiner, daſs vier Erzeugende, welche drei Gerade treffen, zugleich noch unendlich viele andere Gerade treffen; im Anschluſs hieran wird die Erzeugbarkeit der beiden Geradenscharen eines Hyperboloïds durch projectivische Punktreihen und projectivische Ebenenbüschel entwickelt und gefolgert, daſs die Fläche mit einer beliebigen Ebene einen Kegelschnitt gemein hat.

5. Chasles wendet sich sodann*) zu der Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Strahlenbüschel. Wie bereits an früherer Stelle [II, 7] hervorgehoben wurde, wird der Satz vom Doppelverhältnis von vier Punkten eines Kegelschnittes zunächst aus dem Involutionssatze von Desargues abgeleitet. In der That, projicirt man die Punktgruppe $ABCD$ von zwei Punkten S und S_1 aus auf die Gerade AB, wobei die Gruppen $AB\mathfrak{C}\mathfrak{D}$ und $AB\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$ entstehen mögen, und sind dann AB, $\mathfrak{C}\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}$ drei Punktepaare einer Involution, so drückt dies einmal aus, daſs A, B, C, D, S, S_1 einem Kegelschnitt angehören, und dann, nach Entwickelungen einer anderen später zu besprechenden Note des Aperçu, daſs

$$AB\mathfrak{C}\mathfrak{D},\quad BA\mathfrak{D}_1\mathfrak{C}_1,\quad AB\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1$$

von gleichem Doppelverhältnis sind. Bei der Schwierigkeit jedoch, den Desargues'schen Involutionssatz zweckentsprechend zu erweisen, möchte Chasles den Zusammenhang lieber umkehren und geht von der Erzeugung des Kreises durch congruente Strahlenbüschel aus, welche sofort die Erzeugung des Kegelschnittes durch projectivische Strahlenbüschel zur Folge hat. Chasles zeigt nun zunächst, daſs das Braikenridge-Maclaurin'sche Bewegungsgesetz [I, 7] auf einen Kegelschnitt führt, und macht darauf aufmerksam, daſs es den Pascalschen Satz zur unmittelbaren Folge hat; er geht alsdann zu Newton's organischer Erzeugung der Kegelschnitte über, die insofern verallgemeinert wird, als die unfreien Schenkel der bewegten Winkel sich anstatt auf einer Geraden beständig auf einem durch die Scheitel gelegten Kegelschnitte schneiden. Das Haupttheorem kann auch in

*) Chasles, Sur la propriété anharmonique des points d'une conique. — Démonstration des propriétés les plus générales de ces courbes, Aperçu historique, Note 15, S. 334—341.

der Form ausgesprochen werden: „Eine Gruppe von vier Strahlen eines Büschels behält dasselbe Doppelverhältnis, wenn die Strahlen sich um feste Punkte drehen, und der Scheitel einen diese vier Punkte enthaltenden Kegelschnitt durchläuft.“ Auch das „theorema ad quatuor lineas“ und eine von Pascal aufgestellte metrische Beziehung werden mit dem Theorem in Verbindung gebracht. Chasles schliefst seine Note mit der Bemerkung, dafs zwei Punkte X und X' projectivische Punktreihen beschreiben, wenn sie auf feste Punkte O und E, O' und E' der Träger mit Hülfe der Gleichungen

$$c\frac{OX}{EX} + c'\frac{O'X'}{E'X'} = c_0$$

bezogen sind. Endlich macht er noch darauf aufmerksam, dafs „homographische“ Strahlenbüschel, welche in zwei collinearen, einer Ebene angehörigen Feldern einander entsprechen, einen Kegelschnitt erzeugen. In einer anderen Note geht Chasles zu der Erzeugung der Kegelschnitte durch projectivische Punktreihen über.*) Chasles giebt an, dafs die verschiedenen auf die Tangentenreihe des Kegelschnittes bezüglichen Sätze, der Brianchon'sche Satz, ein Gegenstück zur organischen Erzeugung Newton's, endlich das Gegenstück zum Involutionssatz von Desargues, sämtlich in leichtester Weise aus dem Theorem abfliefsen, dafs vier feste Tangenten eines Kegelschnittes eine bewegliche in einer Gruppe von constantem Doppelverhältnis schneiden. Wegen der Herleitung dieses Satzes beruft er sich auf die oben [XXIX, 3] nochmals angeführte Abhandlung von 1828.

6. Als eine erste Frucht seiner Principien hat Chasles**) den Satz entwickelt, dafs zwei Polardreiecke ABC und $A'B'C'$ eines Kegelschnittes einem Kegelschnitte eingeschrieben, einem anderen umschrieben sind. Bezeichnet man mit $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A}$ die Schnittpunkte von BC und AC mit $A'B'$, so sind A', B', $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ die Pole von $C'B'$, $C'A'$, $C'B$, $C'A$. Nach einem an anderer Stelle des Aperçu [Vergl. XXXII, 15, 16] entwickelten Satze besteht also die Doppelverhältnisgleichung

$$C'(A'B'AB) = (B'A'\mathfrak{B}\mathfrak{A}) = (A'B'\mathfrak{A}\mathfrak{B});$$

indem man die Gruppe $A'B'\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ von C aus projicirt, erhält man die Doppelverhältnisgleichung

$$C'(A'B'AB) = C(A'B'AB),$$

welche den einen Teil des Satzes beweist. Den zweiten Teil kann man, wie Chasles ausführt, direct aus dem ersten ableiten; es besteht, wenn die Schnittpunkte von AB mit $C'A'$ und $C'B'$ mit $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{B}'$ bezeichnet werden, die Doppelverhältnisgleichung

*) Chasles, Sur la propriété anharmonique des tangentes d'une conique, Aperçu historique, Note 16, S. 341—344.

**) Vergl. a. a. O. S. 154*.

$$(A'B'\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = (\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'AB).$$

Chasles folgert hieraus noch, daſs zwei von einem Punkte ausgehende Tripel conjugirter Strahlen einer Oberfläche zweiter Ordnung einem Kegel zweiten Grades angehören, zwei Tripel conjugirter Ebenen, die von einem Punkte ausgehen, einem Kegel zweiten Grades umschrieben sind. Hieraus ergeben sich die oben [XXVII, 16] erwähnten, auf die Tripel conjugirter Durchmesser der Oberfläche bezüglichen Specialfälle.

7. Ich gehe nunmehr zu einigen Abhandlungen über, in welchen Chasles sich eingehend mit dem einschaligen Hyperboloid beschäftigt, und zwar beginne ich mit der umfangreichsten, schon gelegentlich genannten Arbeit.*) Die Ebenen, welche vier in dieselbe Schar gehörige Erzeugende eines Hyperboloids von einer Geraden l der anderen Schar aus projiciren, besitzen dasselbe Doppelverhältnis, wie ihre Berührungspunkte, in welchen l von jenen Erzeugenden getroffen wird. Läſst man speciell eine der vier Ebenen im Unendlichen berühren, und nennt Centralpunkt den Berührungspunkt O der zu ihr senkrechten Ebene, so erhält man für irgend zwei Punkte A und A' der Geraden l, in denen sie von zwei aufeinander senkrechten Tangentialebenen berührt wird, nach der allmeinen Regel die Beziehung

$$OA \cdot OA' = \text{const.};$$

diese Punktepaare bilden also eine Involution. Genau dasselbe findet bei einer beliebigen Regelfläche statt, denn für diese Verhältnisse kann man statt ihrer ein einschaliges Hyperboloid einsetzen, welches durch zwei aufeinanderfolgende Gerade hindurchgeht. Der Centralpunkt ist der Fuſspunkt der Geraden, welche zu der ausgewählten und der ihr unendlich nahen Geraden der Regelfläche zugleich senkrecht steht; er ist überdies der Scheitel des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids, welches die Normalen der Regelfläche längs der Erzeugenden ausfüllen. Chasles weist auf eine frühere Behandlung dieses Theorems hin**) und macht bei dieser Gelegenheit auf Beweise des Satzes von Binet und Olivier aufmerksam, welche durch diese erste Veröffentlichung hervorgerufen wurden.

8. Der § II der Schrift zeigt nahe Verwandtschaft mit den entsprechenden Entwickelungen Steiner's. Nachdem zunächst die Erzeugung des einschaligen Hyperboloids durch projectivische Punktreihen und Ebenenbüschel in sehr ausführlicher Weise dargethan ist, wird gezeigt, wie leicht bekannte specielle Hyperboloide sich hier ein-

*) Chasles, Sur les surfaces engendrées par une ligne droite; particulièrement sur l'hyperboloïde, le paraboloïde et le cône du second degré, Quet. Corr., Bd. 11, 1839, S. 49—113.

**) Chasles, Sur quelques Propriétés générales des Surfaces gauches, Liouv. Journ., Bd. 2, 1837, S. 413—417.

fügen lassen. Chasles erörtert (S. 81 ff.) das orthogonale Hyperboloid, die Bobillier-Poncelet'sche Erzeugungsweise des Hyperboloids, bildet ein Analogon zu Newton's organischer Erzeugung der Kegelschnitte, hebt hervor, dafs homologe Ebenen congruenter Ebenenbüschel sich in Erzeugenden eines Hyperboloids schneiden (S. 83), und erörtert zum Schlufs, dafs eine Gerade ein Hyperboloid beschreibt, wenn sie zwei windschiefe Gerade in conjugirten Punkten einer Oberfläche zweiter Ordnung trifft oder mit ihnen conjugirte Ebenen von F_2 bestimmt. Chasles hatte für das orthogonale Hyperboloid noch eine andere Definitionsweise gefunden.*) Der geometrische Ort eines Punktes, für dessen Entfernungen PQ und PQ_1 von zwei windschiefen Geraden a und a_1 die Beziehung besteht

$$\frac{PQ}{PQ_1} = \text{const.},$$

ist ein solches Hyperboloid. Die Gleichung definire nämlich, führt Chasles aus, sicherlich eine Oberfläche F_2; auf derselben weist er recht umständlich einen Kreis und eine zur Ebene desselben senkrechte Gerade nach, und dies ist, wie vorher entwickelt war, die charakteristische Eigenschaft des orthogonalen Hyperboloids. Jedes orthogonale Hyperboloid besitzt unendlich viele Geradenpaare aa_1, bb_1, $cc_1, \ldots$ der genannten Art. Ein orthogonaler Kegel kann natürlich ebenfalls auf diese Art dargestellt werden, und zwar trennen die Strahlenpaare $aa_1, bb_1, cc_1, \ldots$ diejenigen beiden anderen harmonisch, welche an den Mantellinien des Kegels rechte Ebenenwinkel bestimmen.

9. Die Schnittlinie der Polarebenen eines Punktes P nach zwei Oberflächen F_2 und G_2 beschreibt ein einschaliges Hyperboloid, wenn P eine Gerade p durchläuft. Bringt man p ins Unendliche hinaus und macht die zweite Oberfläche zu einer Kugel, so folgt: „Zu einem Durchmesser einer Oberfläche F_2, welcher einen Strahlenbüschel beschreibt, suche man einmal die conjugirte Ebene hinsichtlich F_2 und zweitens die zu ihm senkrechte Ebene, welche irgend einen Punkt L enthält und sich um eine zur Ebene des Strahlenbüschels senkrechte Gerade l dreht. Das einschalige Hyperboloid, welches die Schnittlinie dieser Ebenen beschreibt, schneidet die Fufspunkte der Lote aus, welche sich von Punkten der Geraden l aus auf die Fläche

*) Chasles, Géométrie. Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. — Géométrie de la Sphère. — Hyperboloïde à une nappe, Liouv. Journ., Bd. 1, 1836, S. 324—334. Bekanntlich kann das orthogonale (oder Binet'sche) Hyperboloid auch auf unendlich viele Weisen durch congruente Ebenenbüschel erzeugt werden. Die drei verschiedenen Entstehungsweisen erschliefsen sich am leichtesten aus dem Umstande, dafs der unendlich ferne Kegelschnitt des Hyperboloids unendlich viele dem unendlich fernen Kugelkreise umschriebene Vierecke enthält.

F_2 fällen lassen" (S. 88). Von den acht Normalen von F_2, welche hiernach zwei Gerade l_1 und l_2 treffen, gehören zwei, wenn l_1 und l_2 sich schneiden, mit ihnen in dieselbe Ebene α, während die sechs übrigen von ihrem Schnittpunkte P ausgehen (S. 90). Da die Hyperboloide mit der Ebene α eine und dieselbe Gerade gemein haben, so liegt der Punkt P mit den Fufspunkten der von ihm aus gefällten Lote auf einer Raumcurve R_3, die Lote selbst gehören einem Kegel K_2 an, dem Orte der Lote, welche man auf alle zu F_2 ähnlichen, ähnlich gelegenen und concentrischen Flächen oder auf die mit der gegebenen confocalen Flächen von P aus fällen kann. Hiernach enthält K_2 Parallelen zu den Axen der Fläche F_2 und die Hauptaxen des ihr umschriebenen Kegels mit der Spitze P. Für die letzteren Eigenschaften citirt Chasles die später zu besprechende Note 31 seines Aperçu; zum Teil hätten sich dieselben aus den oben [X, 5, 6] erwähnten Entwickelungen Binet's und Ampère's über die Trägheitsaxen eines Körpers schliefsen lassen. Den in Anwendung gekommenen Hülfssatz, nach dem einer Ebene α zwei Normalen einer Oberfläche F_2 angehören, beweist Chasles auf zwei Arten. Einmal hat das einer beliebigen Geraden l von α zugehörige Hyperboloid mit F_2 und α zwei Punkte von l und die Fufspunkte der α angehörigen Normalen gemein. Andererseits hebt Chasles hervor, dafs die zu einer Ebene α senkrechten Tangenten einer Oberfläche F_2 dieselbe in Punkten eines Kegelschnittes berühren, dessen beide Schnittpunkte mit α die Fufspunkte der gesuchten Normalen sind. Ich merke noch folgendes Resultat an: Fällt man von einem über die Gerade l bewegten Punkte O aus Lote OP_1, OP_2, OP_3 auf drei windschiefe Gerade l_1, l_2, l_3, so beschreibt jede der Geraden P_2P_3, P_3P_1, P_1P_2 ein Hyperboloid und folglich die Ebene $P_1P_2P_3$ eine abwickelbare Fläche vierten Grades (dritter Klasse), welche jedem dieser Hyperboloide umschrieben ist. Chasles bemerkt, dafs irgend zwei der Hyperboloide die Ebenen berühren, die eine der drei Axen l_1, l_2, l_3 enthalten (S. 92).

10. Indem jetzt Chasles (§ 3) zwei entsprechende Punkte der Reihen, welche ein Hyperboloid erzeugen, ins Unendliche hinausrückt, gelangt er zu dem hyperbolischen Paraboloid. Von seinen hierher gehörigen Resultaten sei das folgende erwähnt: „Die Fufspunkte der Lote, welche man von einem Punkte P aus auf die Geraden der einen Schar eines hyperbolischen Paraboloids fällen kann, gehören einer Raumcurve R_3 an." Errichtet man in den Fufspunkten auf den Erzeugenden Lote, welche mit ihnen in derselben Reihe paralleler Ebenen liegen, so treffen dieselben die Senkrechte, welche man von P aus auf diese Ebenen fällen kann. Diese Lote füllen also ein zweites hyperbolisches Paraboloid aus, das mit dem ersten aufser einer unendlich fernen Geraden die gesuchte Curve gemein hat (S. 99). Gehört der Punkt dem Paraboloid und mithin der

Curve R_3 an, so füllen die Lote einen Kegel zweiten Grades aus. Einem hyperbolischen Paraboloid gehören die Lote an, welche man von den Punkten einer Geraden l aus auf die zugehörigen Polarebenen nach einer Fläche F_2 fällen kann. Die Fuſspunkte derselben liegen nach dem eben erwähnten Satze auf einer Raumcurve R_3. Das hyperbolische Paraboloid wird von den Tangentialebenen der Oberfläche F_2 berührt, deren Normalen die Gerade l treffen. Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen der l_1 und l_2 zugehörigen Paraboloide und der Fläche F_2 berühren letztere in den Fuſspunkten der l_1 und l_2 treffenden Normalen. Im letzten Abschnitt (§ IV) seiner Abhandlung bringt Chasles mit der projectivischen Erzeugung des Kegels einen groſsen Teil der Resultate in Verbindung, die er in seiner früheren Abhandlung über den Kegel zweiten Grades entwickelt hatte [XXI, 10].

11. Die Lote, welche auf die Erzeugenden a, b, c, d, ... der einen Schar eines hyperbolischen Paraboloids von einem Punkte P desselben aus gefällt sind, treffen auch die Parallelen, welche durch einen Punkt O der zweiten P enthaltenden Geraden l des Paraboloids gelegt sind, und zwar in Punkten eines Kreises, welchen eine Kugel über dem Durchmesser OP aus der Ebene π herausschneidet, der die erwähnten Parallelen angehören. Die Lote selbst liegen also in einem Kegel zweiter Ordnung, welcher auſser der Geraden l den Ort R_3 ihrer Fuſspunkte aus dem Paraboloid herausschneidet; eine zweite Fuſspunkt-Curve gehört zu der zweiten Schar von Erzeugenden. Eine Curve der einen Art hat mit einer Curve der anderen Art die Fuſspunkte der fünf Lote gemein, die sich von einem dem hyperbolischen Paraboloid nicht angehörigen Punkte aus auf dasselbe fällen lassen. Diese Art der Auffindung der Fuſspunkt-Curve, welche Chasles an anderer Stelle giebt,*) lieſse sich ohne weiteres auf das einschalige Hyperboloid übertragen. Die oben eingeführten Parallelen erfüllen einen Kegel zweiten Grades, der, weil eine Erzeugende der ausgewählten Schar zu OP parallel ist, auch diese Gerade selbst enthält. Er schneidet die Kugel in einer Curve vierter Ordnung, die O doppelt, P einfach enthält; die Lote, welche die Geraden der ersten Schar aus P erhalten, gehören mithin einem rationalen Kegel dritten Grades mit dem Doppelstrahl OP an, die Fuſspunkte einer rationalen Curve vierter Ordnung, welche die Erzeugenden der anderen Schar des Hyperboloids in je drei Punkten schneidet.

Chasles vollzieht den Übergang zum einschaligen Hyperboloid in anderer Weise. Zieht man bei dem Paraboloide durch den Punkt P eine Senkrechte PP_1 zu der Hülfsebene π, so treffen von P und P_1 aus gefällte Lote jede der Erzeugenden a, b, c, d, ... in dem gleichen Punkte; ein rationaler Kegel dritten Grades wird also

*) Chasles, Théorèmes sur le paraboloïde hyperbolique et l'hyperboloïde à une nappe, Quet. Corr., Bd. 11, 1839, S. 228—231.

von den Loten ausgefüllt, welche man von einem beliebigen Punkte P_1 aus auf die zu einer Schar gehörigen Geraden eines hyperbolischen Paraboloids fällen kann. Durch Transformation in dem Polarsystem einer Kugel mit dem Mittelpunkt P_1 geht das hyperbolische Paraboloid in ein einschaliges Hyperboloid über, welches P_1 enthält; zwei entsprechende Gerade der beiden Flächen stehen auf einem von P_1 ausgehenden Strahle senkrecht. Aus diesem Grunde besteht der Kegel zugleich aus den Loten, die man von einem Punkte P_1 eines einschaligen Hyperboloids aus auf die eine Schar seiner Erzeugenden fällen kann. Die Fufspunktcurve wäre nach Chasles' weiterer Entwickelung von der sechsten Ordnung. Nach dem Obigen ist sie in Wirklichkeit nur von der vierten Ordnung. Bei seiner Überlegung übersieht Chasles, dafs die Curve der Fufspunkte beim hyperbolischen Paraboloid den unendlich fernen Kugelkreis zweimal trifft.

12. In einer kleinen Arbeit*) setzt Chasles auseinander, dafs die einschaligen Hyperboloide, welche ein unebenes Vierseit enthalten, sowohl einen Büschel als auch eine Schar von Oberflächen F_2 bilden, insofern jede durch eine Seite des Vierseits gehende Ebene als allen Oberflächen gemeinsame Tangentialebene anzusehen sei. Eine andere Abhandlung**) Chasles' ist vorzugsweise für die Theorie des Nullsystems von Bedeutung. Jeder Strahl eines gegebenen Strahlenbüschels trifft zwei Gerade aus der einen Schar von Erzeugenden eines einschaligen Hyperboloids, einer Regelschar. Zwei solche Strahlen nennt Chasles conjugirt und stellt den Satz auf: „Die Paare conjugirter Strahlen schneiden auf einer beliebigen Ebene Punktepaare aus, die auf den Strahlen eines Büschels liegen"; sein Centrum ist zu seiner Ebene conjugirt. Zu den Ebenen eines Bündels sind Punkte der Ebene conjugirt, welche dem Centrum des Bündels entspricht. Durchläuft der Pol eine Gerade l, so dreht sich die zugehörige Ebene um eine zu ihr conjugirte Gerade l_1. Irgend zwei Paare conjugirter Geraden liegen auf einem einschaligen Hyperboloid. Sie können bei der Bestimmung des einer beliebigen Ebene conjugirten Punktes zwei der ursprünglichen Paare conjugirter Strahlen ersetzen Die Geraden, welche auf zwei conjugirten Geraden zugleich senkrecht stehen, treffen sämtlich eine Axe u. s. w. Man sollte meinen, dafs Chasles sich zur Herleitung dieser Sätze den Begriff der Involution aus Geradenpaaren einer Regelschar geschaffen und mit demselben den Satz vom Centrum der Involution auf dem Kegelschnitt combinirt hätte. Indessen entstammen die Sätze nach Chasles' späterer Bemerkung [XXXIII, 7] der

---

*) Chasles, Sur l'hyperboloïde à une nappe, et le paraboloïde hyperbolique, Quet. Corr., Bd. 8, 1835, S. 128—134.

**) Chasles, Propriétés nouvelles de l'Hyperboloïde à une nappe, Liouv. Journ., Bd. 4, 1839, S. 348—350.

Geometrie der Bewegung. Der Vollständigkeit halber sei noch auf eine andere Arbeit Chasles', die sich auf Regelflächen bezieht, hingewiesen.*)

Eine Behandlung der Regelflächen zweiten Grades vom Standpunkt der modernen analytischen Geometrie aus gab Plücker.**) Er geht hierbei von der Gleichung

$$xy = uv$$

aus, überträgt Bobillier's Darstellung [IX, 5] der beiden Geradenscharen auf Tetraedercoordinaten in der Form

$$x - \lambda u = 0,\ \lambda y - v = 0; \qquad x - \mu v = 0,\ \mu y - u = 0,$$

wobei aber x, y, z, u sowohl Punktcoordinaten als auch Ebenencoordinaten sein können, das Coordinatentetraeder aus den Ecken eines beliebigen Vierseits auf der Fläche besteht; er erörtert die gegenseitige Lage der beiden Geradenscharen und wendet sich schliefslich zu dem Sechsseit auf dem Hyperboloide, bei dem er ähnlich wie Hesse [II, 10] Sätze aufstellte, die sofort auf die Paare Steiner'scher Punkte beim Hexagrammum mysticum führen. In einer anderen hierher gehörigen Abhandlung hebt Plücker etwas sehr verspätet die Erzeugung des einschaligen Hyperboloids durch projectivische Punktreihen hervor.***) Er beschreibt ein Fadenmodell, an dem der allmähliche Übergang der Geradenschar eines Hyperboloids in einen Strahlenbüschel oder die Tangentenreihe eines Kegelschnittes erläutert werden kann.

XXX. Die Involution zweiter Ordnung. Büschel und Schar von Kegelschnitten.

1. Von grofser Bedeutung für die Theorie der Involution sind Entwickelungen von Chasles.†) Die bisher bekannten metrischen Relationen für eine Involution aus sechs Punkten [IV, 5] werden in einheitlicher Weise aus dem Lehrsatze entwickelt: „Das Doppelverhältnis aus vier beliebigen von sechs Punkten in Involution ist gleich dem Doppelverhältnis aus den vier zugehörigen Punkten.“ Sind AA_1, BB_1, CC_1 drei Punktepaare in Involution, so folgen z. B. aus der einen Gleichung

*) Chasles, Proposition de géométrie et solution d'une question proposée à la fin de la 2e livraison du tome VII, de la Corresp. Math., Quet. Corr., Bd. 8, 1835, S. 56—58.

**) Plücker, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, S. 99—135.

***) Plücker, Über eine neue mechanische Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung und Classe, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 357—359 (Abh., Bd. 1, S. 434—436).

†) Chasles, Théorie de l'involution de six points, Aperçu historique, Note 10, S. 308—327.

$$\frac{AB \cdot AB_1}{AC \cdot AC_1} = \frac{A_1 B \cdot A_1 B_1}{A_1 C \cdot A_1 C_1}$$

sofort die Doppelverhältnis-Gleichungen

$$(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1), \quad (AA_1BC_1) = (A_1AB_1C),$$
$$(AA_1B_1C) = (A_1ABC_1), \quad (AA_1B_1C_1) = (A_1ABC).$$

Jede dieser Gleichungen liefert, indem man auf beiden Seiten gleiche Permutationen vornimmt, andere der bekannten Beziehungen, aus denen dann zuletzt die beiden Gleichungen folgen, in denen B und B_1 oder C und C_1 so bevorzugt sind, wie A und A_1 in der Ausgangsgleichung (S. 318). Nach Poncelet's Methode [XXIV, 7] beweist nun Chasles, dafs zwei Punktepaare CC_1 und DD_1, die mit zwei gegebenen AA_1 und BB_1 Involutionen aus sechs Punkten bilden, auch zusammen mit einem der Punktepaare AA_1 oder BB_1 eine Involution aus sechs Punkten bilden, und schliefst daran (S. 311) den Satz: „Das Doppelverhältnis von irgend vier der acht Punkte ist gleich demjenigen der vier zugehörigen Punkte.“ Von den mannigfachen Relationen, die Chasles noch anführt, hebe ich als Beispiel nur die eine (S. 322) hervor

$$MA \cdot MA_1 \cdot B_2C_2 + MB \cdot MB_1 \cdot C_2A_2 + MC \cdot MC_1 \cdot A_2B_2 = 0,$$

in welcher AA_1, BB_1, CC_1 drei Punktepaare einer Involution, A_2, B_2, C_2 die Mitten der Strecken AA_1, BB_1, CC_1 sind, und M ein beliebiger Punkt des Trägers der Involution ist. Die Gleichung ist für den Mittelpunkt der Involution evident und deshalb allgemein richtig.

2. Hieran schliefst Chasles noch eine Reihe wichtiger Folgerungen. Ich erwähnte schon [XXIX, 5], wie einfach Chasles Desargues' Involutionssatz entwickelt. Ohne Beweis werden (S. 326) mehrere Sätze angegeben: „Die Paare conjugirter Durchmesser eines Kegelschnittes bilden eine Strahleninvolution.“ Die weiter oben (S. 316) gegebene Definition: „Sind aa_1, bb_1, cc_1 drei Strahlenpaare einer Involution, so ist das Doppelverhältnis von irgend vier der sechs Strahlen gleich dem der zugehörigen Strahlen“ bedeutet einen wesentlichen Fortschritt. Früher gelangte man zur Strahleninvolution gleichsam indirect, indem man eine Punktinvolution von einem Hülfspunkt aus projicirte. Durch einen beliebigen Punkt lassen sich zwei aufeinander senkrechte Strahlen legen, die hinsichtlich eines Kegelschnittes C_2 zu einander conjugirt sind. Ein derartiges Strahlenpaar schneidet (S. 326) auf jeder der beiden Axen von C_2 ein Punktepaar einer bestimmten Involution aus. Die eine Involution hat die Brennpunkte von C_2 zu Doppelpunkten.*) Ferner: „Drei Punktepaare

*) Bekanntlich bietet der Lehrsatz die Grundlage für die in der synthetischen Geometrie jetzt allgemein übliche Behandlung der Brennpunktlehre. Man erzielt gegen das gewöhnlich eingeschlagene Beweisverfahren noch eine kleine Vereinfachung mit Hülfe eines speciellen Falles eines Staudt'schen Satzes [XXII, 3] — der ja nur eine leichte Umformung

eines Kegelschnitts C_2, deren Verbindungslinien durch einen Punkt gehen, werden von einem beliebigen Punkte desselben aus durch eine Involution von sechs Strahlen projicirt." „Haben drei Kegelschnitte für einen Pol O dieselbe Polare, so liegen die Schnittpunkte, welche sie paarweise ergeben, auf Strahlenpaaren einer Involution mit dem Centrum O."

3. An dieser Stelle wird am besten die Besprechung einer umfangreichen, schon oben erwähnten Schrift Chasles' eingeschaltet, welche aus dem Jahre 1838 stammt.*) Terquem**) hatte die Geradenpaare betrachtet, welche die Schnittpunkte eines Kreises mit einem Kegelschnitte enthalten, und, um von der Realität der Schnittpunkte unabhängig zu sein, solche „lignes conjointes" als Axen eines Coordinatensystems definirt, bei welchem in der Gleichung des Kegelschnittes gleiche Coefficienten von x^2 und y^2 auftreten. Er hatte die von Poncelet [XVII, 8] bereits benutzte Eigenschaft entwickelt, nach der conjugirte Sehnen***) gegen die Axen des Kegelschnittes gleich geneigt sind, und hatte ferner dargethan, dafs der Mittelpunkt des Kreises dem Lote angehört, welches vom Schnitt-

des Involutionssatzes vom vollständigen Viereck ist —, nach dem auch das dritte Seitenpaar eines vollständigen Vierecks aus zwei aufeinander senkrechten conjugirten Strahlen eines Kegelschnittes C_2 besteht, wenn dies von den beiden anderen Seitenpaaren gilt. Fallen z. B. zwei der Höhenfufspunkte eines Dreiecks mit den Brennpunkten von C_2 zusammen, so ist die dritte Höhe des Dreiecks zur gegenüberliegenden Seite conjugirt. Zwei aufeinander senkrechte conjugirte Strahlen werden also durch die Brennpunkte von C_2 harmonisch getrennt und schneiden auch auf der Nebenaxe des Kegelschnitts ein Punktepaar einer Involution aus, die von jedem der Brennpunkte aus durch eine circulare Involution projicirt wird. Übrigens folgt schon aus Sätzen von Apollonius, dafs man eine Tangente eines Kegelschnitts C_2 und die zugehörige Normale als eine Seite und die zugehörige Höhe eines Dreiecks betrachten kann, von dem zwei Höhenfufspunkte mit den Brennpunkten F und F_1 zusammenfallen [VI, 2]. Für jeden zu C_2 confocalen Kegelschnitt C_2' ist aber die Tangente zur Normale conjugirt; dieselben halbiren nach einem Satze von Poncelet (Traité, Bd. 1, Nr. 478) die Winkel, welche die von ihrem Kreuzungspunkt ausgehenden Tangenten von C_2' miteinander einschliefsen. Das Chasles'sche Theorem ist also die Zusammenfassung der soeben angeführten Sätze von Apollonius und von Poncelet. Aus dem angegebenen Viereckssatze folgt auch sehr leicht die Existenz der Brennpunkte eines vorgelegten Kegelschnittes. Man benutzt Vierecke, in denen einer Axe eine Parallele zur anderen gegenüber liegt, um aus einem Paare senkrechter conjugirten Strahlen alle übrigen abzuleiten und die beiden Involutionen auf den Axen nachzuweisen.

*) Chasles, Mémoire sur les lignes conjointes dans les coniques, Liouv. Journ., Bd. 3, 1838, S. 385—434 (Meine Hinweise beziehen sich auf die Artikelnummern dieser Arbeit).

**) Terquem, Sur les lignes conjointes dans les coniques, ibidem, S. 17—19.

***) Ich habe „lignes conjointes" mit „conjugirte Sehnen" übersetzt, um Verwechselungen mit der Bezeichnung „conjugirte Gerade eines Kegelschnittes" zu vermeiden.

punkte der conjugirten Sehnen auf seine Polare nach dem Kegelschnitte gefällt ist. Chasles bedient sich nur der geometrischen Definition der conjugirten Sehnen, benutzt aber in sehr ausgiebiger Weise das Continuitätsprincip, um auch den Fall imaginärer Schnittpunkte in Betracht ziehen zu können.*) Der Poncelet'sche Satz folgt unmittelbar aus dem Potenzsatz des Apollonius; conjugirte Sehnen sind zu Halbmessern von gleicher Länge parallel. Chasles construirt zunächst mit seiner Hülfe nach der von Poncelet gelehrten Methode die Krümmungskreise eines Kegelschnittes. Für den Schnittpunkt S zweier conjugirten Sehnen A_1A_2, B_1B_2 weisen der Kegelschnitt und der zugehörige Kreis dieselbe durch die Punkte A_1B_2, A_2B_1 und A_1B_1, A_2B_2 festgelegte Polare auf. Werden also zwei Sehnen eines Kegelschnittes so um ihren Schnittpunkt S gedreht, daſs ihre Endpunkte stets einem Kreise angehören, so beschreibt, im Einklang mit dem zweiten Terquem'schen Satze, der Mittelpunkt desselben eine von S ausgehende Gerade, welche zur Polare dieses Punktes nach dem Kegelschnitt senkrecht steht (9). Bei der Parabel haben speciell (13) vier auf einem Kreise liegende Punkte Abstände von der Axe, deren algebraische Summe verschwindet.**) Nach einer Umformung der Poncelet'schen Regel schneiden sich zwei Kegelschnitte in vier einem Kreise angehörigen Punkten dann und nur dann, wenn die Axen des einen zu denen des anderen parallel sind (16). Für zwei Parabeln tritt der Fall z. B. ein, wenn ihre Axen aufeinander senkrecht stehen (17). Legt man ferner durch die Punktgruppen, welche ein Kegelschnitt W mit zwei Kreisen V, U gemein hat, beliebige Kegelschnitte U_1, V_1, so gehören (19) die Schnittpunkte derselben einem dritten Kreise an. Chasles gelangt von hier aus auf eigenartige Weise zu dem Kegelschnittnetz. In der That erhält man durch Projection auf eine neue Ebene zunächst folgenden Satz: „Sind

) Statt des von Poncelet eingeführten Wortes „loi de continuité" sieht sich Chasles veranlaſst, die Bezeichnung „principe des relations contingentes" einzuführen. Das Continuitätsgesetz beruhe, wenigstens nach der Definition von Leibniz, auf dem Begriffe des Infinitesimalen, drücke aus, daſs die Dinge in der Natur sich in stetiger Weise ändern (natura abhorret a saltu). Das zur Verwendung kommende Princip, nach welchem ein Resultat unabhängig von der Realität der bloſs beim Beweise auftretenden Elemente sei, enthalte keinen Grenzübergang. Vergl.: Aperçu historique, S. 199 ff. und die zugehörige Note 24: Sur la loi de continuité, et le principe des relations contingentes, S. 357—359. Auch sonst hat es Chasles für nötig befunden, die von Poncelet eingeführten Bezeichnungen zu verändern. Wie bereits erwähnt [vergl. S. 133], hat Poncelet die Berechtigung solcher Namensänderungen mit aller Entschiedenheit bestritten; gröſstenteils haben sich auch die älteren Poncelet'schen Bezeichnungen eingebürgert.

**) Chasles führt den Satz auf Gregory zurück und fügt folgenden Hinweis hinzu: Gregory, Geometriae pars universalis, Patavii 1668, S. 130.

U, V, W drei gegebene und U_1; V_1 den Büscheln V, W; W, U beliebig entnommene Kegelschnitte, so enthält ein Kegelschnitt W_1, der die Schnittpunkte von U_1 und V_1 mit einem der Schnittpunkte von U und V verbindet, von selbst noch einen zweiten Schnittpunkt dieser Curven"; da die vier U und V gemeinsamen Punkte ganz gleichwertig sind, gehört W_1 mit U und V zu einem Büschel.*) Die drei Kreise des ursprünglichen Theorems gehören somit einem Büschel an. Verschiedene Specialfälle dieses Theorems werden angeführt.

4. Wendet man auf einen Kegelschnitt, einen Kreis und eines der zugehörigen Paare conjugirter Sehnen den Involutionssatz an, so kann man, wie Chasles an anderer Stelle [XXIV, 6] ausgeführt hatte, erweisen: „Das Quadrat der Tangente, welches ein Kreis aus dem laufenden Punkte eines Kegelschnittes empfängt, ist proportional zu dem Product der Abstände des Punktes von zwei zugehörigen conjugirten Sehnen." Für diesen Satz giebt Chasles hier eine höchst interessante Herleitung. Zwei conjugirte Sehnen eines Kegelschnittes werden von zwei nicht parallelen Ebenen ausgeschnitten, welche mit einem den Kegelschnitt projicirenden Kegel — mit der Spitze S — Kreise K_1 und K_2 gemein haben. Der zu den conjugirten Sehnen gehörige Kreis K liegt mit K_1 und K_2 auf einer Kugel $\mathfrak{K}$. Für jeden Punkt P des Kegelschnittes ergeben sich nun (25) aus den Potenzeigenschaften der Kugel die beiden Gleichungen

$$\frac{PQ_1 \cdot PQ_2}{PT^2} = \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2}; \quad \frac{PQ_1 \cdot PQ_2}{PT^2} = \frac{SR_1 \cdot SR_2}{SU^2 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\beta_2}.$$

Hierin bedeuten PQ_1, PQ_2, PT, SU die Abstände des Punktes P von den conjugirten Sehnen und die Tangenten, welche K und $\mathfrak{K}$ aus P und S erhalten, α_1 und α_2 sind die Neigungswinkel des Strahles SP, β_1 und β_2 diejenigen der Ebene des Kegelschnittes gegen die Ebenen der Kreise K_1, K_2; endlich sind SR_1, SR_2 die Entfernungen der Spitze S von diesen Ebenen. Nach der zweiten Gleichung behält $\frac{PQ_1 \cdot PQ_2}{PT^2}$ einen und denselben Wert, wenn P über den Kegelschnitt geführt wird. Indem man einen bestimmten Strahl des Kegels in Betracht zieht, kann man aus der ersten Gleichung folgern, daſs dieser Wert nur von den Richtungen der beiden conjugirten Sehnen abhängt. Freilich, diese Ergänzung des Satzes könnte bei der Hyperbel auch gefunden werden, indem man P ins Unendliche entfernt. Alsdann nähert sich sowohl das Verhältnis seiner Entfernungen von zwei parallelen Geraden, als auch dasjenige der Tangenten, welche zwei Kreise von ihm aus erhalten, der Einheit. Wenn man also zwei

*) Chasles giebt indes in einer Fuſsnote auch den oben angedeuteten Beweis dieses Gergonne-Bobillier'schen Theorems [XXVI, 1].

conjugirte Sehnen durch zwei andere zu ihnen parallele ersetzt, so bleibt der Wert von $\frac{PQ_1 \cdot PQ_2}{PT^2}$ constant. Derselbe Schlufs gilt auch bei der Parabel; der bewiesene Satz kann mit Hülfe des Continuitätsprincips auf die Ellipse übertragen werden. Gelangt der Mittelpunkt des Kreises auf die eine Axe, so besteht eines der Paare conjugirter Sehnen aus zwei zur anderen Axe parallelen Geraden. Dieselben bewegen sich, wenn bei festem Mittelpunkte der Radius des Kreises sich verändert, mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten und fallen, wenn der Kreis eine doppelte Berührung mit dem Kegelschnitt eingeht, mit der Berührungssehne zusammen. Die übrigen Paare conjugirter Sehnen, welche die concentrischen Kreise mit dem Kegelschnitt bestimmen, umhüllen (36) eine Parabel. Chasles gelangt hier (29 ff.) zu Bobillier's Sätzen über die Focalkreise [VII, 5]. Wenn der Focalkreis in einen Nullkreis übergeht, so wird sein Mittelpunkt zum Brennpunkt. Die oben angedeutete räumliche Betrachtung kann deshalb zu der anschaulichen Bestimmung der Brennpunkte gewisser Schnitte eines Kegels dienen. Der Kegelschnitt, den eine Tangentialebene einer Kugel aus einem Kegel zweiten Grades herausschneidet, hat den Berührungspunkt zum Brennpunkt, wenn die Kugel zwei Kreise mit dem Kegel gemein hat, deren Schnittpunkte der Tangentialebene angehören (27). Chasles verweist hier auf Constructionen, die er für die Brennpunkte der Schnitte eines schiefen Kreiskegels bei früheren Gelegenheiten gegeben hatte.*)

---

*) Die eine Construction giebt Chasles in der Notiz: Sur la manière de construire les foyers dans le cône oblique, et d'y démontrer leurs propriétés, Aperçu historique, Note 4, S. 285—288. Wird eine Gerade l von zwei Kreisen mit den Mittelpunkten M_1 und M_2 in demselben Punkte P, eine durch l gelegte Ebene von zwei M_1, M_2 enthaltenden Kreisen der Ebene PM_1M_2 in den Punkten F_1, F_2 berührt, so gehört der durch die Brennpunkte F_1, F_2 und den Scheitel P eindeutig bestimmte Kegelschnitt dem einzigen Kegel an, welcher die beiden ersten Kreise enthält. Diese Construction, welche mit der oben angeführten Regel Chasles' in Einklang gebracht werden kann, hängt auch mit einem bereits angeführten Satz von Chasles über die allgemeine Focale — eine circulare Curve C_3 —, zusammen, welche oben gerade als Ort der bezeichneten Brennpunktpaare F_1F_2 definirt wurde [XXV, 1]. Als zweiter Brennpunktort für die Schnitte des Kegels, welche in P die beiden Kreise berühren, ergiebt sich übrigens ein Kreis über dem Durchmesser M_1M_2 in einer zu PM_1M_2 senkrechten Ebene. Die zweite Regel Chasles' beruht auf folgender Überlegung: Die Gerade l, welche die Mittelpunkte der einen Schar von Kreisen eines Kegels enthält, ist der Ort des einen Brennpunktes für eine zweite Schar ähnlicher Schnitte des Kegels. Die Ebenen der Kreise liegen zu denen der Kegelschnitte symmetrisch hinsichtlich einer zu l senkrechten Ebene. Diese Regel beruht auf der Ermittelung der homologen Punkte, welche zusammenfallen, wenn man zwei perspectivisch-collinear bezogene Ebenen durch Drehung um ihre Schnittlinie zur Deckung bringt. Diese Herleitung findet sich in der Abhandlung: Chasles, Mémoire sur diverses

5. Die Kegelschnitte C_2, C_2', C_2'', ... eines Büschels treffen eine Gerade in Punktepaaren einer Involution, deren Doppelpunkte E und E' für alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt sind. Die Polaren aller einem Büschel angehörenden Kegelschnitte nach einem beliebigen Punkte E haben also (38) einen zweiten Punkt E' mit einander gemein. Bewegt man E über eine Gerade e, so beschreiben seine Polaren nach C_2 und C_2' projectivische Strahlenbüschel, deren Scheitel die Pole von e nach C_2 und C_2' sind. Sie erzeugen einen Kegelschnitt, von dem jeder Punkt zu einem von e für alle Kegelschnitte des Büschels conjugirt ist, der aber zugleich die Pole von e hinsichtlich der Kegelschnitte des Büschels enthält.*) Hiernach ist z. B. der Mittelpunktkegelschnitt H_2 eines Büschels, den ein Kreis mit dem Mittelpunkt O und ein Kegelschnitt C_2 bestimmen, eine gleichseitige Hyperbel, deren Asymptoten zu den Axen von C_2 parallel sind. In jedem Punkte desselben schneidet sich ein Durchmesser von C_2 mit dem Lote, das die Tangenten in seinen Endpunkten aus O empfangen (46). H_2 enthält deshalb (47) die Fufspunkte der Normalen, die sich von O aus auf C_2 fällen lassen.**) Ohne dafs die gleichseitige Hyperbel ihre Bedeutung ändert, kann man den gegebenen Kreis durch einen concentrischen, C_2 durch einen homothetischen — ähnlichen und ähnlich gelegenen — Kegelschnitt mit demselben Mittelpunkt ersetzen, endlich kann für C_2 ein beliebiger Kegelschnitt des Büschels eintreten, den er mit einem der Kreise bestimmt. H_2 enthält deshalb die Schnittpunkte der Geradenpaare aller dieser Büschel und die Mitten der Sehnen, welche irgend zwei der eingeführten Kegelschnitte miteinander bestimmen, H_2 kann z. B. auch als der Ort der Fufspunkte der Normalen definirt werden, welche man auf homothetische concentrische Kegelschnitte von einem Punkt aus fällen kann.

6. Ein Büschel von Kegelschnitten, welcher einen Kreis enthält, geht bei der Transformation mittels des Polarsystems des genannten oder eines concentrischen Kreises in eine Schar über, welche einen Kreis enthält. Die gleichseitige Hyperbel verwandelt sich hierbei in

---

manières de généraliser ... Manière de démontrer dans le cône oblique les propriétés des foyers des sections coniques, Liouv. Journ., Bd. 2, 1837, S. 388—405 (S. 397). Auch im Aperçu historique (S. 132) ist diese Entwickelung angedeutet.

*) Man erwartet hier eigentlich den Namen Poncelet's citirt zu finden [XVII, 10]. Chasles begnügt sich aber (43) mit den Worten: Diese Eigenschaften des Kegelschnittes seien bekannt, aber man habe sie bisher auf verschiedene Weisen gezeigt. Die gegebenen Beweise seien ganz einheitlich und beruhen nur auf den bekanntesten Eigenschaften der Kegelschnitte.

**) Steiner hat diesen Gedanken auf algebraische Curven und Flächen übertragen in der Abhandlung: Steiner, Über algebraische Curven und Flächen, Crelle's Journal, Bd. 49, 1855, S. 333—348 (Ges. W., Bd. 2, S. 621—637).

eine Parabel P_2, deren Directrix O enthalten mufs, da sie aus diesem Punkte zwei aufeinander senkrechte Tangenten empfängt. Aus den verschiedenen Eigenschaften, die oben angeführt wurden, ergiebt sich mithin (70ff.): „Die Kegelschnitte einer Schar, welcher ein Kreis angehört, empfangen aus dem Mittelpunkte O desselben Tangentenpaare mit gemeinsamen Winkelhalbirenden. Die Polaren des Punktes O nach den Kegelschnitten der Schar umhüllen eine Parabel, deren Directrix O angehört." Die Fufspunkte der Normalen, welche man von O aus auf die Kegelschnitte der Schar fällen kann, erfüllen die Fufspunktcurve der Parabel nach O, also eine Curve C_3 mit dem Doppelpunkt O*); sie fällt nach Dandelin's Entwickelung mit der „focale à noeud" [XIV, 4] zusammen. Sie wird auch von den Ecken der Vierseite erfüllt, welche einem beliebigen Kegelschnitte C_2 der Schar und Kreisen mit dem Mittelpunkte O zugleich umschrieben sind [80]. An der älteren Figur umhüllen deshalb die Sehnen, welche ein Kegelschnitt mit concentrischen Kreisen gemein hat, eine Curve vierter Ordnung mit unendlich ferner Doppeltangente.

Die Curve C_3 kann allgemeiner als Ort der Punkte definirt werden, an denen die Schar eine Tangenten-Involution mit aufeinander senkrechten Doppelstrahlen bestimmt. Einer dieser Doppelstrahlen projicirt O; die Curve C_3 enthält also auch die Berührungspunkte der Tangenten, welche die Kegelschnitte der Schar aus O erhalten. Sie besteht ferner nach dieser neuen Definition, was Chasles später zu entwickeln verspricht, aus den Brennpunkten der Kegelschnitte der Schar. Wie leicht zu ersehen, kann man jetzt statt der gegebenen zu ihnen confocale Kegelschnitte einsetzen. Die Curve enthält die Fufspunkte der Normalen, welche man auf alle so entstandenen Kegelschnitte, z. B. auf die Axen der Kegelschnitte der ursprünglichen Schar, fällen kann (78). In diesen Entwickelungsgang fügen sich auch frühere Sätze Chasles' über die Focale mit Doppelpunkt ein, z. B. der Satz: „Confocale Kegelschnitte empfangen aus einem beliebigen Punkte Tangenten (Normalen), deren Berührungspunkte (Fufspunkte) einer Focale mit Doppelpunkt angehören." Verschafft man sich den Satz, dafs die Brennpunktcurve einer Kegelschnitt-Schar eine allgemeine van Rees'sche Focale ist, so werden die beiden oben [XXV, 1] angeführten Sätze über Glanzpunkte evident. Offenbar bereitet sich in diesen Entwickelungen die Definition

---

*) Chasles macht hier folgende Überlegung: Nach einem Satze von Lambert umhüllen die Geraden, welche auf den von O ausgehenden Strahlen in ihren Schnittpunkten mit einer Transversale l senkrecht stehen, eine Parabel, welche mit einem gegebenen Kegelschnitt vier Tangenten gemein hat. Deshalb hat die Fufspunktcurve des Kegelschnittes nach O vier Schnittpunkte mit l gemeinsam, ist eine Curve C_4. Ist der vorgelegte Kegelschnitt eine Parabel, so reducirt sich die Ordnung der Curve augenscheinlich auf drei (Fufsnote zu 77).

der allgemeinen Curve C_3 als der Ort der Punkte vor, aus denen sämtliche Kegelschnitte einer Schar-Schar Tangentenpaare erhalten, die einer Involution angehören. Die angeführten Sätze werden sämtlich für die aus den Punktepaaren einer Schar-Schar gebildete Curve C_3 evident, wenn die beiden unendlich fernen Kreispunkte ein Punktepaar der Schar-Schar bilden, oder wenn dieselbe noch specieller eine Mannigfaltigkeit concentrischer Kreise enthält.

7. Chasles behandelt nunmehr einige auf conjugirte Sehnen bezügliche Aufgaben. Bei der Aufsuchung der zu einem Kegelschnitte und einem Kreise gehörenden conjugirten Sehnen handelt es sich hauptsächlich um die Ermittelung der reellen Elemente des beiden Kegelschnitten gemeinsamen Polardreiecks. Die so entstehende Lösung der Aufgabe entspricht genau der Entwickelung Poncelet's [XVII, 10], dessen Name aber nicht genannt wird. Auch das, was Chasles hier (85) über die Construction der Axen eines Kegels zweiten Grades anführt, ist nur eine Variante der schönen Entwickelung Poncelet's [XIX, 5]; es handelt sich darum, das Polardreiflach zu finden, welches das Polarsystem eines gegebenen Kegels mit der Spitze S mit einem zweiten gemein hat, für das je zwei von S ausgehende aufeinander senkrechte Strahlen conjugirt sind. Auf einer beliebigen Hülfsebene bestimmen deshalb die Axen ein gemeinsames Polardreieck eines imaginären Kreises, und des Kegelschnittes, den die Hülfsebene mit dem Kegel gemein hat. Die Lösungen, die Chasles bei einer früheren Gelegenheit*) von dieser Aufgabe gegeben hatte, beruhen auf der Ermittelung eines zweiten mit dem gegebenen coaxialen Kegels. Je zwei gegenüberliegende Ebenen des aus den Schnittgeraden bestehenden Vierkants schneiden sich in einer der gesuchten Axen. Ein solcher Kegel wird z. B. von denjenigen Ebenen umhüllt, die auf den Strahlen des gegebenen in der Spitze senkrecht stehen. Andererseits kann man davon Gebrauch machen, dafs zwei Focalkegelschnitte an einem beliebigen Raumpunkte confocale, mithin coaxiale Kegel bestimmen. Liegt der eine Kegelschnitt auf dem gegebenen Kegel, so bestimmt sein ohne weiteres gegebener Focalkegelschnitt ebenfalls einen Hülfskegel von der betrachteten Art.

Nach dem gleichen Principe löst Chasles an anderer Stelle**) aus dem Continuitätsprincip heraus die Aufgabe, die Axen eines Ellipsoids zu finden, von dem drei conjugirte Halbmesser OA, OB, OC gegeben sind. Der Cylinder, welchen die zu OA parallelen Tangenten des Ellipsoids erfüllen, und sein imaginärer Asymptotenkegel treffen die Tangentialebene von A in zwei Kegelschnitten,

*) Chasles, Aperçu historique, S. 82 (Fufsnote).

**) Chasles, Application du principe des relations contingentes à la question de déterminer, en grandeur et en direction, les trois diamètres principaux d'un ellipsoïde dont trois diamètres conjugués sont donnés, Aperçu historique, Note 25, S. 359—368.

die den Ähnlichkeitspunkt A und das Ähnlichkeitsverhältnis $1 : i$ aufweisen. Die letztere imaginäre Ellipse bestimmt als Grenzkegelschnitt unzweideutig eine Schar confocaler Flächen F_2, die von O aus unter sich und mit dem Asymptotenkegel confocale Tangentialkegel erhalten. Das gemeinsame Polartripel irgend zweier dieser Kegel besteht aus den Axen der Fläche. Insbesondere kann man die beiden Kegel benutzen, welche die reellen Grenzkegelschnitte der Schar projiciren. Jeder derselben hat zwei Scheitel der imaginären Ellipse zu Brennpunkten, die zugehörigen Brennpunkte derselben zu Scheiteln, ihre Ebenen enthalten die Normale des Ellipsoids in A. Bestimmt man also von der Ellipse, welche die mit OB und OC parallelen und gleichen Strecken AB_1 und AC_1 zu conjugirten Durchmessern hat und also von dem oben erwähnten Tangentialcylinder ausgeschnitten wird, die Halbaxen $AL = l$ und $AM = m$ $(l > m)$, so hat man es mit einer Hyperbel und einer Ellipse zu thun, deren in AL und AM hineinfallende Nebenaxen die Gröfse $\sqrt{l^2 - m^2}$ aufweisen, deren reelle Brennpunkte sich auf der Normale des Ellipsoids in A in den Abständen $\underline{+}\, l$, $\underline{+}\, m$ finden. Die drei Axen des Ellipsoids sind übrigens zugleich die Normalen der drei confocalen Flächen des Systems, die O enthalten; die drei Strecken, welche diese Flächen auf der Normale des Ellipsoids in A abschneiden, sind — wie Chasles ohne Beweis anführt — die drei correspondirenden Axen-Längen. Nach dem Rest der Note würden die Mittelpunkte der Ellipsoide, von denen die Endpunkte A, B, C dreier conjugirten Halbmesser und die Länge der einen Axe gegeben sind, eine Oberfläche F_2 erfüllen, deren reelle Focalkegelschnitte auf die eben erläuterte Art aus der Ellipse entstehen, welche in den Punkten A, B, C zu BC, CA, AB parallele Geraden berührt. Diese Entwickelung enthält aber, wie mir scheint, einen Fehler.

Auf andere Weise hat übrigens Hesse*) die Axen einer Oberfläche F_2 bestimmt. Sind drei Sehnen PA_1, PB_1, PC_1 einer Oberfläche F_2 zu drei conjugirten Durchmessern derselben parallel, so haben, wenn P festgehalten wird, alle Ebenen $A_1B_1C_1$ nach Frégier's Theorem [IV, 8] einen Punkt Q miteinander gemein. Zu je einem analogen Punkte, R und S, führen einmal die orthogonalen Trieder, welche von P ausgehen, ferner die Tripel von Strahlen, welche auf drei conjugirten Durchmesserebenen von F_2 senkrecht stehen. Die Ebene QRS hat mit F_2 einen Kegelschnitt C_2, mit einer zu F_2 concentrischen und P enthaltenden Kugel den Kreis L_2 ge-

*) Hesse, Über Oberflächen zweiter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 18, 1838, S. 101—118 (Abh., S. 1—20). Auf ganz analoge Art wird die Aufsuchung des zwei Oberflächen F_2 und G_2 gemeinsamen Tripels conjugirter Durchmesser in einer aus Hesse's Nachlasse veröffentlichten Arbeit behandelt. Vergl.: Hesse, Construction der zweien gegebenen Oberflächen zweiter Ordnung gemeinschaftlichen conjugirten Linien. (Auszug aus einem Manuscripte vom Jahre 1837.) (Abh., S. 619—636).

meinsam. Die beiden Kegel, welche C_2 und L_2 von P aus projiciren, haben drei zu den Hauptaxen parallele Strahlen und einen Nebenstrahl miteinander gemein, dessen Construction Hesse angiebt (S. 16).

8. Der noch zu besprechende Rest (§ 9) von Chasles' Abhandlung ist der Theorie der conjugirten Kegel („cônes conjoints") einer Oberfläche F_2 gewidmet. Ich erledige diesen Teil der Abhandlung sogleich hier, weil die von Chasles fortgelassenen Begründungen sich ohne weiteres aus der Analogie zur Ebene ergeben. Sehnen A_1A_2, B_1B_2, $C_1C_2, \ldots$ einer Oberfläche zweiter Ordnung, welche einen Punkt S enthalten und die Relation

$$SA_1 \cdot SA_2 = SB_1 \quad SB_2 = SC_1 \cdot SC_2 = \cdots$$

erfüllen, sind nach dem zum Potenzsatz des Apollonius analogen Theorem zu Halbmessern der Fläche F_2 von gleicher Länge parallel. Die Sehnen — diesen Satz hatte bereits Terquem*) ausgesprochen — gehören deshalb einem Kegel zweiten Grades an; jeder in einer Tangentialebene desselben enthaltene Kegelschnitt der Fläche F_2 hat eine zur Berührungslinie parallele Axe. Wie Chasles weiter entwickelt, sind die Axen des Kegels zu denen der Fläche F_2 parallel; seine cyklischen Ebenen enthalten zwei Kreise derselben. Die Berührungsstrahlen einer gemeinsamen Tangentialebene zweier conjugirten Kegel mit gleicher Spitze, die zu den Axen eines Kegelschnitts parallel sind, stehen (91) aufeinander senkrecht.

Die Mittelpunkte eines Büschels von Flächen F_2, der eine Kugel enthält, erfüllen eine Raumcurve R_3 (101). In jedem ihrer Punkte treffen sich ein Durchmesser einer Fläche des Büschels und das vom Mittelpunkt der Kugel auf die zugehörigen Tangentialebenen gefällte Lot. Bei ihrer Erzeugung kann man die Kugel durch eine concentrische ersetzen, oder F_2 nach irgend einem Ähnlichkeitsverhältnis von ihrem Mittelpunkt aus umformen, oder endlich sie durch eine beliebige Oberfläche des Büschels ersetzen, den eine der Kugeln mit einer der bisher eingeführten Flächen F_2 bestimmt. Auf jeder dieser Oberflächen schneidet die Curve R_3 die sechs Fuſspunkte der Normalen aus, die sie aus dem Mittelpunkt M der Kugel erhält. Die Normalen selbst gehören einem Kegel zweiten Grades an. In jedem Büschel, den eine der Kugeln mit einer der eingeführten F_2 bildet, kommen vier Kegel vor, deren Spitzen auf R_3 liegen. Reducirt sich die Kugel auf den Punkt M, so fällt eine der vier Spitzen nach M, die drei anderen gelangen in die Polarebene von F_2 hinein und werden daselbst von den Hauptaxen des F_2 umschriebenen Kegels mit der Spitze M ausgeschnitten. Diese Hauptaxen beschreiben (97) den Normalenkegel, wenn F_2 zu sich selbst ähnlich verändert wird

*) Terquem, Notes historiques, ... Et observations sur quelques théorèmes de M. Chasles, Liouv. Journ., Bd. 3, 1838, S. 97—101 (S. 100).

oder einen der oben erwähnten Büschel beschreibt. Die allen Oberflächen gemeinschaftlichen Axen-Richtungen bestimmen die unendlich fernen Punkte von R_3. Chasles erwähnt ferner (100) das erst später [Vergl.: XXIX, 9] begründete Resultat, daſs die Fuſspunkte der Normalen homothetischer concentrischen Oberflächen F_2, welche eine Gerade treffen, einem einschaligen Hyperboloid angehören.

9. Ich komme jetzt zur Schilderung der sehr ausführlichen Untersuchungen von Seydewitz*) zur Theorie der Involution. Seine Darlegungen schlieſsen sich aufs engste denen Steiner's an, dessen er wiederholt mit Wärme gedenkt. Zunächst wird der Satz vom Doppelverhältnis bei perspectivischen Geraden entwickelt, aus dem die Beziehung

$$AF \cdot A_1G_1 = BF \cdot B_1G_1 = CF \cdot C_1G_1 = \cdots$$

entsprechender Punktepaare gegen die Fluchtpunkte F und G_1 abgeleitet wird, welche erhalten bleibt, wenn die Punktreihen in schiefe Lage gebracht werden. Legt man die Punktreihen so aufeinander, daſs F und G_1 an eine Stelle M kommen, so entspricht nach der nun obwaltenden Beziehung

$$MA \cdot MA_1 = MB \cdot MB_1 = MC \cdot MC_1 = \cdots$$

jedem Punkte des Trägers, mag man ihn zur einen oder anderen Reihe rechnen, derselbe zweite Punkt desselben. Wenn in zwei projectivischen Punktreihen, welche der Geraden l angehören, irgend zwei Punkte A und A_1 einander wechselseitig entsprechen, so gilt (S. 254) das Gleiche bei jedem anderen Paare homologer Punkte. Dreht man den Träger der zweiten Punktreihe um den Mittelpunkt von AA_1, bis er wieder in die Gerade l hineingelangt, so entspricht nun jeder der Punkte A und A_1 sich selbst; daher liegen die Fluchtpunkte der Punktreihen nunmehr symmetrisch zum Mittelpunkt von AA_1; sie gelangen, wenn man den zweiten Träger in seine erste Lage wieder zurückdreht, zur Deckung. Gemäſs der Fluchtpunktgleichung entsprechen nun auch je zwei homologe Punkte einander wechselseitig. Sind andererseits bei zwei projectivischen Strahlenbüscheln pq und p_1q_1 die homologen rechten Winkel, und legt man die Strahlenbüschel so übereinander, daſs p und q_1 in denselben Strahl m gelangen, so entsprechen wegen der Relation

$$\operatorname{tg} am \cdot \operatorname{tg} a_1m = \operatorname{tg} bm \cdot \operatorname{tg} b_1m = \operatorname{tg} cm \cdot \operatorname{tg} c_1m = \cdots$$

nunmehr je zwei Strahlen einander wechselseitig. Aus Symmetrieverhältnissen läſst sich wiederum schlieſsen, daſs concentrische projectivische Strahlenbüschel involutorisch liegen, sobald irgend zwei Strahlen einander wechselseitig entsprechen. Seydewitz unter-

*) Seydewitz, Theorie der involutorischen Gebilde nebst Anwendungen auf die Kegelschnitte, Grunert's Arch., Bd. 4, 1844, S. 246—280.

scheidet nun gleichliegende involutorische Gebilde ohne „Hauptelemente" und ungleichliegende mit zwei reellen Hauptelementen, welche jedes Paar entsprechender Elemente harmonisch trennen, und wendet sich sodann zu besonderen Involutionen. Hier wird zunächst die (circulare) „Involution der rechten Winkel" hervorgehoben. Seydewitz bemerkt ferner, daſs zwei ungleichlaufende congruente Punktreihen, wenn sie einer Geraden angehören, zwei ungleichlaufende congruente Strahlenbüschel, wenn sie von einem Punkte ausgehen, involutorisch liegen.

10. Ist nun auch der fundamentale Satz, daſs die involutorische Lage projectivischer Gebilde durch ein einziges Paar wechselseitig entsprechender Elemente hervorgerufen wird, bei Seydewitz nicht aus ganz reiner Quelle geflossen, so hat er sich desselben doch mit groſser Geschicklichkeit bedient, um eine ganze Reihe bekannter und neuer Entwickelungen in naturgemäſser Weise zu verknüpfen.

Es werde beispielsweise die Verknüpfung eines oben [XXX, 2] angegebenen Satzes von Chasles mit den Polareigenschaften des Kegelschnittes geschildert (S. 262). Sind auf einem Kegelschnitt K_2 die Punktepaare $A_1 A_2$ und $B_1 B_2$ gegeben, so legen die Schnittpunkte $\mathfrak{B}_1 = A_1 B_1$, $A_2 B_2$ und $\mathfrak{B}_2 = A_1 B_2$, $A_2 B_1$ eine Gerade p fest; auf derselben schneiden die Strahlenbüschel mit den Scheiteln A_1, A_2, welche den Kegelschnitt K_2 erzeugen, zwei projectivische Punktreihen aus, in denen $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ einander entsprechen, mag man nun $\mathfrak{B}_1$ in die eine oder andere Reihe rechnen. Man hat es also mit einer Involution $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2, \ldots$ zu thun. Die projectivischen Strahlenbüschel*)

$$A_1(\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{D}_1 \mathfrak{D}_2 \cdots) = A_2(\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{C}_2 \mathfrak{C}_1 \mathfrak{D}_2 \mathfrak{D}_1 \cdots)$$

erzeugen eine Reihe $B_1 B_2$ $C_1 C_2$ $D_1 D_2 \ldots$ von Punkten, welche dem Kegelschnitte angehört. Die Geraden $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, $D_1 D_2, \ldots$ laufen, da jede von ihnen mit p zusammen die Punkte A_1, A_2 harmonisch trennt, in einem Punkte P von $A_1 A_2$ zusammen. Dies giebt den Satz: „Die Punktepaare $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2, \ldots$, welche die Strahlen eines Büschels mit dem Centrum P mit einem Kegelschnitt K_2 gemein haben, werden von einem beliebigen Punkte desselben aus durch Strahlenpaare einer Involution projicirt, welche

*) Seydewitz bedient sich des Gleichheitszeichens, um die projectivische Beziehung zwischen einförmigen Gebilden zu kennzeichnen. Die Gleichung

$$B\,(\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdots) = B'\,(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}' \cdots)$$

drückt z. B. aus, daſs die projectivischen Punktreihen $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\mathfrak{d} \cdots$ und $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\mathfrak{d}' \cdots$ den Geraden B und B' angehören. Auch bei Seydewitz, wie schon vorher bei Steiner, habe ich durchgehends für Punkte groſse, für Geraden kleine Buchstaben gewählt, griechische Buchstaben für Ebenen reservirt. Auch sonst habe ich, wo dies der Übersichtlichkeit halber geboten schien, die Bezeichnungsweise von Seydewitz geändert.

die Polare p von P in den ihr angehörigen Paaren conjugirter Punkte treffen; diese Punktepaare gehören deshalb ebenfalls einer Involution an. Besonders brauchbar ist (S. 266) dieser Satz in seiner specielleren Form: „Zwei Seiten eines beliebigen, einem Kegelschnitt eingeschriebenen Dreiecks treffen eine zu der dritten Seite conjugirte Gerade in conjugirten Punkten.“ Der entsprechende Satz wird für die Paare conjugirter Strahlen („zugeordneter harmonischen Polaren“) ausgesprochen, die durch einen Punkt hindurchgehen.

Ein Punkt P ist im allgemeinen nur auf einer ihn enthaltenden Geraden der Mittelpunkt der ihr angehörigen Involution conjugirter Punkte eines Kegelschnittes C_2; diese Gerade ist zu der Polare von P parallel. Ein einziger Punkt der Ebene, der — bei der Parabel unendlich ferne — Mittelpunkt M des Kegelschnitts, besitzt diese Eigenschaft für alle ihn enthaltenden Geraden, die Durchmesser. Die Potenz einer Durchmesser-Involution ist gleich dem Quadrat des zugehörigen reellen oder rein imaginären Halbmessers. Werden zwei conjugirte Durchmesser von der Tangente in einem Scheitel S der Hauptaxe in S_1, S_2, von Parallelen, die man durch S zu MS_2 und MS_1 gelegt hat, in T_1, T_2 getroffen, so ist T_1 zu S_1, T_2 zu S_2 conjugirt; somit sind die Quadrate der MS_1 und MS_2 angehörigen Halbmesser, $MS_1 \cdot MT_1$ und $MS_2 \cdot MT_2$, festgelegt. Da $SS_1 \cdot SS_2$ gleich dem Quadrat der Nebenaxe ist, kann Seydewitz (S. 269 ff.) den Satz ableiten: „Bei jedem Kegelschnitte ist die Summe der Quadrate conjugirter Halbmesser constant.“ In ähnlicher Weise entwickelt Seydewitz die andere bekannte Relation zwischen zwei conjugirten Halbmessern und gelangt (S. 274) bei der Frage nach den Punkten, deren conjugirte Strahlen ungleichlaufende congruente Strahlenbüschel beschreiben, die also, anders ausgedrückt, Paare senkrechter Tangenten aussenden, zu dem de la Hire'schen Kreise [S. 7 ***].

11. Seydewitz fragt nun (S. 275) nach den Punkten, deren conjugirte Strahlen eine Involution der rechten Winkel bilden. Ein derartiger Punkt F kann nur einer Axe l des Kegelschnitts angehören, denn auch der Durchmesser MF mufs mit der Parallelen zu dem zu MF conjugirten Durchmesser nach der Voraussetzung einen rechten Winkel einschliefsen. Da F innerhalb des Kegelschnittes liegt, trifft l denselben in zwei reellen Punkten, deren Tangenten a_1, a_2 eine beliebige Tangente b in den Punkten B_1, B_2 schneiden mögen. Zu der unendlich fernen Ecke des aus a_1, a_2 und b gebildeten Dreiecks ist jeder Punkt P von l conjugirt, deshalb sind PB_1 und PB_2 conjugirte Strahlen. Ein reeller Schnittpunkt F der Axe l mit einem Kreise über dem Durchmesser B_1B_2 sendet also zwei Paare aufeinander senkrechter conjugirten Strahlen aus, deren eines aus den Strahlen FB_1 und FB_2, deren anderes aus der Axe und dem in F errichteten Lote besteht. F trägt somit eine circulare Involution zum Polarsystem des Kegelschnittes bei und ist deshalb ein

Brennpunkt desselben.*) Ganz nach dem Vorgange Poncelet's entwickelt nun Seydewitz aus diesem fundamentalen Theorem de la Hire's [VI, 3] die wichtigsten Eigenschaften der Brennpunkte. Er hebt ferner ebenso wie Poncelet ausdrücklich hervor, dafs zu den reellen Brennpunkten auf der Hauptaxe des Kegelschnitts sich noch zwei imaginäre gesellen, welche der Nebenaxe angehören.

Hier werde die Besprechung einer Arbeit aus dem Jahre 1846 eingeschaltet, in welcher Chasles**) den Begriff „Brennpunkt" in folgender Weise erweitert: Ein gegebener Kegelschnitt K_2 hat bezüglich eines beliebigen Hülfskegelschnittes Σ_2 zwei Brennpunkte S und S'. Die Involutionen conjugirter Strahlen, welche S und S' aussenden, entstehen durch Parallelverschiebung aus der Involution conjugirter Durchmesser von Σ_2; einem Kreise gehören die eigentlichen Brennpunkte zu. Auf diese Art lassen sich die Brennpunkteigenschaften auf beliebige Punkte der Ebene übertragen. Beispielsweise unterscheidet sich für jeden Punkt P von K_2 das Verhältnis seiner Entfernungen von einem Σ_2 zugehörigen Brennpunkte S und von dessen Polare nach K_2 um einen constanten Factor von dem zu SP parallelen Durchmesser von Σ_2. Damit übrigens K_2 zwei reelle Brennpunkte hinsichtlich Σ_2 zugehören, mufs man stillschweigend Σ_2 als Ellipse voraussetzen. Hinsichtlich einer Hyperbel Σ_2 kann K_2, wie auch Chasles hervorhebt, vier oder überhaupt keine reellen Brennpunkte aufweisen.

12. In der Fortsetzung der oben besprochenen Arbeit***) verfolgt Seydewitz zunächst das Ziel, die Entwickelungen Poncelet's über die gemeinsamen Elemente zweier Kegelschnitte [XVII, 10] im Sinne der projectivischen Erzeugung darzustellen. Seine Darlegungen, die sich zum Teil auch schon in einer oben geschilderten Abhandlung Chasles' vorfinden [XXX, 5], sind für die synthetische Geometrie gleichsam typisch geworden.†) Die von ihm eingeführten Namen sind jedoch nicht eben glücklich und deshalb auch nicht zur Geltung gelangt. Den Punkt T, in welchem sich die Polaren eines gegebenen Punktes S nach zwei Kegelschnitten $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ treffen, bezeichnet Seydewitz — Übersetzung der Poncelet'schen Bezeichnung „points réciproques" — als den „Wechselpunkt" von S;

*) In naturgemäfser Begründung gelangt Seydewitz also zu einem bereits von Apollonius [VI, 2] beobachteten Zusammenhang zurück.

**) Chasles, Généralisation de la théorie des foyers des sections coniques. Application à des points quelconques, de toutes les propriétés auxquelles donnent lieu ces points particuliers, Comptes rendus, Bd. 22, 1846, S. 894—900.

***) Seydewitz, Theorie der etc., Grun. Arch., Bd. 5, 1844, S. 225—258.

†) Bei Seydewitz haben wir es mit der wirklichen Auffindung der Schnittpunkte zu thun, während bei Poncelet von vornherein die Existenz der Schnittpunkte gesichert sein mufste, und nur zu ihrer Festlegung eine Regel gegeben wurde.

umgekehrt ist S der Wechselpunkt von T. Wird der eine von zwei Wechselpunkten, S, über eine Gerade l geführt, so beschreibt der andere, T, den „Wechselpunktkegelschnitt“ L_2 von l. Die Polaren von S nach $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ beschreiben nämlich zwei projectivische Strahlenbüschel, welche den genannten Ort erzeugen. Die Wechselpunktkegelschnitte zweier Geraden l und m schneiden sich zunächst in dem Wechselpunkte des Schnittpunktes von l und m und haben folglich entweder noch einen reellen Punkt P miteinander gemein, welcher bezüglich $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ die gleiche Polare p aufweist, oder drei reelle Punkte P, Q, R, die Ecken des $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ gemeinsamen Polardreiecks. Von jeder Ecke desselben, etwa von P, gehen unendlich viele Paare von „Wechselpunktstrahlen“, etwa aa_1, $a'a_1'$, $a''a_1''$, ..., aus. Jeder Strahl eines Paares bildet mit einer Seite des Polardreiecks zusammen den Wechselpunktkegelschnitt des anderen. Eine Gerade l und ihr zugehöriger Wechselpunktkegelschnitt L_2, welcher P enthält, sind in Hinsicht ihrer Wechselpunkte, in denen sie von den Strahlenpaaren aa_1, $a'a_1'$, $a''a_1''$,... getroffen werden, projectivisch. Deshalb beschreiben a und a_1 projectivische und, weil sie einander vertauschbar entsprechen, involutorisch bezogene Strahlenbüschel. Ein Doppelstrahl dieser Involution, ein „Hauptwechselpunktstrahl“, ist Träger einer beiden Kegelschnitten gemeinsamen Involution conjugirter Punkte. Die dualen Fragen führen auf „Wechselstrahlen“, die in Bezug auf beide Kegelschnitte conjugirt sind; jede Seite des Polardreiecks enthält Paare von „Wechselstrahlenpunkten“, die unendlich viele Paare entsprechender Wechselstrahlen aussenden, endlich sind die „Hauptwechselstrahlenpunkte“ Doppelpunkte der Involutionen, welche diese Punktepaare bilden. Jeder Hauptwechselstrahlenpunkt sendet eine $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ gemeinsame Involution conjugirter Strahlen aus. Je zwei Seiten des Polardreiecks sind Wechselpunktstrahlen. Haben also zwei Kegelschnitte $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ ein reelles Polardreieck miteinander gemein, so sind die drei Involutionen von Wechselpunktstrahlen durch ein einziges Paar von Wechselpunkten festgelegt. Seydewitz gelangt nun, wiederum genau den Spuren Poncelet's folgend, zu drei Paaren reeller gemeinsamen Secanten oder zu einem einzigen, je nachdem die beiden Wechselpunkte in demselben der vier Gebiete liegen, welche die Seiten des gemeinsamen Polardreiecks abgrenzen, oder nicht. Sind zwei Wechselstrahlen bekannt, so kann man in dualer Weise sofort entscheiden, ob sechs oder nur zwei reelle Hauptwechselstrahlenpunkte vorliegen. Auch wenn nur eine Ecke und die gegenüberliegende Seite des gemeinsamen Polardreiecks reell sind, werden zwei reelle gemeinsame Secanten s und s_1 und zwei Punkte U und U_1, von denen Paare gemeinsamer Tangenten ausgehen, für $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ nachgewiesen. Die Kegelschnitte schneiden die eine der beiden Secanten in zwei reellen, die andere in zwei imaginären Punkten; ebenso sendet von

den Punkten U und U_1 der eine zwei reelle, der andere zwei imaginäre gemeinsame Tangenten aus.

13. Seydewitz geht jetzt (S. 238) zu dem Satze über: Zwei beliebige Kegelschnitte $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ und zwei gegenüberliegende gemeinschaftliche Secanten s, s_1 derselben werden von einer beliebigen Geraden l in drei Punktepaaren einer Involution geschnitten. Trennen die Punktepaare, welche $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ auf l ausschneiden, sich nicht, so bestimmen sie eine Involution, deren reelle Doppelpunkte S und T Wechselpunkte von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ sind, und deshalb nach dem obigen auch durch die Secanten s, s_1 harmonisch getrennt werden. Aus diesem Grunde ist der Satz für die Geraden erwiesen, die ein reelles Paar von Wechselpunkten enthalten, also für alle Geraden bei einem Büschel mit vier imaginären Grundpunkten. Schneiden sich jedoch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ in zwei reellen Punkten S_1 und S_2, so mag sie ein beliebig durch S_1 gezogener Strahl a_1 nochmals in L_1 und M_1, ein zweiter S_2 enthaltender Strahl a_2 in L_2 und M_2 treffen. Alsdann mufs eine beliebige Tranversale l nach Desargues' Involutionssatz*) einmal die Geradenpaare S_1S_2, L_1L_2; S_1L_1, S_2L_2 und den Kegelschnitt $\mathfrak{A}_2$, andererseits die Geradenpaare S_1S_2, M_1M_2; S_1M_1, S_2M_2 und den Kegelschnitt $\mathfrak{B}_2$ in drei Punktepaaren je einer Involution treffen. Dreht man jetzt a_2 um S_2, so beschreiben L_1L_2 und M_1M_2 perspectivische Strahlenbüschel und erzeugen demnach eine gerade Linie s'. Giebt man a_2 diejenige Lage $a_2^{(0)}$, bei welcher L_1M_1 und L_2M_2 sich in dem Schnittpunkte von s' und l treffen, so sieht man, dafs

$$s,\ s';\ a_1,\ a_2^{(0)};\ \mathfrak{A}_2;\ \mathfrak{B}_2$$

von der Geraden l in vier Punktepaaren einer Involution getroffen werden. Zu der reellen Secante s oder S_1S_2 gehört also eine Hülfsgerade s' von der Art, dafs ein beliebiger Strahl s, s'; $\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{B}_2$ in Punktepaaren einer Involution trifft. Da unter den Geraden der Ebene unzählig viele mit reellen Wechselpunkten S und T bezüglich $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ auftreten, welche durch s und s' harmonisch getrennt werden, so fällt s' mit der zweiten gemeinsamen Secante s_1 von $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ zusammen. Selbstverständlich treffen jetzt alle Kegelschnitte des Büschels eine Gerade in Punktepaaren einer Involution.**) Hierauf

*) Seydewitz beweist denselben in der Fufsnote zu S. 239. Nach der neuen Auffassung der Involution ist es nun selbstverständlich, dafs drei Kegelschnitte, welche vier reelle Punkte miteinander gemein haben, eine Gerade in drei Punktepaaren einer Involution treffen.

**) Ich kann dieses Beweisverfahren, obwohl dasselbe vollkommen streng ist, nicht als sehr befriedigend bezeichnen. Es sei mir gestattet, eine, wie mir scheint, sehr leichte Begründung des Satzes anzudeuten. Ein Büschel von Kegelschnitten sei durch die Involutionen PP_1, MM_1, NN_1, $\cdots$ und PP_2, QQ_2, RR_2, $\cdots$ conjugirter Punkte auf den Geraden s_1 und s_2 gegeben. Ist für einen Kegelschnitt des Büschels etwa M_1Q

gründet von Seydewitz (S. 243) den Beweis für den Satz, dafs die Polaren eines Punktes nach allen Kegelschnitten des Büschels einen Punkt miteinander gemein haben. Dieser Teil der Schrift ist nicht sehr befriedigend. Besser benutzt man, dafs der Wechselpunkt T von S bezüglich $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ auf den beiden Polaren nach S liegt, aber auch mit S zusammen die gemeinsamen Secanten s, s_1 harmonisch trennt, demnach durch $\mathfrak{A}_2$, s, s_1 allein gegeben ist. Hieraus ergiebt sich nun die zweite Bedeutung des Wechselpunktkegelschnittes einer Geraden als Ort ihrer Pole nach den Kegelschnitten des durch $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ festgelegten Büschels und es tritt der Wechselpunktkegelschnitt der unendlich fernen Geraden als Mittelpunktort des Büschels hervor (S. 244). Die Wechselpunktkegelschnitte haben stets die Polare p des Schnittpunktes P von s und s_1 zur gemeinsamen Secante. Die Pole von s und s_1 bezüglich irgend eines Kegelschnittes des Büschels sind nämlich für alle Wechselpunktkegelschnitte conjugirt. Dafs diese Punktepaare von Kegelschnitten des Büschels ausgeschnitten werden, hebt Seydewitz nicht ausdrücklich hervor.

14. Seydewitz fragt nun (S. 246) nach der Curve, welche die Paare von Wechselpunkten erfüllen, deren Verbindungslinien einen Punkt A enthalten, oder, was dasselbe ist, die Berührungspunkte der Tangenten, welche sich an die Kegelschnitte des Büschels von diesem Punkte A aus legen lassen? Die Untersuchung wird auf Punkte

---

die Polare von M, so ist zugleich MQ_2 diejenige von Q. Jedes der Geradenpaare MQ_2, QM_1; MQ, Q_2M_1; MR_2, RM_1; ... schneidet also die Pole eines Kegelschnitts des Büschels nach s_1, s_2 auf P_1P_2 aus. Diese Paare von Polen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$; $\mathfrak{P}_1''\mathfrak{P}_2''$; ... bilden mithin eine Involution, der auch das Paar P_1P_2 angehört. Sind nun für die Kegelschnitte $\mathfrak{C}_2$; $\mathfrak{C}_2'$; $\mathfrak{C}_2''$; ... des Büschels die Involutionen conjugirter Punkte auf MQ durch die Punktepaare $M\mathfrak{M}$, $Q\mathfrak{Q}$; $M\mathfrak{M}'$, $Q\mathfrak{Q}'$; $M\mathfrak{M}''$, $Q\mathfrak{Q}''$; ... festgelegt, so schneiden offenbar $M_1\mathfrak{M}$, $Q_2\mathfrak{Q}$; $M_1\mathfrak{M}'$, $Q_2\mathfrak{Q}'$; $M_1\mathfrak{M}''$, $Q_2\mathfrak{Q}''$; ... Paare der Involution P_1P_2; $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$; $\mathfrak{P}_1'\mathfrak{P}_2'$; $\mathfrak{P}_1''\mathfrak{P}_2''$; ... aus; man schliefst hieraus leicht, dafs die Paare MQ, $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}'\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{M}''\mathfrak{Q}''$, ... einer Involution angehören. Die Punkte E, F, welche ein Kegelschnitt des Büschels mit MQ gemein hat, seien etwa die Doppelpunkte der Involution $M\mathfrak{M}^{(i)}$, $Q\mathfrak{Q}^{(i)}$; so besteht die Beziehung

$$M\mathfrak{M}^{(i)}EF \;\overline{\wedge}\; Q\mathfrak{Q}^{(i)}FE,$$

da E und F sowohl durch M und $\mathfrak{M}^{(i)}$, als durch Q und $\mathfrak{Q}^{(i)}$ harmonisch getrennt werden; E und F bilden also ein Paar der Involution MQ, $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{M}'\mathfrak{Q}'$, $\cdots$. Besitzt die Involution reelle Doppelpunkte G und G_0, so besteht die Beziehung

$$MQGG_0 \;\overline{\wedge}\; \mathfrak{M}^{(i)}\mathfrak{Q}^{(i)}G_0G,$$

da M und Q, wie $\mathfrak{M}^{(i)}$ und $\mathfrak{Q}^{(i)}$ durch G und G_0 harmonisch getrennt werden; G und G_0 sind deshalb für jeden Kegelschnitt des Büschels, auch wenn er MQ nicht in reellen Punkten trifft, conjugirt. Aus der obigen Betrachtung folgt augenblicklich der bekannte, aber sonst wohl nicht so einfach erwiesene Satz: „Auf MQ schneiden der gegebene Kegelschnittbüschel und derjenige mit den Grundpunkten M_1, Q_2, P_1, P_2 dieselbe Involution aus.“ Vergl.: Steiner-Schröter, Vorl., Leipzig 1876, S. 256.

einer gemeinsamen Secante s der Kegelschnitte des Büschels $(\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2)$ beschränkt. Erhält etwa $\mathfrak{A}_2$ die Tangenten AB und AB_1 aus A, sind ferner LL_1, MM_1, NN_1, ... die zu der gegenüberliegenden gemeinsamen Secante s_1 conjugirten Sehnen von $\mathfrak{A}_2$, so handelt es sich um den Kegelschnitt, den die projectivischen Strahlenbüschel

$$B\,(LMN \cdots L_1M_1N_1 \cdots) \barwedge B_1\,(L_1M_1N_1 \cdots LMN \cdots)$$

erzeugen. Alle diese Kegelschnitte bilden einen zweiten Büschel, welcher mit dem ersten die Involution conjugirter Punkte auf s_1 gemein hat. Eine zweite Involution conjugirter Punkte haben die Kegelschnitte des neuen Büschels mit den Wechselpunktkegelschnitten des ersten Büschels gemein. Ihr Träger s_2 ist die dem Schnittpunkte s, s_1 gegenüberliegende Seite des gemeinsamen Polardreiecks der Kegelschnitte des ersten Büschels. In der genau umgekehrten Beziehung stehen die beiden Büschel zu s. In diesen Sätzen sind die Beziehungen orthogonaler Kreisbüschel zu einander projectivisch verallgemeinert. Die Figur wird übrigens erst vollständig, wenn man auch für s_1 auf analoge Art aus dem ersten Büschel ein drittes ableitet.

15. Seydewitz untersucht nun die Kegelschnitte, von denen eine Involution conjugirter Strahlen und eine Involution conjugirter Punkte gegeben sind. Er beweist zunächst den Poncelet'schen Satz [III, 12], daſs diese Kegelschnitte auf zwei völlig getrennte Reihen verteilt sind, daſs nämlich ihre Pole nach einer beliebigen Geraden, sowie ihre Polaren nach einem beliebigen Punkte zwei verschiedene Kegelschnitte erfüllen, bezw. umhüllen (S. 255). In einer anderen Abhandlung macht Seydewitz*) Zusätze zu dieser Untersuchung und beschäftigt sich ferner mit der Aufgabe, einen Kegelschnitt zu construiren, von dem zwei Involutionen conjugirter Punkte und ein reeller Punkt gegeben sind. Bereits in der früher genannten Abhandlung beschäftigt sich Seydewitz (S. 241) mit der Aufgabe, durch einen reellen Punkt S einen Kegelschnitt zu legen, welcher die Schnittpunkte eines gegebenen Kegelschnittes mit zwei in P sich schneidenden Geraden s_1 und s_2 enthält. Eine beliebige S enthaltende Gerade muſs den gegebenen und den gesuchten Kegelschnitt, endlich das Geradenpaar $s_1 s_2$ in drei Punktepaaren einer Involution schneiden. Die so sich ergebende Construction ist, was Seydewitz aber nicht bemerkt, nur scheinbar vom zweiten Grade, da man sich leicht zwei Paare der erwähnten Involution mit Hülfe des Lineals verschaffen kann. Auch war, weil beide Kegelschnitte bezüglich P die gleiche Polare zeigen, mit S noch ein weiterer Punkt S' linear gegeben; es konnten auch sofort die Tangenten dieser Punkte, welche die Wechselpunkte von S und S' enthalten, construirt werden. Wie schon erwähnt, nimmt

*) Seydewitz, Nachtrag zu der Abhandlung Thl. V. No. XVIII, Grunert's Arch., Bd. 5, 1844, S. 331—334.

jetzt Seydewitz zwei den Geraden s_1 und s_2 angehörende Involutionen conjugirter Punkte neben einem reellen Punkte S als gegeben an. Da es zwecklos wäre, beide Involutionen hyperbolisch anzunehmen, so ist das von S ausgehende Strahlenpaar, welches sowohl ein Paar der einen als auch der anderen Involution projicirt, sicher reell; es möge die Verbindungslinie der Punkte P_1, P_2, welche in den beiden gegebenen Involutionen dem Schnittpunkte P ihrer Träger entsprechen, in dem Punktepaar $B_1 B_2$ treffen. Der Kegelschnitt, welcher in den Punkten B_1 und B_2 die Geraden $B_1 P$, $B_2 P$ berührt und S enthält, ist der gesuchte. Denn $P_1 P_2$ ist sowohl zu s_1 als auch zu s_2 conjugirt. Deshalb schneiden, wenn R ein beliebiger Punkt des Kegelschnittes ist, RB_1 und RB_2 sowohl auf s_1, als auch auf s_2 ein Paar der zugehörigen Involution conjugirter Punkte aus; die beiden Involutionen fallen aber nach Art der Construction mit den gegebenen zusammen.

16. Die soeben angeführte Construction hat in die Lehrbücher als Lösung der Aufgabe Eingang gefunden, einen Kegelschnitt zu construiren, welcher zwei Paare conjugirt-imaginärer Punkte und einen reellen Punkt enthält. Diese Bedeutung ist Seydewitz keineswegs entgangen. Er hatte die Absicht, auf derartige Fragen in dem zweiten Teile einer Schrift ausführlich einzugehen, von der meines Wissens nur der erste Teil erschienen ist.*) In der Vorrede dieses Buches hebt Seydewitz hervor, wie sehr die geometrische Einsicht durch Einführung des Involutionsbegriffes in den verschiedensten Fällen gefördert werde, und fährt dann (S. VI) in folgender Weise fort: „Von imaginären Punkten und Linien ist nun keine Rede mehr ... Eine Involution von Punkten z. B. ist durch ihre zwei Hauptpunkte sowohl, als auch durch zwei Paar zugeordnete Punkte bestimmt; findet es sich nun, daſs in einer Figur die Punktenpaare einer Geraden, in einem gewissen Sinne gewählt, eine Involution bilden, so erhalten auch die Hauptpunkte der letzteren einen bestimmten besonderen Sinn in Bezug auf jene Figur; es sind aber diese nicht immer, sondern nur bei einer gewissen Lage der zugeordneten Punktenpaare vorhanden; offenbar ist es also unstatthaft, die Definition jener Geraden von diesem besonderen Sinne der Hauptpunkte, statt von dem allgemeineren der stets vorhandenen zugeordneten Punkte zu entnehmen und unter Berufung auf das Gesetz der Continuität Alles für den einen Fall bewiesene auch für den anderen gelten zu lassen ... Während man sich sonst zwei imaginäre Punkte nicht anders zu geben weiſs, als durch einen Kegelschnitt und eine Gerade, welche sich in denselben im Allgemeinen schneiden würden, in der That aber sich nicht

*) Seydewitz, Das Wesen der involutorischen Gebilde in der Ebene als gemeinschaftliches Princip individueller Eigenschaften der Figuren. Erster Theil, Heiligenstadt 1846.

schneiden, gibt man sich hier die Involution zugeordneter Pole in Bezug auf diesen Kegelschnitt, deren Hauptpunkte jene ersteren sein würden, oder vielmehr, den Hülfskegelschnitt ganz beseitigend, gibt man sich eine beliebige Involution von Punkten, mit der Forderung, daſs dieselbe eine Involution zugeordneter Pole für den gesuchten Kegelschnitt werde ..." Auf die Schrift selbst brauche ich nicht näher einzugehen. Seydewitz stellt zunächst die nötigsten Hülfssätze aus Steiner's Systemat. Entwickelung zusammen, geht dann im ersten Capitel auf die involutorische Beziehung als speciellen Fall der projectivischen Beziehung näher ein und zeigt im zweiten Capitel im engsten Anschluſs an die besprochenen Abhandlungen, in welcher Weise metrische Beziehungen unter conjugirten Halbmessern, die Brennpunkteigenschaften u. s. w. mit dem Involutionsbegriff zusammenhängen.*)

---

*) Der Vollständigkeit halber führe ich noch zwei kleinere Arbeiten an, in denen Seydewitz sich, wenigstens zum Teil, ebenfalls projectivischer Gebilde bedient: Seydewitz, Auflösung der Aufgabe: In ein gegebenes Viereck ein Quadrat zu beschreiben; nebst einigen Sätzen, welche zu beweisen sind, Grunert's Arch., Bd. 6, 1845, S. 178—186. Seydewitz, De ellipsi minima dato quadrangulo circumscripta, Grunert's Arch., Bd. 13, 1849, S. 54—68. Seydewitz geht in der letzteren Arbeit von dem Satze aus: „Das Quadrat des Inhalts einer Ellipse wird erhalten, wenn man die Abstände ihres Mittelpunktes von den Seiten eines Polardreiecks PQR mit der Zahl π^2 und einer constanten Strecke

$$\frac{QR}{\sin QPR} = \frac{RP}{\sin RQP} = \frac{PQ}{\sin PRQ},$$

multiplicirt," welche, wie leicht zu sehen, doppelt so groſs ist, als der Radius des PQR umschriebenen Kreises. Für die einem Viereck $ABCD$ umschriebenen Kegelschnitte bilden die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten ein gemeinsames Polardreieck PQR. Ihre Mittelpunkte erfüllen einen PQR umschriebenen Kegelschnitt. Unter Anwendung trimetrischer Coordinaten gelangt nun Seydewitz von hier aus zu dem Theorem: „Man ziehe durch den Schwerpunkt S des Dreiecks PQR Parallelen zu den Seiten desselben. Jedem so entstandenen Parallelogramm kann eine Hyperbel umschrieben werden, deren Asymptoten zu zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks parallel sind. Der Mittelpunkt der gesuchten Ellipse ist der innerhalb des Vierecks gelegene der drei Punkte, welche die drei Hyperbeln auſser S miteinander gemein haben." Selbstverständlich ist von vornherein anzunehmen, daſs keiner der vier Punkte A, B, C, D innerhalb des Dreiecks aus den drei anderen liegt. Bereits Euler hat übrigens die Aufgabe auf eine Gleichung dritten Grades zurückgeführt. Vergl.: Euler, Problema geometricum, quo inter omnes ellipses, quae per data quatuor puncta traduci possunt, ea quaeritur, quae habet aream minimam (Conv. exhib. d. 4. Sept. 1777), Nova acta ac. sc. imp. Petropolitanae f. 1791, Bd. 9, 1795, S. 132—145. Eine geometrische Bedeutung gewann er seiner Lösung indes nicht ab. Hingegen ermittelte er, daſs unter allen einem Dreieck umschriebenen Ellipsen diejenige den kleinsten Inhalt besitzt, deren Mittelpunkt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammenfällt. Vergl.: Euler, Solutio problematis maxime curiosi, quo inter omnes ellipses, quae circa datum triangulum circumscribi possunt ea quaeritur, cujus area sit omnium minima

Nach Construction eines Kegelschnittes, von dem drei reelle Punkte und eine Involution conjugirter Punkte vorliegen, giebt Staudt eine zu dem angeführten Ausspruch analoge aber knapper gehaltene Äufserung über imaginäre Elemente.*) „Wenn in einem Satze zwei Elemente als Ordnungselemente eines involutorischen Gebildes erscheinen, so kann derselbe in der Regel dadurch allgemeiner aufgefafst werden, dafs man von der Voraussetzung, das involutorische Gebilde habe zwei Ordnungselemente, abstrahirt. Um hieran zu erinnern, sagt man von einem involutorischen einförmigen Gebilde, in welchem kein (reelles) Element sich selbst zugeordnet ist, dafs seine Ordnungselemente imaginär seien." Nachdem er noch hervorgehoben, dafs ein Paar imaginärer Punkte oder Tangenten eines Kegelschnittes durch eine Involution conjugirter Punkte oder Strahlen gegeben ist, construirt Staudt zur Erläuterung einen Kegelschnitt, von dem drei reelle Tangenten und ein Paar imaginärer Punkte vorliegen.

17. Die Paare conjugirt-imaginärer Punkte eines Kegelschnittes hatte bereits Poncelet durch Einführung der zu ihm conjugirten Kegelschnitte fixirt [XVI, 3]. Aus der grundlegenden Gleichung

$$OM^2 = p \cdot AO \cdot OB$$

erhielt man, wenn blofs der absolute Wert der rechten Seite in Betracht gezogen wurde, und die einem Punkte O von AB zugehörige Strecke OM nach beiden Seiten in einer bestimmten Richtung aufgetragen wurde, eine Ellipse und eine Hyperbel, die sich in den Punkten A und B berühren und für diese Richtung conjugirt sind. Jede Sehne der Hyperbel in der betreffenden Richtung versinnbildlicht die imaginären Punkte, welche die Gerade mit der Ellipse gemein hat, und umgekehrt. Es ist klar, dafs hier ein specieller Fall des allgemeineren Gedankens von Seydewitz vorliegt. In der That ist die Involution conjugirter Punkte, welche die Ellipse oder die Hyperbel auf einer der betrachteten ideellen Sehnen hervorruft, durch zwei specielle Paare eindeutig fixirt. Das eine derselben besteht aus dem Punkte O und dem unendlich fernen Punkte der Sehne, das zweite Paar wird durch das erste harmonisch getrennt. Eine nähere Behandlung der ideellen Sehnen von diesem allgemeineren Gesichtspunkt aus hat Paulus**) in Angriff genommen. Freilich mufs die Art, in der

(Conv. exhib. d. 4. Sept. 1777), ibidem, S. 146—153. Seydewitz weist (ohne nähere Angaben) auf eine von Anger herrührende Behandlung seiner Aufgabe hin und giebt am Schlusse unter Hinweis auf die oben [IV, 1] genannte Schrift von Gaufs auch eine einfache Lösung für die analoge Aufgabe bei der Kegelschnittschar.

*) Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 186, Nr. 315.

**) Paulus, Ordnungselemente der einförmigen involutorischen Grundgebilde, Grunert's Arch., Bd. 21, 1853, S. 175—189; Paulus, Über uneigentliche Punkte und Tangenten der Kegelschnitte, Grunert's Arch., Bd. 22, 1854, S. 121—139.

Paulus neben die eigentlichen Elemente des Kegelschnittes die uneigentlichen stellt, als sehr willkürlich und anfechtbar entschieden verworfen werden. Durch Einführung der Ordnungselemente erzwingt nämlich Paulus eine scheinbare Analogie bei der elliptischen und der hyperbolischen Involution. Zuerst wird (S. 177) als „Ordnungspunkt" einer Punktinvolution ein solches Element ihres Trägers bezeichnet, dessen Abstand von dem homologen Element ein Minimum wird. Die beiden Ordnungspunkte werden zwar stets durch den Mittelpunkt der Involution von dem unendlich fernen Punkt harmonisch getrennt, sie fallen aber bei der hyperbolischen Involution mit den Doppelpunkten zusammen, bilden hingegen bei der elliptischen Involution ein Paar. Ganz ähnlich wird (S. 181) ein „Ordnungsstrahl" einer Strahleninvolution durch die Forderung eingeführt, dafs er mit seinem homologen Strahl einen möglichst kleinen spitzen Winkel einschliefsen soll. Bei der hyperbolischen Involution reducirt sich dieser Winkel auf 0, da jeder der beiden Ordnungsstrahlen mit dem homologen Strahle zusammenfällt. Dagegen entsprechen die beiden Ordnungsstrahlen zweier gleichliegenden involutorischen Strahlenbüschel einander wechselseitig, werden aber, wie die Ordnungsstrahlen der hyperbolischen Involution, durch die Axen der Involution harmonisch getrennt. Die Involutionen conjugirter Punkte und Strahlen eines Kegelschnittes liefern nun mit ihren Ordnungselementen die wirklichen Punkte und Tangenten desselben, wie auch Paare uneigentlicher Punkte und Tangenten: „Die Endpunkte der uneigentlichen zu zwei conjugirten Durchmessern einer Ellipse parallelen Sehnen erfüllen zwei Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten. Dieselben bilden ein zweites, das erste harmonisch trennendes Paar conjugirter Durchmesser der Ellipse. Die reellen Durchmesser der einen Hyperbel sind uneigentliche Durchmesser der anderen" (S. 127, 131). Zu den so gewonnenen Kegelschnitten tritt noch ein vierter, ganz imaginärer, von Paulus nicht betrachteter hinzu. Die Durchmesser der Ellipse sind uneigentliche Durchmesser desselben. Die vier Kegelschnitte bilden eine bekannte in sich geschlossene Gruppe; sie gehen durch polarreciproke Umformung an irgend einem der vier Kegelschnitte in sich über.

Die beiden aufeinander senkrechten conjugirten Strahlen eines Kegelschnittes, welche von P ausgehen und denselben in den Punktepaaren AB und CD treffen mögen, halbiren die Winkel, welche die Verbindungslinien des Punktes P mit den Brennpunkten einschliefsen. Die von P ausgehenden uneigentlichen Tangenten projiciren dann die Schnittpunkte AC, BD und AD, BC. Von jedem Brennpunkte gehen unendlich viele Paare uneigentlicher Tangenten aus. Wird P über eine der beiden Axen des Kegelschnittes geführt, so umhüllen die uneigentlichen Tangenten den conjugirten Kegelschnitt des gegebenen, welcher in den Endpunkten der Axe berührt; bei der Hyperbel kommt natürlich nur die Hauptaxe in Betracht. Im

übrigen erweist sich die von Paulus beliebte Darstellung der imaginären Tangenten nicht eben als fruchtbar. Unverkennbar erblickt Paulus in der eben geschilderten Darstellung einen Fortschritt gegen die Seydewitz-Staudt'schen Anschauungen, die er ganz kurze Zeit zuvor zur Darstellung gebracht hatte.*) Er hatte sich hier allerdings fast auf die Definition eines Paares imaginärer Elemente durch eine Involution conjugirter Punkte oder Strahlen beschränkt und zunächst Constructionen des Kegelschnittes gegeben, wenn drei reelle und zwei conjugirt-imaginäre Punkte oder zwei Paare imaginärer Punkte und ein reeller Punkt vorliegen. Auch gelangt er auf dem Boden der projectivischen Geometrie zu dem Satze, dafs zwei Kegelschnitte in perspectivisch-collinearer Beziehung hinsichtlich eines Punktes stehen, von dem ein gemeinsames Tangentenpaar ausgeht, sei es reell oder imaginär.

18. Ich habe schliefslich eine Arbeit von A. Jacobi**) zu erwähnen. Nach Ableitung einiger Relationen zwischen Punkten einer Geraden mit Hülfe der Doppelverhältnis-Function wendet Jacobi sich in einem zweiten Abschnitt zur Definition der involutorischen Beziehung, welche bei zwei projectivischen Punktreihen oder Strahlenbüscheln durch das Aufeinanderlegen der Fluchtpunkte bezw. der homologen rechten Winkel genau wie bei Seydewitz herbeigeführt wird. Er geht sodann auf metrische Beziehungen genauer ein und entwickelt (S. 54) zunächst aus Transversalensätzen, dafs die drei Paare AA_1, BB_1, CC_1 gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits von einem beliebigen Punkte P aus durch Paare einer Strahleninvolution projicirt werden. Die Involution, welche dieselbe auf einem beliebigen A, B, C, P umschriebenen Kegelschnitt ausschneidet — A_1, B_1, C_1 mögen einer Seite des Vierseits angehören —, wird von einem anderen Punkte des Kegelschnittes aus wieder durch eine Strahleninvolution projicirt. Man hat also den Hülfssatz: „Gehören die Dreiecke ABC und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ einem Kegelschnitte an, so liegen entweder für jeden oder für keinen Punkt P desselben die drei Punkte A_1, B_1, C_1, in denen BC, CA, AB von $P\mathfrak{A}_1$, $P\mathfrak{B}_1$, $P\mathfrak{C}_1$ getroffen werden, in einer Geraden." Parallelen, die zu BC, CA, AB durch irgend einen Punkt P_0 gelegt sind, schneiden z. B. die Ecken eines Dreiecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ erster Art auf einem A, B, C, P_0 enthaltenden Kegelschnitt aus. Ist derselbe ein Kreis, und verlegt man P in den anderen Endpunkt des durch P_0 bestimmten Durchmessers, so folgt (S. 55): „Die Fufspunkte der Lote, welche die Seiten eines Dreiecks ABC aus einem Punkte

*) Paulus, Grundlinien der neueren ebenen Geometrie, Stuttgart, 1853 (Achtes Buch, Symbolische Geometrie, S. 199—213).

**) A. Jacobi, Auflösungen und Beweise einer Reihe von Aufgaben und Lehrsätzen der ebenen Geometrie, Crelle's Journ., Bd. 31, 1846, S. 40—84, 93—110.

des ihm umschriebenen Kreises empfangen, liegen stets auf einer Geraden."*) Indem P und P_0 beliebige Punkte des Kreises werden, kann man den Satz auch auf Transversalen übertragen, die nach Gröfse und Richtungssinn gleiche Winkel mit den Seiten des Dreiecks bilden. Dieser allgemeinere Satz ergiebt sich auch sehr einfach aus der Combination zweier von Lambert herrührenden Parabelsätze [VI, 6, 7], wie Poncelet ausgeführt hat.**)

Zweiter Abschnitt.

Eindeutige Beziehungen zwischen Grundgebilden zweiter und dritter Stufe.

XXXI. Grundgebilde zweiter Stufe.

1. In einem früheren Capitel [XXVII, 11—13] war ausführlich geschildert worden, auf welche Weise Steiner vermöge der sogenannten schiefen Projection eine quadratische Verwandtschaft zwischen zwei Grundgebilden zweiter Stufe einleiten konnte. Von der anschaulichen räumlichen Erzeugung verblieb zuletzt nur ein leichter Überrest; die völlige Ausschliefsung desselben, die Begründung der Verwandtschaften lediglich mit Hülfe projectivischer Beziehungen unter Benutzung einer von Möbius vorbereiteten Methode, ist das Verdienst von Seydewitz.***) Ein Punkt in einer Ebene kann als Schnittpunkt zweier Strahlen aufgefafst werden, die von zwei Centren S, S' ausgehen, ebenso kann eine Gerade als Verbindungslinie der beiden Punkte angesehen werden, die sie mit zwei Geraden t, t' gemein hat. Nimmt man jetzt in zwei Ebenen α und α_1 feste Punktepaare SS' und $S_1 S_1'$, in zwei anderen, β und β_1, feste Geradenpaare tt' und $t_1 t_1'$

---

*) Servois führt diesen Lehrsatz auf Simson zurück. Vergl.: Servois, Prolonger une droite accessible au-delà d'un obstacle qui borne la vue, en n'employant que l'équerre d'arpenteur, et sans faire aucun chaînage, Gerg. Ann., Bd. 4, 1813 u. 1814, S. 250—253. Gergonne giebt in einer Fufsnote dieser Arbeit (S. 251) einen elementaren Beweis des Satzes. Einen anderen elementaren Beweis des Simson'schen Satzes enthält die Arbeit: Durrande, Observations sur les deux théorèmes de géométrie énoncés aux pages 250 et 320 du IV^e volume des Annales, Gerg. Ann., Bd. 7, 1816 u. 1817, S. 253—255.

) Vergl. a. a. O. S. 56* (S. 10).

***) Seydewitz, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, mit besonderer Rücksicht auf die Theorie der höheren Curven, Grunert's Arch., Bd. 7, 1846, S. 113—148.

willkürlich an, leitet man alsdann projectivische Zuordnungen ein zwischen den Strahlenbüscheln mit den Centren S, S_1 von α und α_1 und den Punktreihen auf den Trägern t, t_1:

$$S(\mathfrak{abc}\ldots) \barwedge S_1(\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_1\ldots) \barwedge t(\mathfrak{ABC}\ldots) \barwedge t_1(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\ldots),$$

und fügt man eine zweite Gruppe von Projectivitäten analoger Art hinzu:

$$S'(\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\ldots) \barwedge S_1'(\mathfrak{a}_1'\mathfrak{b}_1'\mathfrak{c}_1'\ldots) \barwedge t'(\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'\mathfrak{C}'\ldots) \barwedge t_1'(\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'\mathfrak{C}_1'\ldots),$$

so werden zwischen allen vier Ebenen „geometrische Verwandtschaften“ eingeleitet, wobei die Punkte der beiden ersten Ebenen aufeinander und auf die Strahlen der dritten und vierten Ebene bezogen werden. In der That gehören z. B. einander zu die Schnittpunkte $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}'$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{c}_1'$ sowie die Verbindungslinien $\mathfrak{A}\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1'$. Führt man den Kreuzungspunkt zweier von S und S' ausgehenden Geraden über eine Gerade l, so treten die Strahlenbüschel mit den Scheiteln S und S' in perspectivische Beziehung, die zugehörigen einförmigen Gebilde in einer der übrigen Ebenen in projectivische Beziehung; einer Punktreihe von α entspricht also in α_1 eine projectivische, auf einem Kegelschnitt liegende Punktreihe, in den Ebenen β und β_1 je eine projectivische Reihe von Tangenten eines Kegelschnittes, ein projectivischer Strahlenbüschel zweiter Ordnung (nach Staudt's Bezeichnung). Jedes dieser drei Gebilde zweiter Ordnung enthält drei feste Elemente. Beschränkt man sich auf die Beziehung zwischen den beiden Punktfeldern — die ganz analogen Betrachtungen gelten für irgend eine andere der drei Beziehungen —, so werden in den beiden l erzeugenden Strahlenbüscheln die Geraden SS' und $S'S$ aufeinander bezogen, denen die Strahlen S_1S_1'' und $S_1'S_1''$ entsprechen mögen. Den Geraden der Ebene α entsprechen also Kegelschnitte von α_1, welche einem Hauptdreieck $S_1S_1'S_1''$ umschrieben sind; umgekehrt enthält der einer beliebigen Geraden l_1 von α_1 entsprechende Kegelschnitt von α aufser S und S' noch einen dritten Punkt S'', in welchem sich die beiden zu S_1S_1' und $S_1'S_1$ homologen Strahlen schneiden. In der Verwandtschaft entsprechen einander zwei projectivische Strahlenbüschel mit den Scheiteln S'' und S_1''. $S''S_1''$ ist daher ein drittes mit SS_1 und $S'S_1'$ vollkommen gleichwertiges Paar von Hauptpunkten. Einem Kegelschnitt der ersten Ebene entspricht, sobald er zwei Hauptpunkte, etwa S und S', derselben enthält, ein Kegelschnitt der zweiten, dem die entsprechenden Hauptpunkte angehören. Von hier aus giebt nun Seydewitz (S. 121 ff.) eine Anzahl von Sätzen über Kegelschnitte. Ineinander übergeführt werden z. B. die beiden Sätze: „ein Kegelschnittbüschel schneidet eine Gerade, ein Strahlenbüschel einen Kegelschnitt in einer Involution“. Aus dem Umstande, dafs zwei Punkte eines Kegelschnittes durch

zwei auf ihrer Verbindungslinie liegende conjugirte Punkte harmonisch getrennt werden, ergiebt sich der auch sonst leicht ersichtliche Satz: „Durchläuft einer von zwei für einen Kegelschnitt conjugirten Punkten eine Gerade, und enthält ihre Verbindungslinie beständig einen festen Punkt, so beschreibt der zweite Punkt einen Kegelschnitt.“

2. Eine Curve C_n geht, wenn sie die Hauptpunkte S, S', S'' bezw. p-fach, q-fach, r-fach enthält, in eine Curve C_m über, welche S_1, S_1', S_1'' bezw. $(n-q-r)$-fach, $(n-r-p)$-fach, $(n-p-q)$-fach enthält. Die Ordnungszahl m ist gleich der Anzahl der Punkte, die ein $S\,S'\,S''$ umschriebener Kegelschnitt aufser S, S', S'' mit C_n gemein hat. Seydewitz legt nun die Hypothese zu Grunde, dafs die Zahl m von der Form $F(n)-p-q-r$ sei; aus dem Umstande, dafs die Rückkehr von C_m zu C_n nach denselben Gesetzen erfolgt, mit deren Hülfe man C_m aus C_n abgeleitet hatte, glaubt er (S. 124 ff.) nun beweisen zu können, dafs $F(n)$ gleich $2n$ ist, dafs also ein Kegelschnitt $2n$ Punkte mit einer Curve C_n gemein hat; es entspricht ihr dann eine Curve $C_{2n-p-q-r}$. In ähnlicher Weise glaubt er beweisen zu können, dafs zwei Curven C_m und C_n mn Schnittpunkte mit einander gemein haben, dafs $n(n-1)$ die Klassenzahl einer Curve C_n sei, die sich infolge eines p-fachen Punktes um $p(p-1)$ Einheiten vermindere, u. s. w. Für die synthetische Geometrie stehen diese Betrachtungen, auf die Seydewitz offenbar grofsen Wert legt, an Bedeutung erheblich gegen die bereits geschilderten Entwickelungen zurück. Dieselben sind, wie bekannt, in den festen Bestand des Lehrgebietes der synthetischen Geometrie aufgenommen worden.

Zu speciellen Curven übergehend, construirt Seydewitz (S. 136) zuerst eine Curve dritter Ordnung, von welcher ein Doppelpunkt und sechs andere Punkte vorliegen. Sie tritt in geometrische Verwandtschaft zu einem Kegelschnitt, wenn man den Doppelpunkt und zwei der sechs anderen gegebenen Punkte zu Hauptpunkten ihrer Ebene macht. Der auf diese Weise entstehende Kegelschnitt ist alsdann durch fünf Punkte eindeutig gegeben. Ein ähnlicher Gedankengang ergab sich [I, 8] bei der organischen Erzeugung der Curve, mit der sich Newton und Maclaurin befafst hatten. Die Methode kann, wie das auch schon Maclaurin gelehrt hatte, auf die Curve C_n mit $(n-1)$-fachem Punkte ausgedehnt werden. Hervorhebung verdient (S. 138) der Satz, von dem Le François [XXV, 1] einen Specialfall gab: „Punktepaare einer rationalen Curve C_3, deren Verbindungslinien einen festen ihr angehörigen Punkt enthalten, werden vom Doppelpunkte aus durch Strahlenpaare einer Involution projicirt; auch die Tangenten im Doppelpunkte bilden ein Paar derselben.“ Es folgen kurze Bemerkungen über die Curve C_4 mit drei Doppelpunkten, die Curve C_5 mit einem dreifachen und drei zweifachen Punkten u. s. w.

3. Liegen die beiden Punktfelder in einer Ebene, so erzeugen die beiden Paare projectivischer Strahlenbüschel um S und S_1, bezw. S'

und S_1' zwei Kegelschnitte K_2 und K_2', deren Schnittpunkte sich selbst entsprechen, so daſs die beiden geometrisch verwandten Ebenen vier Doppelpunkte aufweisen. Ferner giebt es im allgemeinen ein einziges Paar sich wechselseitig entsprechender Punkte. Diese Punkte, deren Verbindungslinie die Pole von K_2 und K_2' nach SS_1 und $S'S_1'$ enthält, sind sowohl für K_2 als auch für K_2' conjugirt. Wenn die beiden Pole zusammenfallen, so erfüllen die Paare sich wechselseitig entsprechender Punkte eine Curve höherer Ordnung, welche [XXX, 14] in einen Kegelschnitt übergeht, wenn der fragliche Punkt einer beiden Kegelschnitten gemeinsamen Sehne angehört. Im allgemeinen Falle hat man es nach einem angeführten Satze von Chasles [XXV, 1] mit einer Curve dritter Ordnung, einer projectivischen Verallgemeinerung der allgemeinen Focale zu thun. Fällt K_2 mit K_2' zusammen, so entsprechen irgend zwei conjugirte Punkte der Polare des Schnittpunktes von SS_1 und $S'S_1'$ einander wechselseitig. Wenn endlich S mit S_1, S' mit S_1' zusammenfällt, und ein einziges Paar wechselseitig entsprechender Punkte nachgewiesen wird, so sind die beiden Ebenen involutorisch verwandt, je zwei zusammengehörige Punkte entsprechen einander wechselseitig. Hierhin gehört die Poncelet'sche Verwandtschaft [XVI, 4; XVII, 10], bei der die zwei Kegelschnitten gemeinsamen Paare conjugirter Punkte in Frage kommen, sowie die andere Verwandtschaft, bei welcher die Brennpunkte jedes drei feste Tangenten berührenden Kegelschnittes einander entsprechen. Es werden noch die quadratischen Verwandtschaften zwischen einem Punktfeld und einem Strahlenfeld und zwischen zwei Strahlenfeldern kurz besprochen. Indem sodann bei der Verwandtschaft zwischen zwei Punktfeldern SS' und S_1S_1' homologe Strahlen der beiden projectivischen Büschel mit den Scheiteln S und S_1 werden, gelangt Seydewitz zu dem Falle, in dem die Hauptpunkte S', S'' der ersten und diejenigen S_1', S_1'' der zweiten Ebene zusammenfallen (S. 147). Eine andere geometrische Verwandtschaft besonderer Art kommt (S. 140) zustande, wenn sowohl die homologen Strahlenbüschel mit den Scheiteln S und $`_1$, wie auch diejenigen mit den Scheiteln S' und S_1' congruent sind. Den Kreisen, welche S und S' enthalten, sowie den gleichseitigen Hyperbeln mit dem Durchmesser SS' entsprechen dann entweder die Kreise und Hyperbeln analoger Art, oder es gehören umgekehrt die gleichseitigen Hyperbeln den Kreisen, die Kreise den Hyperbeln zu.

4. Ich hatte bereits [XXII, 8] darauf aufmerksam gemacht, daſs die Darstellung einer quadratischen Verwandtschaft zwischen zwei Punktfeldern mit Hülfe zweier bilinearen Gleichungen zwischen zwei Coordinatenpaaren, wie sie bei Magnus auftritt, eine directe Verallgemeinerung der Poncelet'schen Verwandtschaft in sich schlieſst. Die Begründung auf geometrischem Wege gab 1841

A. Jacobi.*) Liegen zwei collineare Felder in einer Ebene, so erzeugen zwei homologe Strahlenbüschel einen Kegelschnitt, welcher die Mittelpunkte der beiden Strahlenbüschel, überdies die drei — sich selbst entsprechenden — „Situationspunkte" enthält und dadurch eindeutig bestimmt ist. Bezieht man nun die beiden Felder reciprok auf ein drittes Feld, so entspricht einem Punkte desselben der Schnittpunkt der beiden zu ihm homologen Strahlen, folglich einer Punktreihe das eben erwähnte Erzeugnis der zu ihr homologen Strahlenbüschel. Die entsprechende Begründung der Poncelet'schen Verwandtschaft, specieller auf zwei derselben Ebene angehörige Polarsysteme zugeschnitten, begegnete uns bei Chasles und in genauerer Ausführung bei Seydewitz [XXX, 5, 12]. In der Beziehung zeigte sich übrigens die A. Jacobi-Poncelet'sche Betrachtung der soeben ausführlich geschilderten und an sich anschaulicheren Seydewitz-Steiner'schen Methode überlegen, als diese notwendig reelle Hauptpunkte erfordert, während bei jener zwei Hauptpunkte in jeder Ebene imaginär werden können. Freilich, nach den strengeren Anschauungen von Seydewitz bleibt es noch zu beweisen, dafs die Kegelschnitte Jacobi's auch dann die drei Situationspunkte miteinander gemein haben, wenn zwei derselben imaginär werden. Für die Poncelet'sche Verwandtschaft hatte Seydewitz diese Ergänzung gegeben. Die zu einem Büschel von Kegelschnitten gehörigen Wechselpunktkegelschnitte haben [XXX, 13] entweder drei reelle Punkte oder einen reellen Punkt und eine Involution conjugirter Punkte miteinander gemein.**)

5. In einer Fortsetzung der soeben besprochenen Abhandlung wendet sich Seydewitz***) zu den Verwandtschaften der Collineation und Reciprocität. Bringt man zwei Punktfelder ε und ε_1 genau so wie oben, mit Hülfe der beiden Projectivitäten

$$S\,(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\cdots)\ \overline{\wedge}\ S_1\,(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{c}_1\cdots)$$

*) A. Jacobi, Über Reihen von Kegelschnitten in einer Ebene, welche sich in denselben vier Puncten schneiden, Crelle's Journ., Bd. 23, 1841, S. 243—254. Aus dieser Schrift möge noch der folgende Satz hervorgehoben werden: „Auf den entsprechenden Geraden l und l_1 zweier collinearen, einer Ebene angehörenden Felder schneiden diejenigen Kegelschnitte entsprechende Punkte aus, welche den Schnittpunkt der gegebenen Geraden und die drei Situationspunkte miteinander gemein haben." Oder, wie man es (S. 246) auch ausdrücken kann: „Eine Gerade werde von einem Kegelschnitte in den Punkten P und P_1, von den Seiten BC, CA, AB eines ihm eingeschriebenen Dreiecks in den Punkten A_1, B_1, C_1, geschnitten. Die Punktgruppe $A_1\,B_1\,C_1\,P_1$ bleibt zu sich selbst projectivisch, wenn die Gerade um P gedreht wird."

) Mit der quadratischen Verwandtschaft und zwar mehr nach der Seydewitz'schen Methode beschäftigt sich A. Jacobi auch a. a. O. S. 317 (S. 76 ff., S. 98 ff.).

***) Seydewitz, Darstellung der geometrischen Verwandtschaften mittels projektivischer Gebilde, Grunert's Arch., Bd. 8, 1846, S. 1—46.

und

$$S' (\mathfrak{a}' \mathfrak{b}' \mathfrak{c}' \cdots) \overline{\wedge}\, S_1' (\mathfrak{a}_1' \mathfrak{b}_1' \mathfrak{c}_1' \cdots)$$

in eindeutige Beziehung, und nimmt man an, dafs SS' und $S_1 S_1'$, sowohl in der ersteren, als auch in der letzteren projectivischen Beziehung einander entsprechen, so gehört nicht blofs jedem Punkte der einen Ebene ein Punkt der anderen Ebene, sondern auch, da eine perspectivische Beziehung der Strahlenbüschel mit den Scheiteln S und S' in eine perspectivische Beziehung der Strahlenbüschel mit den Scheiteln S_1 und S_1' übergeführt wird, zu jeder Geraden der ersten Ebene eine Gerade der zweiten Ebene. Offenbar sind ferner zwei homologe Punktreihen und folglich auch zwei homologe Strahlenbüschel projectivisch auf einander bezogen. Da somit die beiden Punktepaare SS' und $S_1 S_1'$ keine Sonderstellung haben, ist die collineare Beziehung zweier Punktfelder durch vier Paare homologer Elemente festgelegt. Der analoge Satz gilt für die reciproke Beziehung. „Entspricht von n Ebenen jede der vorhergehenden collinear oder reciprok, so sind irgend zwei derselben, insbesondere die erste und die letzte, collinear oder reciprok auf einander bezogen.“ Allgemeiner: „Wird in jeder von n Punkt- oder Strahlenfeldern ein Hauptdreieck angenommen, und werden nun aufeinanderfolgende Felder mit Benutzung der in ihnen liegenden Dreiecke in geometrische Verwandtschaft gebracht, so sind auch zwei nicht aufeinanderfolgende Ebenen entweder bezüglich ihrer Punkte oder ihrer Geraden geometrisch verwandt.“ (S. 2)

6. Etwas ausführlicher will ich Seydewitz' Beweis (S. 7 ff.) für den Satz darlegen: „Zwei collineare Ebenen können auf vier Arten in „collineare“ (perspectivische) Lage gebracht werden.“ Werden von einem Winkel $A_1 S_1 B_1$ in der zweiten von zwei collinearen Ebenen die Schnittpunkte A_1, B_1 mit ihrer Fluchtlinie — welche Seydewitz in Anlehnung an eine Bezeichnung von Magnus als „Axe“ der Ebene bezeichnet — festgehalten, so bleibt jeder Schenkel des homologen Winkels zu sich selbst parallel, der Winkel selbst also constant. Wenn daher $A_1 S_1 B_1$ dem homologen Winkel gleich bleiben soll, so mufs S_1 den einen oder den anderen von zwei Kreisen beschreiben, die A_1, B_1 enthalten. Nachdem man B_1 durch C_1 ersetzt hat, ergeben sich zwei weitere Kreise analoger Art über der Sehne $A_1 C_1$. Jeder der beiden ersteren Kreise schneidet sich mit einem bestimmten der beiden letzteren in dem Centrum S_1' bezw. S_1'' eines Strahlenbüschels, der zu dem homologen mit dem Centrum S' bezw. S'' der ersten Ebene projectivisch-congruent ist.*) Die Flucht-

*) Eine kleine Vereinfachung läfst sich noch dadurch erzielen, dafs man den Punkt A_1 ins Unendliche entfernt. Wenn man die früheren Bezeichnungen festhält, so hat man statt der beiden ersten Kreise Strahlen einzuführen, welche B_1 enthalten und mit der Axe der zweiten Ebene

punkte F und G_1 der projectivischen Punktreihen, welche die Geraden $S'S''$ und $S_1'S_1''$ tragen, gehören den Axen der beiden Ebenen an, man erhält also zwei weitere Paare homologer Punkte AA_1 und BB_1 dieser Reihen, wenn man — FS' und G_1S_1' werden als Strecken von gleichen Vorzeichen betrachtet —

$$AF = FB = S_1'G_1 = G_1S_1''; A_1G_1 = G_1B_1 = S'F = FS''$$

macht. $S'S''$ und $S_1'S_1''$ sind beiläufig die einzigen zu den Axen senkrechten homologen Geraden. Zu den Linien l und m, welche man durch A und B parallel zur Axe der ersten Ebene gezogen hat, sind die durch A_1 und B_1 zur Axe der zweiten Ebene gezogenen Parallelen l_1 und m_1 homolog. Da z. B. S' von l und m

---

denselben Winkel bilden, wie die entsprechenden Strahlen der ersten Ebene, deren Richtung durch B_1 bestimmt ist, mit der Axe derselben. Dies hat man noch einmal für den Punkt C_1 zu wiederholen. Magnus, der diese Construction 1833 anführt [Vergl. a. a. O. S. 168*** (S. 46)], gelangt nur zu einem der beiden Paare $S'S_1'$ und $S''S_1''$. Er hat dies 1837 dahin interpretirt, dafs die Ebenen vom Anfang an aufeinander liegen und durch bloſses Verschieben in collineare Lage gebracht werden sollen. Alsdann kommt allerdings nur eines der beiden Paare in Betracht [Vergl. a. a. O. S. 168*** (S. 80)]. Besonders anschaulich hat Chasles diesen Gedankengang 1837 dargestellt. Man lege die Ebenen so aufeinander, dafs ihre Fluchtlinien parallel verlaufen. Wird ein Strahl der zweiten Ebene um seinen Fluchtpunkt gedreht, bleibt also der homologe Strahl der ersten Ebene zu sich selbst parallel, so wird jener Strahl, indem er diese Richtung ebenfalls annimmt, zu seinem homologen Strahl parallel. Um nun die Scheitel S', S_1' der gleich gerichteten congruenten Strahlenbüschel zu finden, braucht man diese Construction nur zweimal zu wiederholen, da diese Punkte offenbar nur Paare paralleler homologen Strahlen aussenden. Vergl.: Chasles, Aperçu historique, S. 339. Spitzer hat folgende einfache Construction angegeben. Zwei parallele Gerade q, r der einen von zwei collinearen Ebenen mögen die Fluchtlinie derselben in den Punkten A, B treffen. Jede der beiden Parallelen zur Fluchtlinie der zweiten Ebene, auf denen die zu q und r homologen Geraden q_1, r_1 eine AB gleiche Strecke abschneiden, ist projectivisch-congruent auf ihre homologe Gerade bezogen. Vergl.: Spitzer, Über die Identität der Pyramidal- und prismatischen Schnitte mit den Verwandtschaften der Collineation und Affinität, Grunert's Arch., Bd. 9, 1847, S. 345—353. Beiläufig mag bemerkt werden, dafs Nerenburger sich mit der Frage beschäftigt hat: Kann ein beliebiges Viereck $ABCD$ in ein Quadrat projicirt werden? Wenn AB und CD in C_1, BC und AD in A_1 sich begegnen und A_1C_1 die Geraden AC und BD in den Punkten B', B'' schneidet, so wird von jedem zugleich auf den Kugeln über den Durchmessern A_1C_1 und $B'B''$ gelegenem Punkte S aus das Viereck in ein Quadrat projicirt, wenn die Projectionsebene zu SA_1C_1 parallel ist. Nerenburger beweist, dafs die Projection des Vierecks ein Rechteck wird, wenn S der Kugel über dem Durchmesser A_1C_1 angehört, verneint aber die Möglichkeit, das Viereck in ein Quadrat zu projiciren; hierzu müsse AC zu A_1C_1 parallel sein. Offenbar enthält aber die zweite Kugel die Punkte, von denen aus das Rechteck in einen Rhombus projicirt werden kann, und schneidet sich mit der ersten Kugel in den gesuchten Punkten. Vergl.: Nerenburger, Sur la transformation de figures planes irrégulières en figures régulières, Quet. Corr., Bd. 9, 1837, S. 149—152.

die gleichen Abstände hat, wie S_1' von l_1 und m_1, so tragen sowohl l und l_1, als auch m und m_1 homologe congruente Punktreihen zu der collinearen Beziehung bei; homologe Gerade, welche zu den Axen parallel sind, enthalten projectivisch-ähnliche Punktreihen. Liegen S' und S'' innerhalb des aus l und m gebildeten Parallelstreifens, so befinden sich S_1' und S_1'' aufserhalb des Parallelstreifens aus l_1 und m_1. Werden nun die Ebenen so aufeinander gelegt, dafs entweder die Strahlenbüschel mit den Centren S' und S_1' oder diejenigen mit den Centren S'' und S_1'' zur Deckung kommen, so müssen in beiden Fällen entweder l und l_1 oder m und m_1 sich decken. Zwei collineare Ebenen können also (S. 28) auf vier Arten so aufeinander gelegt werden, dafs die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt hindurchgehen und entsprechende Strahlen sich auf einer Geraden schneiden. Werden die beiden collinearen Ebenen mit zwei homologen congruenten Punktreihen aneinander gelegt, so werden, wie Seydewitz in der unten [S. 330*] besprochenen Abhandlung (S. 167) ausführt, gemäfs einem allgemeineren Satze von Möbius [XXIII, 13], die Ebenen zu einem Strahlenbündel perspectivisch. Wenn andererseits zwei collineare Ebenen ε und ε_1 zu einem Strahlenbündel perspectivisch liegen, so werden die Punkte S', S_1' und S'', S_1'' von zwei Strahlen des Bündels ausgeschnitten, die zu den Halbirungsebenen der von ε und ε_1 gebildeten Winkel senkrecht stehen. Chasles, der diese Regel in einer schon genannten Abhandlung entwickelt*), bemerkt auch, dafs, wenn beide Ebenen durch Drehung um ihre Schnittlinie zur Deckung gebracht werden, entweder S' und S'' oder S_1' und S_1'' sich zu einem Homologie-Centrum vereinigen. Ein um S' oder S'' beschriebener Kreis wird daher nach Poncelet's Theorem in einen Kegelschnitt projicirt, welcher S_1' oder S_1'' zum Brennpunkt hat, ein Resultat, das schon oben angegeben wurde, das Chasles übrigens metrisch begründet. Auch Magnus hat diese Construction der Punkte S', S''; S_1', S_1'' 1837 an der bezeichneten Stelle gegeben [Vergl. S. 323*].

7. Bei zwei einer Ebene angehörenden collinearen Feldern sind die „Situationspunkte" (Doppelpunkte) ebenfalls gemeinsame Punkte zweier Kegelschnitte K_2 und K_2', welche die beiden gegebenen Paare projectivischer Strahlenbüschel erzeugen. Dieselben haben aber den Schnittpunkt von SS' und S_1S_1' von vorne herein miteinander gemein. Die übrigen Schnittpunkte, von denen wenigstens einer reell ist, sind Situationspunkte. Wenn drei reelle Situationspunkte vorliegen, sind die Situationsgeraden als ihre Verbindungslinien gegeben. Man kann sich aber, wenn man die duale Betrachtung heranzieht, von vorne herein überzeugen, dafs stets wenigstens eine reelle Situationslinie vorliegt. Andererseits liegen die Punktreihen auf zwei homologen von einem

) Vergl. die letzte oben [S. 299] genannte Abhandlung.

Situationspunkte ausgehenden Geraden perspectivisch zu einem Punkte einer Situationslinie. Wenn also aufser einem Situationspunkte noch drei Paare homologer Punkte gegeben sind, so kann man mit alleiniger Hülfe des Lineals die zugehörige Situationslinie construiren (S. 25).

Zwei collineare einer Ebene angehörende Felder enthalten im allgemeinen keine Elemente, die sich wechselseitig entsprechen; es können jedoch die Punktepaare einer Situationslinie und die Strahlenpaare, welche von dem gegenüberliegenden Situationspunkte ausgehen, einander wechselseitig entsprechen. Endlich können je zwei Punkte und je zwei Gerade der Felder in wechselseitiger Beziehung stehen. In die zweite Lage können zwei gegebene collineare Felder auf unendlich viele Weisen gebracht werden, indem man entweder zwei homologe Gerade so übereinander legt, dafs die Fluchtpunkte der auf ihnen enthaltenen Punktreihen sich decken, oder indem man, wenn qt und $q_1 t_1$ zwei homologe Paare senkrechter Strahlen sind, q mit t_1 und t mit q_1 zur Deckung bringt. In die dritte Lage können zwei collineare Ebenen gebracht werden, wenn die Mittelpunkte zweier homologen congruenten Strahlenbüschel den gleichen Abstand von den Axen der beiden Ebenen besitzen (S. 31).

8. Alles dies läfst sich auf affin, ähnlich oder congruent bezogene Ebenen anwenden. In allen drei Fällen ist die unendlich ferne Gerade eine Situationslinie und man kann, sobald drei Paare homologer Elemente bekannt sind, mit Hülfe des Parallelenziehens den zugehörigen Situationspunkt auffinden (S. 26). Die beiden anderen Situationspunkte liegen im Unendlichen, können reell oder imaginär sein oder im Grenzfall zusammenfallen. In der ersten von zwei affinen Ebenen giebt es im allgemeinen zwei Scharen paralleler Geraden, von denen jede auf ihre homologe Gerade projectivisch-congruent bezogen ist. Greift man bei zwei affinen Ebenen irgend zwei homologe Paare aufeinander senkrechter Strahlen heraus, und ist das Ähnlichkeitsverhältnis für die homologen Punktreihen auf dem einen Schenkelpaar gröfser als 1, für die auf dem anderen Schenkelpaar kleiner als 1, so sind die beiden Geradenscharen reell (S. 16). Ist diese Bedingung erfüllt, so können die Ebenen, indem man zwei homologe congruente Punktreihen übereinanderlegt, in „affine" (perspectivische) Lage gebracht werden. Der „Affinitätspunkt" (Centrum) liegt stets unendlich fern. Ähnliche Felder einer Ebene sind entweder schon in „ähnlicher" (perspectivischer) Lage, wenn zwei homologe Punktreihen in einer Geraden l liegen, oder gelangen doch in dieselbe, wenn man das eine Feld noch um l herumwendet. Der Doppelpunkt der ähnlichen Punktreihen ist dann der Ähnlichkeitspunkt, die zugehörige Ähnlichkeitsaxe liegt im Unendlichen. Congruente Ebenen können, nachdem sie zunächst völlig zur Deckung gebracht sind, in perspectivische Lage gelangen, indem entweder die zweite

Ebene eine halbe Umdrehung (durch einen Winkel von 180^0) um einen beliebigen Punkt macht, oder um eine beliebige Gerade herumgewendet wird (S. 28 ff.).

9. Bei zwei einer Ebene angehörigen reciproken Feldern η und η_1 wird zunächst jedem Punkte L sein Wechselpunkt L' zugeordnet, der Schnittpunkt der beiden Geraden, welche L entsprechen, wenn man den Punkt erst in das eine, dann in das andere Feld einfügt. Die beiden L' in derselben Art zugehörigen Geraden treffen sich in L. Durchläuft der eine der beiden Wechselpunkte eine Gerade, beschreiben mithin die zugeordneten Geraden projectivische Strahlenbüschel, so durchläuft der andere einen Kegelschnitt. Man erkennt ferner, dafs die Verbindungslinie zweier Wechselpunkte unendlich viele Paare von Wechselpunkten enthält, welche einer Involution angehören. Dem Schnittpunkte P zweier derartigen Geraden gehört die Verbindungslinie p der beiden entsprechenden Wechselpunkte zu, mag man ihn in das erste oder das zweite Feld einordnen. Jede von P ausgehende Gerade enthält daher eine Involution von Wechselpunkten, in der P ein Punkt von p entspricht. Andererseits geht von jedem Punkte O der Geraden p eine Involution von Wechselstrahlen aus, in der OP und p einander zugeordnet sind. Jeder von zwei Wechselstrahlen enthält die Punkte, welche dem anderen in dem ersten und dem zweiten Felde entsprechen. Die Verbindungslinie der Mittelpunkte M und M_1, welche der unendlich fernen Geraden in dem ersten oder zweiten Felde entsprechen, ist hiernach als Wechselstrahl der unendlich fernen Geraden zu p parallel. Ein Punkt, der in der einen ihm entsprechenden Geraden liegt, gehört auch der anderen an. Der Ort dieser Punkte besteht aus den Doppelpunkten der Wechselpunktinvolutionen, enthält ferner die Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit ihrem Wechselpunktkegelschnitt und ist also sicher von der zweiten Ordnung. Um ihn formal als Kegelschnitt nachzuweisen, greift Seydewitz drei Involutionen von Wechselpunkten beliebig heraus. Die Paare von Doppelpunkten $E\mathfrak{E}$, $E_1\mathfrak{E}_1$, $E_2\mathfrak{E}_2$ derselben gehören, weil sie durch P und p harmonisch getrennt werden, einem Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ an, welcher andere von P ausgehende Gerade in den Punktepaaren $E_3\mathfrak{E}_3, E_4\mathfrak{E}_4, E_5\mathfrak{E}_5, \cdots$ treffen möge. Die Punkte, welche durch diese Punktepaare von einer Geraden l harmonisch getrennt werden, erfüllen einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}_o$, welcher mit dem Wechselpunktkegelschnitt von l zusammenfällt; beide Kegelschnitte haben nämlich den Punkt P und dessen Tangente, welche den Schnittpunkt von p und l enthält, ferner die drei Punkte miteinander gemein, welche durch E und $\mathfrak{E}$, E_1 und $\mathfrak{E}_1$, E_2 und $\mathfrak{E}_2$ von l harmonisch getrennt werden. Jedes der Punktepaare $E_3\mathfrak{E}_3$; $E_4\mathfrak{E}_4, \cdots$ trennt daher zwei Paare von Wechselpunkten harmonisch und besteht also aus den Doppelpunkten einer Wechselpunkt-Involution. Die duale Betrachtung ergiebt einen zweiten Kegelschnitt K, für den ebenfalls p die Polare von P ist. Einer Tangente von K entspricht,

je nachdem sie in das erste oder das zweite Feld gerechnet wird, der eine oder andere ihrer Schnittpunkte B_1 und A mit $\mathfrak{K}$; die Schnittpunkte einer zweiten Tangente seien entsprechend mit C und D_1 bezeichnet. Alsdann entspricht dem Schnittpunkte T von AB_1 und CD_1, je nachdem er in das erste oder zweite Feld gehört, die Gerade B_1D_1 oder AC; diese Geraden kreuzen sich also in dem Wechselpunkte S von T. Da somit ST den Punkt P enthält, so mufs der Schnittpunkt Q von AD_1 und B_1C, der Pol von ST nach $\mathfrak{K}$, auf p liegen. TQ und TS sind aber, da sie die Tangenten AB_1 und CD_1 von K harmonisch trennen, auch für diesen Kegelschnitt conjugirt, auch für ihn ist ST die Polare von Q. Mithin berühren sich $\mathfrak{K}$ und K in zwei reellen oder imaginären Punkten von p; sie besitzen auf p dieselbe Involution conjugirter Punkte und weisen hinsichtlich p den gleichen Pol P auf. Umgekehrt können zwei einander doppelt berührende Kegelschnitte $\mathfrak{K}$ und K zur Herstellung einer reciproken Beziehung benutzt werden, wenn die Tangenten des letzteren den ersteren in reellen Punkten treffen.

10. Offenbar liegt in den geschilderten Betrachtungen auch ein rein geometrischer Beweis dafür, dafs der Kegelschnitt K durch zwei projectivische Punktreihen erzeugt werden kann, die einem ihn doppelt berührenden Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ angehören. Schon in einer früheren Arbeit*) hatte Seydewitz diesen Satz aufgestellt; aber er hatte für den Beweis sich auf Poncelet's Satz [XVII, 11] berufen, nach welchem die Seite A_1A_2 eines $\mathfrak{K}$ eingeschriebenen Dreiecks $A_1A_2A_3$, dessen andere Seiten A_2A_3 und A_3A_1 sich um feste Punkte P_1 und P_2 drehen, einen Kegelschnitt K umhüllt, welcher $\mathfrak{K}$ in seinen Schnittpunkten mit P_1P_2 berührt. Da A_2 und A_3 einerseits, A_3 und A_1 andererseits involutorisch bezogene Reihen beschreiben, so durchlaufen A_1 und A_2 projectivische Punktreihen (S. 427). Im Wesen auf ähnlicher Grundlage ruht eine Betrachtung, die A. Jacobi**) über den Satz angestellt hat. Er projicirt die beiden projectivischen Punktreihen auf $\mathfrak{K}$ in zwei congruente einem Kreise angehörige Punktreihen, welche einen zum ersten concentrischen Kreis erzeugen, geht also auf die Grundlage des Poncelet'schen Theorems zurück. Wenn man blofs auf die Erzeugung von K durch zwei auf $\mathfrak{K}$ liegende projectivische Punktreihen $ABCD\cdots$ und $A_1B_1C_1D_1\cdots$ ausgeht, so kann man Seydewitz' Beweis noch vereinfachen. Die beiden perspectivischen Strahlenbüschel

$$A(B_1C_1D_1\cdots) \barwedge A_1(BCD\cdots)$$

erzeugen eine Punktreihe $\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1\cdots$, welche einer festen Geraden p, der Axe der Projectivität auf $\mathfrak{K}$, angehört. Die Polaren $b_1, c_1, d_1, \cdots$

) Vergl. a. a. O. S. 149.

**) A. Jacobi, Grundzüge der Theorie der Kegelschnitte auf rein elementare Betrachtungen gegründet, Breslau, 1844.

von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{D}_1, \cdots$ nach $\mathfrak{K}$ schneiden nun offenbar auf AA_1 dieselben Punkte $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}, \cdots$ aus, wie BB_1, CC_1, $DD_1, \cdots$. Man entnimmt also aus den Projectivitäten

$$BCD \cdots \barwedge B_1C_1D_1 \cdots \barwedge \mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1 \cdots \barwedge \mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \cdots,$$

dafs auf zwei beliebig herausgegriffenen der Geraden AA_1, BB_1, CC_1, $DD_1, \cdots$ die übrigen projectivische Punktreihen ausschneiden, so dafs es sich um Tangenten eines Kegelschnittes K handelt. Die Gerade b_1 trennt mit $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ zusammen offenbar AA_1 und BB_1 harmonisch. Da unendlich viele Paare von Tangenten des Kegelschnittes K zu $\mathfrak{B}_1$ in derselben Beziehung stehen, wie AA_1 und BB_1, so ist b_1 auch für K die Polare von $\mathfrak{B}_1$.*) Göpel**) gelangte bei einem höchst eleganten Beweise zu einer bei Poncelet vorkommenden Fassung des Satzes. Wenn die Punktepaare AA_1, BB_1, $CC_1, \cdots$ der Reihe nach durch A_2, B_2, $C_2, \cdots$ von p harmonisch getrennt werden, so laufen A_2B_2, AB_1, A_1B in einem, A_2C_2, AC_1, A_1C in einem anderen Punkte von p zusammen. Werden BB_1 und CC_1 festgehalten und wird A über die Curve bewegt, so beschreiben AB_1 und AC_1, folglich auch A_2B_2 und A_2C_2 projectivische Strahlenbüschel. Also gehören A_2, B_2, $C_2, \cdots$ einem neuen Kegelschnitte K an; wenn man A mit C zusammenfallen läfst, so gehen A_2B_2 und A_2C_2 in B_2C_2 und CC_1 über, so dafs K in C_2 von CC_1 und somit in den Punkten A_2, B_2, $C_2, \cdots$ von AA_1, BB_1, $CC_1, \cdots$ berührt wird. Nach dieser Überlegung ist es nun selbstverständlich, dafs $\mathfrak{K}$ und K für jeden Punkt von p dieselbe Polare aufweisen (S. 348 ff.). Ohne Beweis fügt Göpel (S. 353) den von Plücker rechnend bewiesenen [II, 16], aber auch bei Poncelet [XIX, 3] vorkommenden Satz bei: „Die Punktgruppen, in denen sich drei, einen vierten doppelt berührende Kegelschnitte paarweise schneiden, gehören den Seitenpaaren eines vollständigen Vierecks an.“

11. Die Mittelpunkte M und M_1 zweier reciproken Felder η und η_1 sind die Centra zweier projectivischen Strahlenbüschel; jeder Strahl des einen entspricht dem unendlich fernen Punkte des homologen Strahls. Bringt man die Felder so in eine Ebene, dafs von den beiden entsprechenden rechten Winkeln dieser Büschel je zwei nicht homologe Schenkel, s und t_1, t und s_1, sich decken, so ordnen sich diese projectivischen Strahlenbüschel zu einer Involution conjugirter Durchmesser aa_1, bb_1, $cc_1, \cdots$ der beiden Felder zusammen. Jedem einzelnen Punkte wird nun, mag er in das erste oder das zweite Feld gehören, dieselbe Gerade zugeordnet. Gehört A dem Durchmesser a an, so enthält jeder der beiden zugeordneten

*) Diese Betrachtung giebt im wesentlichen A. Jacobi a. a. O. S. 317** (S. 105 ff.).

**) Göpel, Über Projectivität der Kegelschnitte als krummer Gebilde, Crelle's Journ., Bd. 36, 1848, S. 317—356.

Strahlen den auf a liegenden Wechselpunkt von A und den unendlich fernen Punkt des zu a conjugirten Durchmessers a_1. Ist der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ reell, so fällt er mit dem zugehörigen, K, zusammen, denn aus jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ erhält K zwei zusammenfallende Tangenten. Zu jedem Punkte von $\mathfrak{K}$ gehört mithin seine eigene Tangente, zu jeder Geraden ihr Pol nach $\mathfrak{K}$. Je zwei conjugirte Durchmesser der beiden reciproken Ebenen sind auch conjugirte Durchmesser von $\mathfrak{K}$. Nach diesen allgemeinen Entwickelungen erörtert Seydewitz den Zusammenhang unter den vier Polarsystemen, welche man aus zwei gegebenen reciproken Feldern η und η_1 auf die beschriebene Weise offenbar herstellen kann. Greift man eine der vier möglichen Lagen heraus, so kann man die anderen durch Umwendungen von η_1 um s und t und durch eine Drehung durch einen Winkel von 180^0 um M herbeiführen. Ergab sich bei der ersten Lage eine Ellipse als Ordnungscurve, so entstehen nach den Umwendungen die Hyperbeln, welche nach der Terminologie von Paulus [XXX, 17] die Endpunkte der uneigentlichen zur Haupt- und Nebenaxe parallelen Sehnen der Ellipse enthalten. Bei der Drehung gesellt sich hierzu die ganz imaginäre Ellipse, auf welche ich am angeführten Orte hinwies. Ganz leicht liefse sich nun die schon oben erwähnte Thatsache erweisen, dafs die vier Kegelschnitte durch das Polarsystem irgend eines von ihnen in sich transformirt werden. Entsprechende Entwickelungen für die Oberflächen zweiter Ordnung hat Magnus 1837 angestellt, wie unten [XXXII, 5] geschildert werden soll. Schon 1833 hatte er [Vergl. XXXI, 16] gezeigt, dafs zwei reciproke Felder η und η_1 zu einem Polarsystem sich vereinigen lassen, ohne den geometrischen Inhalt der Entwickelung voll auszuschöpfen.

Offenbar entspringt aus den letzten Entwickelungen von Seydewitz durch projectivische Verallgemeinerung das wichtige Theorem: „Zwei einer Ebene angehörende reciprok bezogene Felder vereinigen sich zu einem Polarsystem, wenn ein einzelnes Polardreieck nachgewiesen wird, dessen gegenüberliegende Stücke sich wechselseitig entsprechen.“ Im wesentlichen identisch mit dieser Regel ist der Satz, den Seydewitz an anderer Stelle*) ausspricht: „Zwei einer Ebene angehörige reciproke Felder sind involutorisch (bilden ein Polarsystem), wenn jedem von zwei Punkten eine ihn nicht enthaltende Gerade doppelt entspricht, oder drei Punkten, die nicht in einer Geraden liegen, Gerade, die sie enthalten, doppelt entsprechen.“ Die zweite Regel erweist sich sofort als eine Variante der ersten (S. 160).

12. Bei der Beziehung zweier einer Ebene angehörenden reciproken Felder kann, wie Seydewitz eingehend nachweist (S. 162), $\mathfrak{K}$ in

*) Seydewitz, Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde, Grunert's Arch., Bd. 9, 1847, S. 158—214.

zwei Punktreihen und K in zwei Strahlenbüschel zerfallen, deren gemeinschaftlicher Strahl den gemeinsamen Punkt der beiden Punktreihen enthält. Man erhält dann genau die von Poncelet [XXIV, 9] betrachtete specielle Beziehung. Die beiden Punktreihen können in eine einzige Gerade fallen; alsdann fallen auch die beiden Strahlenbüschel zusammen. Der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ kann sich ferner um einen Punkt zusammenziehen und schließlich mit K ganz imaginär werden. Ausdrücklich ausgeschlossen wird die Möglichkeit, daſs nur n Punkte ($n > 1$) in den entsprechenden Geraden liegen. Bei einem Polarsystem entsprechen entweder den Punkten eines eigentlichen Kegelschnittes $\mathfrak{K}$ die zugehörigen Tangenten, oder es liegt überhaupt kein Punkt in der zugehörigen Geraden. Zwei vorgelegte reciproke Felder η und η_1 gelangen in die Poncelet'sche Beziehung, wenn man eine Punktreihe von η_1 mit dem Träger p_1 in perspectivische Lage zu dem homologen Strahlenbüschel von η mit dem Centrum P bringt. Ordnet man den Strahlenbüschel in das Feld η_1, die Punktreihe in das Feld η ein, so sind zu ihnen in η und η_1 die zweite Punktreihe und der zweite Strahlenbüschel homolog. Ordnet man erst η und η_1 zum Polarsystem eines reellen Kegelschnitts zusammen und läſst dann η_1 eine halbe Umdrehung (durch 180°) um einen Punkt dieser Ordnungscurve machen, so besteht, wenn der Kegelschnitt eine Hyperbel war, $\mathfrak{K}$ jetzt aus zwei Parallelen zu ihren Asymptoten. War der Kegelschnitt eine Ellipse, so liegt jetzt allein der Drehpunkt in seinen zugehörigen Geraden; dieselben fallen natürlich zusammen. Liegen die Mittelpunkte von η und η_1 unendlich fern, so kann man sie, was nur flüchtig erörtert wird, zu dem Polarsystem einer Parabel vereinigen. Macht die Ebene von η_1 eine halbe Umdrehung um einen Punkt der Parabel, so besteht jetzt der Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ aus einer (doppelt zählenden) Geraden. Man kann aber auch zwei beliebige reciproke Felder η und η_1 in diese Lage bringen, wenn man sie zu dem Polarsystem einer Hyperbel [mit spitzem Asymptotenwinkel] vereinigt und alsdann η_1 um eine Tangente herumwendet, die zu einer Asymptote senkrecht steht.

13. Seydewitz erörtert nun analoge Fragen auch bei den anderen Gebilden zweiter Stufe im Raume. Die bezüglichen Resultate sollen hier sogleich angeführt werden, obgleich sie vorzugsweise mit Rücksicht auf spätere Anwendungen bei Oberflächen zweiter Ordnung entwickelt sind. Zwei collineare Punktfelder können, wie schon oben angegeben, auf unendlich viele Weisen in perspectivische Beziehung gebracht werden. Sobald man zwei homologe congruente Punktreihen ihrer Ebenen zur Deckung bringt, laufen die Verbindungslinien homologer Punkte an einer Stelle zusammen. Auch zwei collineare Strahlenbündel können in perspectivische Lage gebracht werden, bei der sich je zwei homologe Strahlen und Ebenen in Punkten und Geraden einer Hülfsebene treffen. Der Beweis geht (S. 168)

davon aus, dafs zwei collineare Strahlenbündel sicher zwei homologe, orthogonale Dreikante aufweisen. Errichtet man in den Centren zweier collinearen Strahlenbündel Lote a und a_1 auf zwei homologen Ebenen α und α_1, und ist a' der zu a_1 homologe Strahl des ersten Bündels, so entsprechen die Strahlen a und a' in einer collinearen Beziehung einander. Es kommt also wenigstens einmal vor, dafs a und a' in einem Strahle r sich vereinigen. Die homologen rechten Winkel st und $s_1 t_1$ der projectivischen Strahlenbüschel, welche die zu r und r_1 senkrechten und zueinander homologen Ebenen der Strahlenbündel enthalten, vervollständigen die gesuchten Trieder rst und $r_1 s_1 t_1$. Unter Umständen giebt es im ersten Strahlenbündel unendlich viele orthogonale Trieder mit einem gemeinsamen Strahle, denen orthogonale Trieder im zweiten Strahlenbündel entsprechen. Auch kann endlich jedes orthogonale Trieder in ein anderes übergeführt werden. Sind die beiden Strahlenbündel zu einer Ebene ε perspectivisch, so liegen zwei zueinander perspectivische Strahlenbüschel in der Ebene β, welche die Mittelpunkte der Strahlenbüschel enthält und zu ε senkrecht steht. Die homologen rechten Winkel st und $s_1 t_1$ dieser Büschel bilden zusammen mit den zu β senkrechten und augenscheinlich homologen Strahlen r, r_1 die beiden einander entsprechenden orthogonalen Trieder rst und $r_1 s_1 t_1$. Um gegebene collineare Strahlenbündel zu einer Ebene perspectivisch zu machen, hat man also zunächst homologe Ebenen ihrer Trieder rst und $r_1 s_1 t_1$, etwa st und $s_1 t_1$, in eine Hülfsebene β zu bringen und in der Verbindungslinie ihrer Scheitel zwei homologe Strahlen der diesen Ebenen angehörigen projectivischen Strahlenbüschel zu vereinigen. Alsdann liegen die Schnittlinien homologer Ebenen, welche von r und r_1 ausgehen, in einer zu β senkrechten Ebene ε. Schneiden sich in einer ε angehörigen Geraden noch irgend zwei homologe Ebenen der Bündel, welche durch ihre Schnittlinien r', t' bezw. r_1', t_1' mit den Ebenen st, rs bezw. $s_1 t_1$, $r_1 s_1$ gegeben seien, so sind die Bündel zu ε perspectivisch. Da in die Verbindungslinie der Scheitel O und O_1 zwei homologe Gerade der projectivischen Strahlenbüschel $r's t \cdots$ und $r_1' s_1 t_1 \cdots$ zu verlegen sind, so besteht für den Schnittpunkt S der Geraden s und s_1 die Gleichung:

$$\operatorname{tg} SOO_1 : \operatorname{tg} SO_1O = \operatorname{tg} r's : \operatorname{tg} r_1's_1 .$$

Ferner besteht, da t' und t_1' sich treffen müssen, die zweite Gleichung:

$$OS : O_1S = \cot st' : \cot s_1 t_1'.$$

Der O und O_1 harmonisch trennende Kreis von β, den die zweite Beziehung ergiebt, schneidet sich mit den beiden zu OO_1 senkrechten Geraden von β, welche die erste Beziehung darstellt, in vier reellen Punkten, wenn eine der beiden Beziehungen obwaltet:

$$1 > \cot st' : \cot s_1 t_1' > \operatorname{tg} r_1' s_1 : \operatorname{tg} r' s;$$
$$1 < \cot st' : \cot s_1 t_1' < \operatorname{tg} r_1' s_1 : \operatorname{tg} r' s.$$

Zwei dieser Punkte legen dann solche Lagen der Trieder rst und $r_1 s_1 t_1$ fest, bei denen die Strahlenbündel zu einer Ebene perspectivisch werden. Nur, wenn keine der Bedingungen erfüllt ist, kann durch Aufeinanderlegen der Triederflächen rs und $r_1 s_1$ oder der Flächen rt und $r_1 t_1$ — wobei jedoch die eine Möglichkeit die andere ausschliefst — das Ziel erreicht werden. Man sieht jetzt leicht, dafs zwei gegebene collineare Strahlenbündel zwei Paare projectivisch-congruenter Strahlenbüschel aufweisen. Die beiden ersten dieser Strahlenbüschel erzeugen, wenn die beiden Strahlenbündel in perspectivische Lage zu ε gebracht werden, die unendlich ferne Gerade dieser Ebene. Die von den beiden anderen Strahlenbüscheln erzeugte Gerade bestimmt an dem Mittelpunkte von OO_1 eine zu OO_1 senkrechte Ebene. Ferner sind sowohl die beiden Ebenenbüschel, deren Axen in die Gerade OO_1 hineinfallen, als auch diejenigen anderen, deren Axen zu ε symmetrisch werden, projectivisch-congruent aufeinander bezogen.

14. Wenn man zwei reciprok aufeinander bezogene Strahlenbündel mit einer Hülfsebene schneidet, so kann man die oben angedeuteten Gesetze über zwei einer Ebene angehörende reciproke Felder anwenden. Beispielsweise wird ein Kegel zweiten Grades, der auch in ein Paar reeller oder imaginärer Ebenen ausarten oder endlich imaginär werden kann, von den Strahlen ausgefüllt, welche zu den zugehörigen Ebenen parallel sind. Zwei reciproke Strahlenbündel weisen (S. 175) zwei homologe orthogonale Dreikante auf. Ist zu einer Ebene α des ersten Bündels der zweite der beiden Strahlen a und a' desselben senkrecht, und entsprechen den Elementen a und α im zweiten Bündel eine Ebene und ihr Lot, so sind a und a' homologe Strahlen zweier collinearen Bündel, welche das Dreikant des ersten Bündels miteinander gemein haben. Werden die beiden reciproken Strahlenbündel so aufeinander gelegt, dafs homologe Kanten der beiden Dreikante sich decken, so sind sie nunmehr durch das Polarsystem eines reellen oder imaginären Kegels einander zugeordnet. Bei drei der vier überhaupt möglichen Anordnungen ist der Kegel reell. Seydewitz schliefst seine Entwickelungen mit dem Nachweise der „Brennebenen" (cyklischen Ebenen) und „Brennstrahlen" (Focalstrahlen) im Polarsystem des Kegels ab. Diese Gebilde werden hier allgemein als Gebilde aufgefafst, welche eine circulare Involution conjugirter Strahlen oder Ebenen zum Polarsystem beitragen. Ihre Festlegung stützt sich auf metrische Relationen.

Leichter hätten sich Brenn-Ebenen und -Strahlen natürlich als Träger der Involutionen conjugirter Strahlen und Ebenen ergeben, welche der gegebene und ein concentrischer, den unendlich

fernen Kugelkreis projicirender Kegel miteinander gemein haben. Entwickelungen dieser Art hatte Poncelet ja bereits zur Aufsuchung der Kreisschnitte einer Oberfläche F_2 benutzt [XIX, 5]. Bei der Aufgabe über collineare Bündel würde man umgekehrt zunächst diejenigen Ebenenpaare und Strahlenpaare aufsuchen, welche projectivisch-congruente Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel zu der collinearen Beziehung beitragen. Die betreffenden Ebenen und Strahlen des ersten Bündels tragen die gemeinsamen Involutionen conjugirter Strahlen und Ebenen zweier Polarsysteme, von denen das erste eine unendlich kleine Kugel darstellt, das zweite in ein solches durch die collineare Beziehung übergeführt wird. Die Herbeiführung der perspectivischen Lage ist dann nach der obigen Entwickelung leicht.

15. Die soeben geschilderten Resultate waren zum Teil bereits auf rechnendem Wege entwickelt worden. Zunächst ist ein Abschnitt des schon oben [XXII, 8] erwähnten Buches von Magnus in Betracht zu ziehen*), in welchem die Behandlung der collinearen Beziehung von dem Gleichungspaar

$$u = \frac{m'y + n'x + p'}{my + nx + 1}, \quad t = \frac{m''y + n''x + p''}{my + nx + 1}$$

ausgeht. Hierbei wird zunächst der Satz von Möbius [XXIII, 13] abgeleitet, daſs vier von einem Punkte der (x, y)-Ebene ausgehende Strahlen oder vier in einer Geraden liegende Punkte derselben das gleiche Doppelverhältnis zeigen, wie die homologen Elemente der (t, u)-Ebene. Indem man zuerst eine Parallelverschiebung der beiden (von jetzt ab rechtwinkligen) Coordinatensysteme, sodann eine Drehung des zweiten vornimmt, kann man die Gleichungen durch die einfacheren

$$u = \frac{py}{my + nx + 1}, \quad t = \frac{px}{my + nx + 1}$$

ersetzen. Bringt man die positiven Richtungen des einen Coordinatenkreuzes entweder mit den positiven oder mit den negativen Richtungen des anderen zur Deckung, so tritt jedesmal die „collineare" Lage der beiden Ebenen ein. Verbindungslinien homologer Punkte enthalten den nunmehr gemeinsamen Anfangspunkt der Coordinaten, den „Collineationspunkt"; entsprechende Gerade schneiden sich auf einer „Collineationsaxe", welche im ersten Falle die Gleichung besitzt:

$$my + nx + 1 - p = 0.$$

Zu ihr parallel werden die „Gegenaxen" (Fluchtlinien) der beiden Ebenen:

$$my + nx + 1 = 0; \quad mu + nt - p = 0.$$

*) Von der Verwandtschaft der Collineation, S. 31—60.

Der Collineationspunkt hat in beiden Fällen von der einen Gegenaxe dieselbe Entfernung, wie die Collineationsaxe von der anderen. Der Schluſs, den Magnus (S. 44) zieht, daſs zwei collineare Ebenen genau auf zwei Weisen in perspectivische (collineare) Lage gebracht werden können, setzte, wie schon bemerkt [S. 323*], voraus, daſs beide Felder von Anfang an einer Ebene angehören und nur durch Verschiebungen in derselben in die perspectivische Lage übergehen sollen. Läſst man diese Voraussetzung fallen, so gelangt man zu einem zweiten Paare von Punkten, die sich zu einem Collineationspunkte vereinigen lassen, wenn man durch Parallelverschiebung beider Coordinatensysteme und Drehung des einen die definirenden Gleichungen auf die Form bringt

$$u = \frac{p_1 y}{m_1 y + n_1 x + 1}, \quad t = \frac{-p_1 x}{m_1 y + n_1 x + 1}.$$

Die collineare Lage tritt ein, wenn man die Coordinatenkreuze übereinander legt, so zwar, daſs bei zwei zusammengehörigen Axen die positiven Richtungen sich decken, bei den beiden anderen nicht. Augenscheinlich führt auch Magnus' oben angegebene Regel zur Construction der Collineationspunkte auf zwei Punkte in jeder Ebene. Nach kurzen Bemerkungen über die affine Beziehung, zu deren Untersuchung die Gleichungen

$$u = m'y + n'x + p', \quad t = m''y + n''x + p''$$

dienen, wendet sich Magnus der specielleren Verwandtschaft der Ähnlichkeit zu, welche bei Anwendung beliebiger rechtwinkligen Coordinatensysteme durch die Gleichungen

$$u = m'y + n'x + p', \quad t = \pm n'y \mp m'x + p''$$

ausgedrückt wird. Das Verhältnis zwischen entsprechenden Strecken der (t, u)- und der (x, y)-Ebene ist

$$q = \sqrt{m'^2 + n'^2}.$$

Die Gleichungen

$$u = y, \quad t = x$$

führen auf zwei lineare Gleichungen für y und x, welche „im allgemeinen immer" durch zwei bestimmte Werte von y und x befriedigt werden. Indem man die Gleichungen auf dasselbe Coordinatensystem bezieht, erkennt man auf diese Weise, daſs aufeinander liegende ähnliche Systeme einen „Situationspunkt" miteinander gemein haben. Gelten die unteren Zeichen, so können die beiden Ebenen durch bloſse Drehung um den Situationspunkt in „ähnliche" (perspectivische) Lage gebracht werden. Falls die oberen Zeichen gelten, ist dies erst nach Umwendung des einen Feldes um eine beliebige

Gerade der beide Felder tragenden Ebene möglich.*) Die congruente Beziehung ($q = 1$) stellt Magnus durch die Gleichungen

$$u = y\cos\beta + x\sin\beta + p', \quad t = \mp y\sin\beta \pm x\cos\beta + p''$$

dar. Wenn die oberen Zeichen gelten, haben die beiden, jetzt auf dasselbe Coordinatensystem bezogenen Felder den Punkt

$$y = \frac{p' \sin\frac{1}{2}\beta + p'' \cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}, \quad x = \frac{p'' \sin\frac{1}{2}\beta - p' \cos\frac{1}{2}\beta}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$$

miteinander gemein. Dieser Situationspunkt rückt nur dann ins Unendliche hinaus ($\sin\frac{1}{2}\beta = 0$), wenn die Felder durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. In jedem anderen Falle können die Felder durch bloſse Drehung ineinander übergeführt werden. Gelten die unteren Zeichen, so haben die beiden Felder entweder überhaupt keinen Punkt miteinander gemein oder alle Punkte einer Geraden. Durch Umwendung um diese Gerade können sie dann ineinander übergeführt werden.

16. Bei der Behandlung der reciproken Beziehung geht Magnus in dem folgenden Abschnitte seines Buches**) von der bilinearen Gleichung

$$(ay + bx + c)u + (a'y + b'x + c')t + a''y + b''x + 1 = 0$$

---

*) Bei dem Satze über den Situationspunkt für ähnliche Figuren in einer Ebene [XXII, 4] scheint Chasles, wie aus einer Stelle im Aperçu (S. 549) hervorgeht, zunächst nur an gleichstimmige Figuren gedacht zu haben. Dasselbe ist ohne Zweifel bei der oben [S. 189**] erwähnten Überlegung von Euler der Fall. Liegen nämlich auf zwei in P sich schneidenden Geraden die homologen Strecken AB und A_1B_1 der ähnlichen Figuren, so ist der Drehpunkt (Centrum similitudinis) O bei Euler der zweite Schnittpunkt der Kreise AA_1P und BB_1P. Ist $E'E''$ der zu AA_1 senkrechte Durchmesser des ersten Kreises, und ist E_0' der innere der beiden Punkte E_0', E_0'', welche AA_1 in dem Verhältnis $AB : A_1B_1$ teilen, so geht, wie Euler zeigt, eine der beiden Geraden $E_0'E'$ und $E_0'E''$ durch den Punkt O hindurch. Wenn nun F', F'' und F_0', F_0'' zu B, B_1 dieselbe Beziehung besitzen, wie E', E'' und E_0', E_0' zu A, A_1, so schneidet sich in dem Drehpunkte O eine bestimmte der Geraden $E_0'E'$ und $E_0'E''$ mit einer bestimmten der Geraden $F_0'F'$ und $F_0'F''$. Man hat so offenbar eine directe Verallgemeinerung der Euler-Chasles'schen Construction [XXII, 5] für den Drehpunkt gleichstimmig congruenter Figuren vor sich. Die beiden Kreise über den Durchmessern $E_0'E_0''$ und $F_0'F_0''$ schneiden sich nun in zwei reellen Punkten, von denen der eine mit dem bezeichneten Drehpunkte O zusammenfällt, während den anderen Schnittpunkt O_1 die ungleichstimmig ähnlichen Figuren entsprechend miteinander gemein haben, welche durch die homologen Strecken AB und A_1B_1 festgelegt werden. Man könnte übrigens O_1 als letzten Schnittpunkt zweier gleichseitigen Hyperbeln darstellen, welche den Dreiecken PAB und PA_1B_1 umschrieben sind, und deren Asymptoten zu den Halbirungslinien der Winkel parallel sind, welche AB und A_1B_1 bestimmen.

**) Von der Reciprocität, S. 60—71.

aus, welche die Coordinaten eines Punktes der (x, y)-Ebene und eines Punktes der entsprechenden Geraden der (t, u)-Ebene verknüpft; die beiden Coordinatenaxen sind dabei in jeder Ebene beliebig. Zunächst werden die Mittelpunkte der Ebenen durch die Gleichungspaare

$$ay + bx + c = 0, \quad a'y + b'x + c' = 0;$$
$$au + a't + a'' = 0, \quad bu + b't + b'' = 0$$

eingeführt. Nur gleichzeitig, wenn $ab' - a'b$ verschwindet, können sich die beiden Mittelpunkte ins Unendliche entfernen. Von den Mittelpunkten gehen unendlich viele Paare conjugirter Durchmesser aus. Wird ein Punkt über einen Durchmesser des einen Systems geführt, so bewegt sich die zugehörige Gerade parallel zu dem conjugirten Durchmesser. Die definirende Gleichung enthält acht Coefficienten; man kann daher ebenso viele Bedingungsgleichungen erfüllen, also etwa die Geraden beliebig fixiren, die vier Punkten des ersten Systems entsprechen. Die Erhaltung des Doppelverhältnisses bei der reciproken Beziehung wird erörtert. Wenn die Coordinatenkreuze, auf welche sich die definirende Gleichung bezieht, zusammenfallen, so gehören demselben Punkte (p, q), je nachdem man ihn zu der einen oder anderen Ebene rechnet, zwei voneinander verschiedene Gerade

$$(aq + bp + c)\, u + (a'q + b'p + c')\, t + a''q + b''p + 1 = 0,$$
$$(aq + a'p + a'')\, y + (bq + b'p + b'')\, x + cq + c'p + 1 = 0$$

zu. Dieselben fallen nur dann zusammen, wenn die definirende Gleichung die speciellere Form

$$(Ay + Bx + D)\, u + (By + Cx + E)\, t + Dy + Ex + F = 0$$

besitzt. Auf diese Form kann man die allgemeinere Form zurückführen, wenn man das eine der beiden — rechtwinkligen — Coordinatensysteme festhält, das andere einer geeigneten Transformation unterwirft. Verschiebt man die letztere Ebene so lange, bis sich ihr neues Axenkreuz mit dem der ersten Ebene deckt, so entspricht nunmehr einem Punkte, mag er der ersten oder der zweiten Ebene angehören, dieselbe Gerade. Die Mittelpunkte beider Systeme fallen alsdann übereinander.

17. Im Anschlufs an den (S. 224) neu bewiesenen Satz Poncelet's von den Punktepaaren, die in Bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels conjugirt sind, wendet sich Magnus (S. 230) nochmals der oben [XXII, 8] besprochenen Darstellung einer quadratischen Verwandtschaft mittels zweier bilinearen Gleichungen unter den Coordinaten y, x und u, t zweier zusammengehörigen Punkte zu. Nach Entwickelung der oben angeführten Resultate seiner früheren Arbeit specialisirt Magnus die beiden bilinearen Gleichungen in folgender Weise:

$$myu + nxt + 1 = 0, \quad xu - yt = 0,$$

so dafs den Geraden

$$u = gt + h$$

unter sich ähnliche und ähnlich liegende Kegelschnitte

$$my^2 + nx^2 + \frac{1}{h}y - \frac{g}{h}x = 0,$$

die einen Punkt miteinander gemein haben, entsprechen. Der Fall der Kreisverwandtschaft, bei der die Gleichungen die Form

$$yu + xt + 1 = 0, \quad xu - yt = 0$$

annehmen, wird besonders hervorgehoben (S. 236) und an Beispielen erläutert. Auch der Fall, in dem y und x gebrochene lineare Functionen von u und t sind, der sich zunächst (S. 229) aus der collinearen Beziehung durch naturgemäfse Verallgemeinerung ergiebt, wird auf die oben [XXII, 8] angedeutete Art der allgemeineren Beziehung untergeordnet.

18. Ich mufs hier noch sehr ausführliche Entwickelungen Plücker's*) schildern. Vor allem werden die trimetrischen Coordinaten des Punktes und der Geraden in sehr umfassender Weise behandelt. Hat man sich zunächst der cartesischen Coordinaten x, y bedient, so kann man die Lage eines Punktes auch aus den Werten ermitteln, welche zwei beliebige Functionen von x, y bei Einsetzung seiner ursprünglichen Coordinaten annehmen. Indem man gebrochene rationale Functionen mit gleichem Nenner in Betracht zieht, gelangt man dazu, als Coordinaten eines Punktes die Verhältnisse der Werte anzusehen, welche drei ganze Functionen gleichen Grades von x, y bei Einführung der Coordinaten des Punktes annehmen. Mit Hülfe der drei Curven, für deren Punkte je eine der drei Coordinaten verschwindet, kann man den neuen Coordinaten eine geometrische Deutung geben. Da es wünschenswert ist, für die Gerade eine lineare Gleichung zu erhalten, so wählt man vorteilhaft als homogene Coordinaten des Punktes die Werte, welche drei ganze lineare Functionen von x, y bei Einsetzung seiner Coordinaten annehmen, anders ausgedrückt, die Entfernungen des Punktes von drei festen Geraden, multiplicirt mit festen Constanten.**)

*) Plücker, System der analytischen Geometrie, auf neue Betrachtungsweisen gegründet, und insbesondere eine ausführliche Theorie der Curven dritter Ordnung enthaltend, Berlin 1835 (Erster Abschnitt, Über allgemeine Coordinaten-Bestimmung, S. 1—83).

) Betrachtet man als Coordinaten eines Punktes seine Entfernungen von drei Geraden, so ist dies Coordinaten-System, wie Plücker in einer Fufsnote (zu S. 7) anführt, „mit dem barycentrischen Calcül des Herrn Möbius, dem Wesen nach, ganz dasselbe". In seiner früheren Abhandlung [S. 200] habe er dies wegen der grofsen Verschiedenheit der Algorithmen nicht erkannt.

Als Coordinaten einer geraden Linie sieht Plücker zunächst die Coefficienten w und v an, welche in die Gleichungsform

$$y + vx + w = 0$$

eingehen, wobei natürlich y und x cartesische Coordinaten bedeuten. Allgemeiner können als Liniencoordinaten die Gröfsen

$$\vartheta = \varphi(w, v), \quad \zeta = \psi(w, v)$$

betrachtet werden; da aus ϑ und ζ rückwärts w und v berechnet werden können, so ist eine Gerade auch durch Angabe der ihr zukommenden Werte von ϑ und ζ charakterisirt. Besondere Beachtung verdienen die Coordinatensysteme, bei welchen — wie in dem System der w, v — die Gleichung eines Punktes vom ersten Grade ist. Von irgend einem derartigen Coordinatensystem — der m, n — gelangt man zu dem allgemeinsten mit Hülfe der Formeln

$$\vartheta = \frac{u}{t}, \quad \zeta = \frac{v}{t},$$

wobei t, u, v drei voneinander unabhängige ganze lineare Functionen von m und n sind. Die Coordinaten t, u, v einer Geraden unterscheiden sich hiernach um unbestimmte Coefficienten von den Strecken, welche sie auf drei von den Punkten $t = 0$, $u = 0$, $v = 0$ ausgehenden Geraden einer bestimmten Richtung abschneidet (S. 33). An diese ersten Entwickelungen knüpft nun Plücker sehr ausführliche Erörterungen, von denen besonders die ausdrückliche Behandlung der imaginären Coordinaten Beachtung verdient.

19. Sind jetzt irgend zwei Coordinatensysteme gegeben, so stellen zwei verknüpfende Gleichungen, je nachdem man es mit Punkt- oder Liniencoordinaten zu thun hat, eine Beziehung zwischen zwei Punkt- oder Strahlenfeldern dar. Plücker specialisirt für den Fall zweier Punktfelder diesen Gedanken (S. 48 ff.) in folgender Weise: „Als zugehörig gelten zwei Punkte, wenn sie, der eine in einem ursprünglichen, der andere in einem abgeleiteten Coordinatensystem, gleiche Coordinaten ergeben." Wenn man z. B. von cartesischen Coordinaten zu einem neuen System von Punktcoordinaten mit Hülfe der Gleichungen

$$\eta = \psi(x, y), \quad \xi = \varphi(x, y)$$

übergeht, so entsprechen die Punkte

$$x = a,\ y = b \quad \text{und} \quad x = a_1,\ y = b_1$$

einander, wenn die Gleichungen bestehen:

$$b = \psi(a_1, b_1), \quad a = \varphi(a_1, b_1).$$

In analoger Weise kann man ein Punktfeld auf ein Strahlenfeld und zwei Strahlenfelder aufeinander beziehen. Soll jedem Punkte x, y nur ein Punkt ξ, η entsprechen, so müssen die vermittelnden Functionen φ und ψ rational sein; stellt man die Bedingung, dafs

umgekehrt jedem Punkte ξ, η ein Punkt x, y entspricht, so erhält man (S. 50) „nach der allgemeinsten Bestimmung der Functionen φ und ψ:

$$\eta = \mu \cdot \frac{y + a\ \ x + b}{y + a''x + b''}, \quad \xi = \nu \cdot \frac{y + a'\ \ x + b'}{y + a'''x + b'''}.“$$

Hiernach scheint Plücker diese quadratische Verwandtschaft für die allgemeinste eindeutige Beziehung zwischen zwei Punktfeldern gehalten zu haben, eine Grenze, über die sich bereits Steiner mit der oben [XXVII, 12] angeführten originellen Äufserung erhoben hat.*) Ähnliche Gleichungspaare ermöglichen es, die eindeutige Beziehung eines Punktfeldes auf ein Strahlenfeld, sowie zweier Strahlenfelder aufeinander einzuleiten. Die besonderen Gleichungen

$$\eta = \mu \cdot \frac{y + ax + b}{y + a''x + b''}, \quad \xi = \nu \cdot \frac{y + a'x + b'}{y + a''x + b''}$$

stellen, je nachdem ξ, η Punkt- oder Liniencoordinaten sind, eine collineare oder eine reciproke Beziehung dar. Zunächst wird unter ausdrücklichem Hinweis auf Möbius die Erhaltung des Doppelverhältnisses bei collinearer oder reciproker Umformung behandelt. Hierauf wendet sich Plücker zu dem Problem von Magnus, collineare Ebenen in perspectivische Lage zu bringen. Plücker geht sodann zu zwei Systemen trimetrischer Coordinaten über, stellt die collineare Beziehung durch das Gleichungssystem dar:

$$p : q : r = p' : q' : r',$$

bei Anwendung der Bezeichnungen:

$$q' = aq + bp + cr, \quad p' = a'q + b'p + c'r, \quad r' = a''q + b''p + c''r.$$

Aus der Forderung, dafs die Gleichungen entsprechender Geraden

$$q + Ap + Br = 0, \quad q' + Ap' + Br' = 0$$

nach Ersetzung der p', q', r' durch die p, q, r identisch werden, entspringt eine Gleichung dritten Grades für A. Zwei collineare Felder, welche in einer Ebene liegen, haben also entweder drei „Situationspunkte“ und „Situationsgeraden“ miteinander gemein, welche Bestimmungsstücke eines Dreiecks sind, oder einen Situationspunkt und eine Situationsgerade (S. 56).

Nach Erörterung der Affinität, Ähnlichkeit und Congruenz zieht Plücker hieraus das wichtige Resultat: Liegen zwei reciprok bezogene Ebenen aufeinander, so entsprechen einem Punkte, wenn man ihn erst in die eine, dann in die andere Ebene rechnet, im allgemeinen zwei voneinander verschiedene Gerade. Nur für drei specielle Punkte fallen diese beiden Geraden, die ja collineare Ebenen beschreiben, zusammen (S. 75). Die Beziehung zwischen zwei reciproken Ebenen kann einmal durch zwei Gleichungen ausgedrückt

*) Plücker weist hier auf die oben [XXIII, 4] erwähnte Bemerkung von 1829 hin und nennt auch Magnus und Steiner.

werden, mittels deren man aus den Coordinaten eines Punktes die der homologen Geraden erhält, oder durch eine bilineare Gleichung, welche die Coordinaten eines Punktes der einen Ebene mit denen eines beliebigen Punktes der homologen Geraden verknüpft. Diese Gleichung nimmt Plücker (S. 78) in der Form

$$\eta\eta' + \xi\xi' = 1$$

an, wobei η, ξ und η', ξ' Punktcoordinaten zweier verschiedenen Systeme bedeuten.*) Beziehen sich bei zwei reciproken Feldern einer Ebene η, ξ und η', ξ' auf denselben Punkt, so stellt die Gleichung einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}$ dar. Jeder Punkt desselben sendet zwei Gerade aus, die ihm, je nachdem er in die erste oder zweite Ebene gerechnet wird, entsprechen und einen zweiten Kegelschnitt K berühren. Einer Tangente von K entspricht ebenso in den beiden Feldern der eine oder andere ihrer beiden Schnittpunkte mit $\mathfrak{K}$. Für jeden $\mathfrak{K}$ und K gemeinsamen Punkt fallen die beiden entsprechenden Geraden in die Tangente von K, welche aber, da die beiden zu ihr homologen Punkte zusammenfallen, auch eine Tangente von $\mathfrak{K}$ sein mufs. Somit berühren sich $\mathfrak{K}$ und K in zwei Punkten. Aufser diesen beiden Berührungspunkten hat noch ein dritter Punkt, der Schnittpunkt ihrer Tangenten, in beiden Feldern dieselbe reciproke Gerade. Zu der Seydewitz'schen Lösung der Aufgabe, aus zwei gegebenen reciprok bezogenen Feldern ein Polarsystem zusammenzusetzen, war der erste Schritt, nach welchem die Mittelpunkte zur Deckung kommen müssen, bereits von Magnus gethan worden. Plücker fügt die zweite Bedingung hinzu, dafs durch eine Drehung um den Mittelpunkt zwei homologe Durchmesser zum wechselseitigen Entsprechen gebracht werden müssen, und giebt sodann noch eine zweite Erörterung des Problems, welche für den Fall concentrischer Kreise $\mathfrak{K}$ und K besonders anschaulich wird.

Sind also die von Seydewitz gegebenen Resultate zum grofsen Teile zuerst auf rechnendem Wege gefunden, so bleibt ihm das unbestreitbare Verdienst, die Entwickelungen gewissermafsen für die synthetische Geometrie erobert zu haben.

XXXII. Beziehungen zwischen Grundgebilden dritter Stufe.

1. Die Möglichkeit, zwischen zwei räumlichen Figuren eine eindeutige Beziehung einzuleiten, war bislang bei weitem nicht in dem Umfange näher untersucht worden, wie das analoge Problem der Ebene. Was die collineare Beziehung zweier Räume anbelangt, so gehörte ja die grundlegende Bemerkung von Möbius [XXIII, 13], welche eine durch fünf Paare homologer Punkte gegebene collineare Beziehung zu

*) Plücker verweist hier auf den zweiten Band seiner analytisch-geometrischen Entwicklungen [S. 169**].

construiren gestattete, im Grunde bereits der synthetischen Geometrie an. Sind die zu A, B, C, D, E homologen Punkte A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 bekannt, und liegen keine vier Punkte der einen oder anderen Gruppe in einer Ebene, so wird der zu F homologe Punkt F_1 — so lautet Möbius' Regel — mit Hülfe der Doppelverhältnis-Gleichungen

$$BC(ADEF) = B_1C_1(A_1D_1E_1F_1),$$
$$CA(BDEF) = C_1A_1(B_1D_1E_1F_1),$$
$$AB(CDEF) = A_1B_1(C_1D_1E_1F_1)$$

construirt. Um durch rein geometrische Betrachtungen die collineare Beziehung zwischen zwei Räumen aufzubauen, hat man sich entweder dreier Paare projectivischer Ebenenbüschel zu bedienen, welche ein Paar homologer Ebenen gemein haben, oder auch dreier Paare projectivischer Punktreihen, welche ein Paar homologer Punkte gemein haben. Drei aus den Ebenenbüscheln des ersten Raumes beliebig herausgegriffene Ebenen und die homologen Ebenen des zweiten Raumes bestimmen im ersten Falle zwei homologe Punkte. Man hat dann zu erweisen, dafs den Gebilden erster und zweiter Stufe eines jeden Raumes projectivische und collineare Gebilde erster und zweiter Stufe entsprechen. Ganz analoges gilt für die zweite Art der Zuordnung, welche indes von den Paaren homologer Ebenen ausgeht. Wird endlich durch jede von drei projectivischen Beziehungen zwischen je einer Punktreihe und je einem Ebenenbüschel einem bestimmten Punkte dieselbe Ebene zugeordnet, so kann man mit ihrer Hülfe eine reciproke Beziehung im Raume herstellen. Betrachtungen dieser Art, die aber auf etwas anderer Grundlage beruhen als die analogen Entwickelungen von Seydewitz für die Ebene, hat Staudt angestellt, wie im zweiten Bande dieses Berichtes ausführlich zu erörtern sein wird. Zwar hat Chasles die Regel von Möbius nochmals begründet und die beiden analogen Regeln hinzugefügt; seine unten [XXXII, 14] geschilderten Entwickelungen stehen aber durchaus auf dem Boden der analytischen Geometrie.

Von der collinearen und der reciproken Beziehung kann man zu Verwandtschaften dritter Ordnung aufsteigen, wenn man drei Paare von projectivischen Gebilden in Betracht zieht, jedoch die Beschränkung fallen läfst, dafs ein Paar homologer Elemente allen drei Projectivitäten gemeinsam ist. Steiner scheint nach einer oben [XXVII, 15] erwähnten Andeutung diesen Gedankengang bereits ins Auge gefafst zu haben.

2. Die bisher berührten Fragen wurden in der jetzt zu betrachtenden Epoche nur mit den Methoden der analytischen Geometrie behandelt. Derartige Entwickelungen hat zunächst Magnus 1837 gegeben. Eine collineare Beziehung*) zwischen zwei Räumen —

*) Von der Verwandtschaft der Collineation (a. a. O. S. 168***, S. 72—119).

dem (x, y, z)- und dem (x', y', z')-Raume — stellen die Gleichungen

$$x' = \frac{p}{t}, \quad y' = \frac{q}{t}, \quad z' = \frac{r}{t}$$

dar, in denen p, q, r, t ganze lineare Functionen von x, y, z sind, und $t = 0$ die „Gegenebene" (Fluchtebene) des (x, y, z)-Raumes kennzeichnet. Die Darstellung weist 15 Constante auf, welche man durch Annahme von fünf Paaren homologer Punkte fixiren kann. Im Anschlufs an Möbius' Entwickelungen weist Magnus nach, dafs sowohl bei zwei entsprechenden Punktreihen als auch bei zwei entsprechenden Ebenenbüscheln homologe Quadrupel gleiches Doppelverhältnis aufweisen. Eine zur Fluchtebene $t = 0$ parallele Ebene des (x, y, z)-Raumes ist im allgemeinen affin auf die entsprechende Ebene des anderen Raumes bezogen, welche zur Fluchtebene dieses Raumes parallel ist. Nur wenn diese Ebenen ähnlich bezogen sind, können (S. 81) die beiden Räume in „centrisch-collineare Lage" — nämlich in Homologie-Beziehung [XIX, 1] — gebracht werden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte enthalten nun ein „Collineationscentrum", entsprechende Gerade schneiden sich auf einer „Collineationsebene". Die definirenden Gleichungen gehen, wenn man das Centrum zum Anfangspunkt des gemeinsamen Coordinatensystems macht, in die Form

$$x' = \frac{kx}{t}, \quad y' = \frac{ky}{t}, \quad z' = \frac{kz}{t}, \quad t \equiv nz + my + lx + 1$$

über. Die Collineationsebene hat die Gleichung

$$t - k = nz + my + lx + 1 - k = 0.$$

Magnus bemerkt noch, dafs der Collineationspunkt der Collineationsebene angehören kann $(k = 1)$, dafs ferner je zwei homologe Elemente einander wechselseitig entsprechen können $(k = -1)$. Von zwei centrisch-collinearen Systemen im Raume ist das eine diejenige Abbildung des anderen, „welche in der Sculptur Relief genannt wird", wie sich Magnus in einer Fufsnote (zu S. 84) ausdrückt. Anger's analytische Darstellung der Beziehung zwischen einem Object und seinem Relief entspricht in der That genau den Formeln von Magnus. Seine Formeln bringt er 1836 auf die einfache Form

$$x' = \frac{ax}{b+x}, \quad y' = \frac{ay}{b+x}, \quad z' = \frac{az}{b+x}.\text{*)}$$

*) Vergl. die oben [S. 155†††] genannte Schrift. Die ebendort erwähnte Schrift aus dem Jahre 1834 giebt verwandte, aber weniger übersichtliche Formeln. Eine unmittelbare Folge der Formeln ist der Satz: „Eine Gerade l_1 des Reliefs ist bestimmt als Verbindungslinie ihres Spurpunktes und ihres Fluchtpunktes, in welchen die zugehörige Raumgerade und ein durch das Auge zu ihr parallel gezogener Strahl die Collineationsebene und die

3. Indem bei der allgemeinen Darstellung der collinearen Beziehung die Function t in eine Constante übergeht, gelangt **Magnus** zu der affinen Beziehung. Für die Coordinaten eines Situationspunktes, der mit seinem homologen Punkte zusammenfällt, ergeben sich aus den Definitionsgleichungen drei lineare Gleichungen, denen im allgemeinen ein Punkt genügt. Die Bestimmung der sich selbst entsprechenden Geraden hängt von einer Gleichung dritten Grades ab. Man gelangt also zu einem Dreikant, dessen sämtliche Kanten und Flächen sich selbst entsprechen, dessen Spitze der Situationspunkt ist. Entweder sind zwei gegenüberliegende Stücke desselben, eine „Situationsgerade" und ihre zugehörige „Situationsebene", oder alle sechs Bestimmungsstücke, die drei Situationsgeraden und ihre zugehörigen Situationsebenen reell. Bei der Behandlung ähnlicher Systeme geht **Magnus** (S. 89 ff.) von den Gleichungen

$$x' = p_1 x + p_2 y + p_3 z + x_0',$$
$$y' = q_1 x + q_2 y + q_3 z + y_0',$$
$$z' = r_1 x + r_2 y + r_3 z + z_0';$$
$$p_\lambda^2 + q_\lambda^2 + r_\lambda^2 = k^2, \quad p_\lambda p_\mu + q_\lambda q_\mu + r_\lambda r_\mu = 0; \quad (\lambda, \mu = 1, 2, 3)$$
$$\sum \pm p_1 q_2 r_3 = k^3$$

aus. Jenachdem der Wert der letzteren Determinante positiv oder negativ ist, liegen „vollkommen" oder „symmetrisch" ähnliche Systeme vor. Für den Situationspunkt ergeben sich drei lineare Gleichungen, welche durch die Coordinaten genau eines Punktes befriedigt werden, wenn nicht $k^2 = 1$ ist. Der Beweis schliefst sich an eine von **Jacobi***) 1836 veröffentlichte Abhandlung an.

Fluchtebene des Reliefs schneiden. Dieser Satz wird von **Breysig** in der oben [XIX, 1] genannten Schrift empirisch aus dem bekannten Gesetze für das perspectivische Zeichnen abgeleitet und dann bei der Construction des Reliefs auf die zur Spurebene senkrechten Geraden des Objectes angewendet. **Anger** hebt das Verdienst **Breysig's** in den erwähnten Abhandlungen mit Wärme hervor. Die letzte auf S. 155††† genannte Arbeit wendet sich hauptsächlich gegen die erwähnte Äufserung von **Poncelet**.

*) **Jacobi**, Observationes geometricae, Crelle's Journ., Bd. 15, 1836, S. 309—312 (Ges. W., Bd. 7, S. 20—23). In der oben [S. 189**] erwähnten Abhandlung führt **Euler** auch für ähnliche Körper das Ähnlichkeitscentrum ein. Er stellt (§ 11) drei Gleichungen für seine Coordinaten auf, die er jedoch als zu complicirt für die wirkliche Berechnung bezeichnet. Bei einer geometrischen Entwickelung legt er (§ 12) die irrige Annahme zu Grunde, dafs jede Ebene, welche den Ähnlichkeitspunkt und zwei homologe Punkte enthält, die beiden Körper in zwei ähnlichen Figuren trifft. **Jacobi** schreibt **Euler** den Satz zu, dafs ähnliche Körper eine vom Ähnlichkeitspunkt ausgehende Gerade und eine zu ihr senkrechte Ebene mit einander gemein haben. Vermutlich nimmt **Jacobi** mit dieser Äufserung auf § 7 der Abhandlung Bezug. **Euler** giebt dort den Satz: „Verhalten sich die Abstände homologer Punkte zweier ähnlichen Körper von einer Ebene α wie die homologen Strecken derselben, so fällt der

4. Zwei beliebige ähnliche Systeme besitzen nun entweder erstens nur eine Situationsebene und eine zu ihr senkrechte Situationsaxe, oder zweitens unendlich viele Situationsebenen, welche zu einer ausgezeichneten Situationsebene senkrecht stehen, sodafs die gemeinsame Schnittlinie der ersteren Ebenen und die Strahlen der zweiten Ebene Situationsgeraden sind; es können endlich drittens beide Systeme centrisch-ähnlich, das heifst central-perspectivisch liegen. Die Verbindungslinie irgend zweier homologen Punkte P_1, P_2 wird durch den Ähnlichkeitspunkt O nach der Regel

$$\frac{OP_1}{OP_2} = k$$

geteilt und ist eine Situationsgerade. In diese dritte Lage zu dem ersten System kann das zweite System in den beiden ersten Fällen durch eine einfache Drehung übergeführt werden. Dieselbe erfolgt im ersten Falle um die einzige, im zweiten Falle — durch einen Winkel von 180° — um die ausgezeichnete Situationsgerade.*) Auch sym-

---

Ähnlichkeitspunkt der beiden Körper mit dem der ähnlichen Figuren zusammen, welche die Fufspunkte dieser Lote bilden." Die Ebene α haben offenbar beide Körper entsprechend miteinander gemein. Ist k das lineare Ähnlichkeitsverhältnis der beiden Körper, und sind ABC und $A_1B_1C_1$ homologe Dreiecke derselben, so genügen die Schnittpunkte A_0, B_0, C_0 der Ähnlichkeitsebene α mit AA_1, BB_1, CC_1 den Gleichungen

$$\frac{A_0A}{A_0A_1} = \frac{B_0B}{B_0B_1} = \frac{C_0C}{C_0C_1} = k\left(= \pm\frac{AB}{A_1B_1} = \cdots\right),$$

wobei k, je nachdem die Körper vollkommen oder symmetrisch ähnlich sind, positiv oder negativ ist. Aber Euler giebt weder diese noch überhaupt eine Regel zur Ermittelung der Ähnlichkeitsebene, zieht vielmehr sofort den oben erwähnten irrigen Schlufs, dafs jede durch den Ähnlichkeitspunkt gelegte Ebene ähnliche Figuren aus den Körpern herausschneidet. Nach meiner Meinung schreibt also Jacobi Euler zu weit gehende Resultate zu. Freilich kann man noch auf andere Weise aus Euler's Entwickelungen überaus leicht einen Beweis für die erwähnten Thatsachen ableiten. Zwei congruente Strahlenbündel weisen nach Euler's Entwickelung vom Jahre 1776 [Vergl. die erste auf S. 190*** genannte Abhandlung] zwei homologe Parallelen auf. Handelt es sich um homologe Strahlenbündel ähnlicher Körper, so beschreiben diese Parallelen bei Veränderung von Ort zu Ort ähnliche Bündel paralleler Strahlen, welche einen Strahl l_0 entsprechend miteinander gemein haben. Derselbe projicirt den Ähnlichkeitspunkt der ähnlichen Felder, welche die Bündel auf einer zu ihren Strahlen senkrechten Ebene ausschneiden. Die Gerade l_0 enthält nun einen sich selbst entsprechenden Punkt, den Ähnlichkeitspunkt S. Die Ähnlichkeitsebene α der beiden Körper steht in S zu l_0 senkrecht.

*) Chasles hatte 1830 dieses Resultat ohne Beweis gegeben [XXII, 4]. Wahrscheinlich hat er es so entwickelt, wie ich am Schlufs der vorigen Note angab, wenigstens findet sich die entsprechende Darstellung für gleichstimmig congruente Körper in einer Arbeit aus dem Jahre 1861. Ich komme auf diese Abhandlung erst weiter unten [XXXIII, 8], da sie vorzugsweise für die Theorie des Nullsystems von Bedeutung ist.

metrisch-gleiche Systeme ($k = -1$) können durch Drehung um eine Axe in centrisch-ähnliche Lage gebracht werden, wie **Magnus** ausführlich nachweist. Nicht erörtert werden die beiden Fälle, in denen der Situationspunkt im Unendlichen liegt, oder alle Punkte einer Ebene sich selbst entsprechen und durch Drehung um irgend eine zu derselben senkrechte Gerade die centrische Lage herbeigeführt werden kann. **Magnus** beweist nunmehr, wiederum unter Anlehnung an die erwähnte Abhandlung **Jacobi's**, dafs vollkommen gleiche Systeme ($k = 1$) durch eine Schraubenbewegung ineinander übergeführt werden können.

Zwei homologe Ebenenbüschel collinearer Räume werden perspectivisch, wenn ihre Axen einer Ebene des Fundamentaltetraeders angehören, und erzeugen eine Ebene, welche die gegenüberliegende Ecke des Tetraeders enthält. Mit Hülfe dreier derartigen Paare von Ebenenbüscheln kann man diese Ecke construiren. Bei zwei affinen Systemen entspricht die unendlich ferne Ebene sich selbst, und die obige Methode ergiebt bei Benutzung von Büscheln paralleler Ebenen den Situationspunkt, bezüglich bei vollkommen gleichen Körpern die Richtung der Situationsaxe. Die so entstehenden Constructionen führt **Magnus** für ähnliche und congruente Körper (S. 108 u. S. 111) thatsächlich an. Die Situationsaxe findet sich bei vollkommen gleichen Körpern mit Hülfe der **Chasles-Euler**'schen Construction des Drehungscentrums für zwei gleichstimmig congruente Figuren einer Ebene. [Vergl.: XXII, 5; S. 336*.]

5. Die Betrachtung wendet sich nunmehr zu der reciproken Beziehung im Raume.*) Dieselbe wird durch eine bilineare Gleichung

$$mx' + ny' + pz' + q = 0$$

zum Ausdruck gebracht, in der m, n, p, q ganze lineare Functionen von x, y, z sind. Sie verknüpft einen Punkt des (x', y', z')-Raumes R_1 mit jedem Punkt der zugehörigen Ebene des (x, y, z)-Raumes R. Einer Punktreihe von R entspricht ein Ebenenbüschel von R_1. Besteht letzterer aus unter sich parallelen Ebenen, so enthält die Punktreihe den Mittelpunkt von R, welchem die unendlich ferne Ebene von R_1 entspricht. Den Träger p der Punktreihe nennt **Magnus** dann einen Durchmesser von R, als conjugirte Diametralebene bezeichnet er die Ebene π_1 von R_1, welche dem unendlich fernen Punkte von p entspricht und deshalb den Mittelpunkt M_1 von R_1 enthält. Es giebt (S. 129) im allgemeinen drei aufeinander senkrechte Durchmesser a, b, c von R, denen drei aufeinander senkrechte Diametralebenen b_1c_1, c_1a_1, a_1b_1 von R_1 entsprechen; umgekehrt sind dann bc, ca, ab die zu a_1, b_1, c_1 conjugirten Diametralebenen. Man kann R_1 auf vier Arten so verschieben,

*) Von der Reciprocität (a. a. O. S. 168***, S. 120—149).

dafs die Kanten a_1, b_1, c_1 auf die Kanten a, b, c fallen. Aus einer dieser vier Lagen von R_1 entstehen die übrigen durch halbe Umdrehungen um a, b, c. Wählt man für beide Räume das gleiche Coordinatensystem, dessen Axen mit a, b, c zusammenfallen, so werden die vier so entstandenen Beziehungen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} Axx' + Byy' + Czz' &= 1, \\ Axx' - Byy' - Czz' &= 1, \\ -Axx' + Byy' - Czz' &= 1, \\ -Axx' - Byy' + Czz' &= 1 \end{aligned}$$

dargestellt. Die Räume sind in jedem der vier Fälle „reciprokliegend", zu einem Polarsystem vereinigt. Magnus unterscheidet in der Folge „elliptisch-reciproke Systeme" und „hyperbolisch-reciproke Systeme" (S. 135). Erstere (A, B, $C > 0$) lassen sich zum Polarsystem eines Ellipsoids oder — auf drei Arten — zum Polarsystem eines zweischaligen Hyperboloids vereinigen, letztere (A, B, $C < 0$) lassen sich zum Polarsystem einer imaginären Fläche F_2 und — auf drei Arten — zum Polarsystem eines einschaligen Hyperboloids vereinigen. Die Vermittlung bilden conisch-reciproke Systeme, die aus dem Polarsystem eines Kegels entstehen. Aufser dem Nullsystem — hierauf komme ich später — behandelt Magnus noch die reciproke Beziehung, bei der je zwei reciproke Gerade einen rechten Winkel bestimmen. Solche Systeme können durch Parallelverschiebung zu dem Polarsystem einer Kugel vereinigt werden. An früherer Stelle [XXXI, 11] wurde erörtert, mit welchen Mitteln Seydewitz — allerdings erst 1846 — den Satz rein geometrisch begründete, dafs zwei reciproke Felder η und η_1 — und zwar auf vier Arten — zu einem Polarsystem vereinigt werden können. In vollkommen analoger Weise läfst sich auch die geschilderte Entwickelung von Magnus im Raume rein geometrisch erledigen. Den wichtigsten Hülfssatz hatte Seydewitz schon rein geometrisch begründet: „Zwei reciproke Strahlenbündel vereinigen sich zu einem Polarsystem, wenn man die homologen orthogonalen Dreikante zur Deckung bringt" [XXXI, 14].

6. Magnus giebt ferner sehr wichtige Entwickelungen über eindeutige Verwandtschaften dritter Ordnung. Die oben angegebene Darstellung der collinearen Verwandtschaft wird (S. 403 ff) durch die Gleichungen

$$x' = \frac{m}{m_0}, \quad y' = \frac{n}{n_0}, \quad z' = \frac{t}{t_0}$$

erweitert, in denen die Gröfsen m, m_0, ... lineare ganze Functionen von x, y, z bedeuten. Die Beziehung ist eindeutig umkehrbar. Der Ebene

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0$$

des (x', y', z')-Raumes entspricht die Fläche dritter Ordnung

$$A\frac{m}{m_0} + B\frac{n}{n_0} + C\frac{t}{t_0} + D = 0$$

des (x, y, z)-Raumes. Dieselbe enthält zwei Tripel fester Geraden:

$$m = 0, \ m_0 = 0; \qquad n = 0, \ n_0 = 0; \qquad t = 0, \quad t_0 = 0$$

und

$$n_0 = 0, \ t_0 = 0; \qquad t_0 = 0, \ m_0 = 0; \qquad m_0 = 0, \ n_0 = 0.$$

Einer Geraden entspricht die Raumcurve R_3, welche die Flächen F_3 eines Büschels aufser diesen sechs Geraden miteinander gemein haben. Giebt man sich drei Paare projectivischer Ebenenbüschel und betrachtet als zugehörig zwei Punkte, welche durch drei Paare homologer Ebenen projicirt werden, so entsteht eine etwas allgemeinere Verwandtschaft dritter Ordnung; sie geht in die eben betrachtete Beziehung über, wenn die Ebenenbüschel des einen Raumes unendlich ferne Axen erhalten. Beide Verwandtschaften — für seinen besonderen Fall hebt es Magnus ausdrücklich hervor — sind specielle Fälle einer Transformation dritter Ordnung, bei der drei bilineare Gleichungen die Coordinaten zweier homologen Punkte verbinden.

Aus drei derartigen Gleichungen

$$A_i x' + B_i y' + C_i z' + D_i = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

in denen also die A_i, B_i, ... lineare ganze Functionen von x, y, z sind, ergeben sich (S. 408) durch Auflösung die Gleichungen

$$x' = \frac{X}{R}, \quad y' = \frac{Y}{R}, \quad z' = \frac{Z}{R},$$

in denen X, Y, Z, R Determinanten dritter Ordnung sind. Die Flächen

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \quad R = 0$$

haben eine Curve sechster Ordnung miteinander gemein. Es besteht nämlich z. B. die Identität

$$X(A_1D_2 - A_2D_1) + (B_1D_2 - B_2D_1)Y + (C_1D_2 - C_2D_1)Z \equiv 0.$$

Die Schnittpunkte der Flächen $Y = 0$, $Z = 0$ liegen also zum einen Teil auf der Fläche $X = 0$, zum andern Teil auf der Fläche $A_1D_2 - A_2D_1 = 0$. Die Punkte zweiter Art erfüllen die Relation

$$A_1 : A_2 : A_3 = D_1 : D_2 : D_3,$$

gehören also der Raumcurve R_3 an, welche je zwei der Flächen F_2

$$A_2D_3 - A_3D_2 = 0; \quad A_3D_1 - A_1D_3 = 0; \quad A_1D_2 - A_2D_1 = 0$$

aufser je einer der Geraden

$$A_1 = 0, \ D_1 = 0; \quad A_2 = 0, \ D_2 = 0; \quad A_3 = 0, \ D_3 = 0$$

miteinander gemein haben. Die Raumcurve R_6, in der sich $Y = 0$, $Z = 0$ aufser in R_3 schneiden, gehört der Fläche $X = 0$ und aus

ähnlichen Gründen der Fläche $R = 0$ an. Einer Ebene des (x', y', z')-Raumes:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$$

entspricht mithin eine Fläche:

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta R = 0$$

dritter Ordnung, welche diese Curve R_6 enthält, einer Geraden des einen Raumes eine Raumcurve dritter Ordnung des anderen.

In einer speciellen Verwandtschaft der genannten Art entsprechen sich, wie Magnus ausdrücklich (S. 403) hervorhebt, je zwei Punkte, welche für drei vorgelegte Flächen F_2, F_2', F_2'' und somit für jede Oberfläche des durch sie bestimmten Bündels conjugirt sind. Nach einem Theorem Bobillier's [XXVI, 7], das Magnus für sich schon früher (S. 373) begründet hatte, bleibt der eine der beiden homologen Punkte auf einer Fläche F_3, wenn der andere auf eine Ebene beschränkt ist. Die allen diesen Flächen F_3 gemeinsame Raumcurve R_6 enthält bekanntlich die Spitzen der im Bündel enthaltenen Kegel. Diese merkwürdige Curve kommt also bei Magnus vor, ohne dafs er ihre geometrische Bedeutung erkannt hätte.

7. Legt man (S. 412) die bilinearen Gleichungen zu Grunde:

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$yz' + zy' = 0, \quad xz' + zx' = 0,$$

so entspricht einer Ebene des (x', y', z')-Raumes:

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$$

eine Oberfläche F_2:

$$D(\alpha x + \beta y - \gamma z) - \delta(Ax + By - Cz) = 0,$$

welche einen festen Kegelschnitt und einen festen Punkt enthält („Cardinal"-Kegelschnitt und -Punkt). Benutzt man noch specieller die drei Gleichungen

$$zz' - yy' - xx' = r^2, \quad yz' + zy' = 0, \quad xz' + zx' = 0,$$

so entsteht eine Kugelverwandtschaft; den Ebenen des (x', y', z')-Raumes entsprechen Kugeln, welche einen Punkt miteinander gemein haben. Die Bobillier'sche Verwandtschaft geht in Kugelverwandtschaft über, wenn die Flächen F_2 des benutzten Bündels einen Kreis K und zwei Punkte mit einander gemein haben, von denen aus K in den unendlich fernen Kugelkreis projicirt wird. Dem Ellipsoid $(a > b > c)$

$$a^2x'^2 + b^2y'^2 + c^2z'^2 = r^4$$

entspricht (S. 416) bei Anwendung der obigen Formeln die Fläche der Elasticität (F_4)

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

die **Magnus** vorher (S. 402) als die zum Mittelpunkte des Ellipsoids

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c} = 1$$

gehörige Fufspunktfläche eingeführt hatte. Die Tangentialebenen des Cylinders

$$(a^2 - b^2)x^2 - (b^2 - c^2)z^2 + \tfrac{1}{4}b^4 = 0$$

schneiden die Elasticitätsfläche in Kreisen, welche denen des Ellipsoids in der Verwandtschaft entsprechen.*) Andere Kreise der Fläche F_4 entstehen, wenn anstatt des Ellipsoids ein einschaliges Hyperboloid zu Grunde gelegt wird, aus den Geraden desselben. Dieselben enthalten den Mittelpunkt von F_4. Offenbar haben wir hier die ersten Anfänge zur Lehre von den **Kummer**'schen Flächen mit Doppelkegelschnitt, speciell der bicircularen Flächen vierter Ordnung mit Doppelpunkt, vor uns. Eine Bemerkung, die **Magnus** flüchtig hinwirft, hat gerade auf die bicircularen Flächen F_4 Anwendung gefunden. Er möchte nämlich geometrische Verwandtschaften erster, zweiter, dritter, ... Klasse unterscheiden; die Verwandtschaft n^{ter} Klasse wird durch drei Gleichungen n^{ten} Grades in Bezug auf jede von zwei Coordinatengruppen tuv und xyz dargestellt. Bekanntlich ist nun für die Untersuchung der bicircularen Flächen F_4 die Verwandtschaft von besonderer Bedeutung, durch welche den Grundpunkten jedes Kugelbündels einer linearen Kugel-Mannigfaltigkeit dritter Stufe die Centralebene desselben zugeordnet wird. Die Fläche F_4 kann auf fünf Arten durch solche Verwandtschaften in Oberflächen F_2 übergeführt werden. Wenn man t, u, v als Ebenencoordinaten auffafst, so hat man es eben mit einer Verwandtschaft zweiter Klasse zu thun. **Magnus** bemerkt ferner, dafs mit Hülfe zweier bilinearen Gleichungen für die Coordinatengruppen $x'y'z'$ und xyz jedem Punkte des einen Raumes eine Gerade des anderen zugeordnet wird, ohne jedoch diese Bemerkung, die ihn auf den tetraedralen Complex hätte führen müssen, weiter zu verfolgen (S. 417).

8. Ich komme nunmehr zu den kurzen in diesem Capitel **Plücker****) zu widmenden Bemerkungen Zunächst werden, wie

*) **Magnus** weist ganz ausdrücklich nach, dafs die Kreise beider Scharen auf F_2 in Kreise übergehen, deren Ebenen den genannten Cylinder berühren, macht dann aber die Umkehrung, dafs jede Tangentialebene des Cylinders die Fläche F_4 in einem Kreise (statt in zweien) schneidet. Wenn man zu den reellen Kreisen von F_2 die imaginären hinzunimmt, aufserdem auch ihre Geraden transformirt, erhält man sämtliche **Kummer**'schen Kegel der betrachteten bicircularen Fläche F_4. Oben [XIV, 7] wurden ähnliche Betrachtungen, die aber nicht so ausführlich sind, bei **Stubbs** beobachtet. Sie liegen zudem um mehrere Jahre später als die von **Magnus**.

) **Plücker, System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise, insbesondere die Theorie der Flächen zweiter Ordnung und Classe enthaltend, (Düsseldorf 1846), zweite Auflage, Düsseldorf 1852.

schon oben [XXIII, 5] erwähnt wurde, die allgemeinsten Coordinaten des Punktes und der Ebene eingeführt. Erstere — p, q, r, s — unterscheiden sich um multiplicative Constanten von den Abständen des darzustellenden Punktes von vier Ebenen (S. 5). Statt ihrer selbst können auch die Quotienten

$$\vartheta = \frac{p}{s}, \quad \eta = \frac{q}{s}, \quad \zeta = \frac{r}{s}$$

zur Verwendung kommen. Ebenso entstehen die Coordinaten P, Q, R, S einer Ebene*) durch Multiplication ihrer Abstände von vier festen Punkten mit beliebig gegebenen Constanten. Statt ihrer kann man wiederum die Quotienten

$$\Theta = \frac{P}{S}, \quad H = \frac{Q}{S}, \quad Z = \frac{R}{S}$$

einführen. Ein jedes Wertsystem a, b, c charakterisirt in zwei Systemen nicht homogener Coordinaten Elemente, welche in einer collinearen oder reciproken Beziehung im Raume einander entsprechen, je nachdem man gleichartige oder ungleichartige Coordinatensysteme verwendet. Die reciproke Beziehung kann auch durch eine bilineare Gleichung zwischen den Coordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen dargestellt werden. Von den 15 willkürlichen Constanten dieser Gleichung gehen 6 verloren, wenn jedem Punkte, mag er dem einen oder anderen Raume angehören, dieselbe Ebene entspricht. Hiermit stehe Magnus' Resultat in Einklang, daſs reciproke Räume in reciproke Lage gebracht werden können, denn eine Verschiebung eines Raumes hänge eben von sechs Constanten ab (S. 14).

Ich bespreche hier noch die Cap. 13 und 14 des Hauptabschnittes. In dem ersteren entwickelt Plücker die Polareigenschaften der Oberfläche F_2 und stellt mit ihrer Hülfe die Gleichung derselben in „befreundeten“ — auf dasselbe Tetraeder bezüglichen — Punkt- und Ebenencoordinaten auf. Nachdem aus den Polareigenschaften das Dualitätsgesetz im Raume entwickelt ist, folgt (S. 322) die etwas befremdliche Äuſserung: „Jede geometrische Beziehung ist als die bildliche Darstellung einer analystischen Beziehung anzusehen, die, abgesehen von jeder Deutung, ihre selbstständige Geltung hat. So gehört auch das Princip der Reciprocität ganz eigentlich der Analysis an, und nur weil wir, sogar wenn wir es analytisch begründen, gewohnt sind, es in der Sprache der Geometrie auszudrücken, wird uns die Ansicht gewissermaſsen aufgedrängt, daſs es ein ausschlieſslich

*) Schon in einer 1832 erschienenen Arbeit werden jedoch als Coordinaten einer Ebene die in ihre Gleichung $tz + uy + vx + w = 0$ eingehenden Coefficienten gedeutet. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades $F(t, u, v, w) = 0$ stellt eine Fläche F_n dar. Vergl.: Plücker, Note sur une théorie générale et nouvelle des surfaces courbes, Crelle's Journ., Bd. 9, 1832, S. 124—134 (Abh., Bd. 1, S. 224—234).

geometrisches sei" u. s. w. Dem wird man mit aller Entschiedenheit entgegenhalten, dafs sich wohl kein geometrisches Gesetz mit solcher Handgreiflichkeit der unmittelbaren geometrischen Anschauung aufdrängt, wie gerade das Dualitätsgesetz, und man wird daran erinnern, dafs dasselbe für die Ebene mit rein geometrischen Mitteln von Steiner und Seydewitz [XXVII, 13; XXXI, 5] auf eine Art erwiesen war, deren Übertragung auf den Raum eigentlich selbstverständlich ist.

Der Übergang von dem Reciprocitätsgesetz der Ebene zu dem des Raumes gehe vor sich, wie Plücker ausführt, indem statt der definirenden bilinearen Hülfsgleichung zwischen zwei Coordinatenpaaren xy und $x'y'$ eine solche zwischen zwei Coordinatentripeln xyz und $x'y'z'$ eingesetzt würde. Man könne auf analoge Art zu beliebig hohen Dimensionen aufsteigen; es entstehe die Frage nach der geometrischen Deutung. Für die vierte Dimension könne die Mannigfaltigkeit der Geraden zu Hülfe genommen werden.

9. Den Büschel von Flächen F_2 stellt Plücker im Cap. 14 in der Form dar:

$$(A+\lambda A_1)p^2+(B+\lambda B_1)q^2+(C+\lambda C_1)r^2+(D+\lambda D_1)s^2=0.$$

Lediglich aus dem Umstande, dafs die Gleichung die erforderliche Anzahl willkürlicher Constanten aufweist, wird geschlossen, dafs die obige Darstellung eines Büschels im allgemeinen auf eine einzige Art möglich ist, sodafs also zwei Flächen F_2 und G_2 ein gemeinsames Polartetraeder besitzen. Die Ecken desselben senden die im Büschel enthaltenen Kegel aus. Setzt man an Stelle der p, q, r, s Ebenencoordinaten ein, so erhält man die Gleichung einer Schar von Flächen F_2. Die Ebenen des gemeinsamen Polartetraeders enthalten die Strictionslinien der zugehörigen abwickelbaren Fläche. Plücker hebt dann besonders die Schar confocaler Flächen hervor; ich komme hierauf an einer anderen Stelle zurück.*)

*) Oben [XIX, 4] sind die Stetigkeitsbetrachtungen geschildert worden, mit deren Hülfe Poncelet nachzuweisen suchte, dafs die Schnittcurve zweier Flächen F_2 und G_2 auf Kegeln enthalten ist. Aus einem dieser Kegel liefsen sich die drei anderen leicht ableiten. Kann die Betrachtungsweise Poncelet's nicht als sehr befriedigend bezeichnet werden, so ist doch andererseits auch ein weiter Weg zurückzulegen, bis man von Plücker's blofser Abzählung der Constanten zu der Methode gelangt, nach welcher die moderne analytische Geometrie das gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen F_2 und G_2 oder allgemeiner das Fundamentaltetraeder zweier collinearen Räume nachweist. Bekanntlich kann man durch eine lineare Construction irgend ein Bestimmungsstück dieses Tetraeders ermitteln, wenn das gegenüberliegende Stück gegeben ist. Entspricht z. B. die Ebene π sich selbst, so erzeugen je zwei homologe Ebenenbüschel, welche π entsprechend mit einander gemein haben, eine Ebene, welche den aufserhalb π gelegenen, sich selbst entsprechenden Punkt P enthält. Auf diesem Princip beruhte, wie bereits bemerkt wurde, Magnus' Construction des Situationspunktes ähnlicher Figuren. Dieselbe würde auch auf affine Figuren Anwendung finden.

10. Ich mufs nunmehr zu der Abhandlung von Chasles übergehen, welcher ursprünglich der Aperçu historique als Einleitung dienen sollte. Die glänzenden Vorzüge dieser historischen Einleitung haben es gefügt, dafs man der Arbeit selbst verhältnismäfsig geringe Aufmerksamkeit schenkte, oder wenigstens jetzt schenkt. In ihrer ursprünglichen Form bestand die Arbeit aus der Abhandlung und einer ganz kurzen historischen Einleitung; sie wurde 1830 mit einem von der Akademie zu Brüssel ausgeschriebenen Preise gekrönt. Der Druck des Werkes begann erst 1835, nachdem die historische Einleitung auf den jetzt bekannten Umfang gebracht worden war. Der Abdruck verlangsamte sich sehr bald, sodafs das Werk erst im Jahre 1837 herauskam.*) Ich habe schon hervorgehoben [XXIX, 4], dafs diese Verzögerung zu einer eigentümlichen Stellung des Werkes in der geometrischen Litteratur führen mufste. Ein grofser Teil der in dem Werke enthaltenen Resultate war in der Zwischenzeit von 1830 bis 1837 entwickelt worden, während andere Resultate schon Möbius vor 1830 begründet hatte.

Wie schon oben bemerkt, nimmt Chasles die bilineare Gleichung zwischen zwei Coordinatengruppen xyz und $x'y'z'$ zum Ausgangspunkt, um die Gesetze der „Correlation", der reciproken Beziehung, zu erläutern. Dieser Weg aber, hebt Chasles in einer kurzen Einleitung hervor, sei nur der herrschenden geometrischen Ausbildung wegen gewählt worden. Es gebe einen anderen, im Grunde einfacheren Weg, bei welchem man an die Geometrie der Alten direct anknüpfen würde. Aus der Gleichung heraus wird nun ziemlich umständlich entwickelt, dafs den Punkten, Punktreihen und Punktfeldern des einen Raumes Ebenen, Ebenenbüschel und Ebenenbündel des anderen Raumes entsprechen. Unter Hinweis auf die oben [XXIX, 4] besprochene Note wird dann (6) dargethan, dafs vier Punkte einer Geraden l des ersten Raumes dasselbe Doppelverhältnis aufweisen, wie die zugehörigen Ebenen des zweiten. Beim Beweise wird die zweite Punktgruppe benutzt, welche die vier Ebenen auf l ausschneiden. Nachdem (7) bemerkt ist, dafs im allgemeinen die Punkte, welche ihren zugehörigen Ebenen angehören,

*) Der vollständige Titel des Buches lautet: Chasles, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la géométrie moderne, suivi d'un mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science, la dualité et l'homographie, Brüssel 1837, seconde édition, conforme à la première. Paris 1875. Aus dem Vorwort dieser zweiten Auflage, welche im folgenden, wie in diesem Bericht überhaupt, benutzt wird, sind die obigen Daten entnommen 3. Aufl., Paris 1889). Der Titel der Abhandlung selbst ist: Mémoire de géométrie sur deux principes généraux de la science: la dualité et l'homographie, S. 573—851. Die Schrift ist in zwei Teile zerlegt: Première partie. Principe de dualité, S. 575—694. Seconde partie. Principe d'homographie, S. 695—848. Meine Hinweise beziehen sich auf die Artikelnummern der Abhandlung.

eine Oberfläche F_2 ausfüllen, dafs jedoch auch jeder Punkt in seiner zugehörigen Ebene liegen kann, wird (8) aus der Abzählung der Constanten geschlossen, dafs die Beziehung völlig bestimmt ist, wenn man zu fünf Punkten die zugehörigen Ebenen kennt. Wenn der bestimmende Punkt („point directeur") sich ins Unendliche entfernt, bewegt sich (4) die zugehörige Ebene ebenfalls um einen Punkt, gerade so, als ob der Punkt eine Ebene beschriebe. Hiernach könne man (5) mit Poncelet diese „idée paradoxale, mais d'une justesse mathématique" aussprechen: „L'espace indéfini a pour enveloppe une surface plane."

11. Das Dualitätsprincip enthält (10 ff.) zweierlei. Aus dem vorher entwickelten folgt unmittelbar, dafs man einer Figur auf unzählige Weisen andere „correlative" zuordnen kann, in denen Punkte, Gerade und Ebenen ihren eigenen Ebenen, Geraden und Punkten entsprechen; diese Beziehung erstreckt sich bis auf die unendlich fernen Elemente. Hierzu gesellen sich zweitens metrische Beziehungen, die aus der Erhaltung des Doppelverhältnisses folgen. Chasles gelangt schliefslich (16) zu folgender Regel: „Die Entfernung eines beliebigen Punktes P der ersten Figur von einer festen Ebene α unterscheidet sich um einen constanten Factor von dem Quotienten der Entfernungen zweier festen Punkte A und B der zweiten Figur von der P zugehörigen Ebene π"; von den Punkten A und B entspricht der erste α, der andere der unendlich fernen Ebene der ersten Figur. Chasles wendet das Dualitätsprincip zunächst auf Krümmungseigenschaften der Oberflächen im allgemeinen an. Sodann wird (26—28) ein kurzer Hinweis auf die Polareigenschaften der Oberflächen F_2 gegeben, welche aus den Mittelpunkteigenschaften sich folgern lassen. Sind die Flächen zweier Tetraeder paarweise einander parallel, so laufen die Verbindungslinien entsprechender Ecken in einem Punkte zusammen und werden durch denselben im gleichen Verhältnis geteilt. Hiernach schneiden sich (29) die homologen Ebenen zweier Tetraeder auf einer Ebene σ, wenn die Verbindungslinien entsprechender Punkte durch einen Punkt S hindurchgehen. S und σ bestimmen mit je zwei homologen Ecken der Tetraeder das gleiche Doppelverhältnis. Aus dem ersten Teile dieses Theorems, welcher allein bisher bekannt sei, folge sofort Poncelet's Construction für homologe Figuren [XIX, 1].

12. Nach kurzen Bemerkungen (31, 32) über Oberflächen F_2, die einen Tangentialkegel miteinander gemein haben und somit zu ähnlichen und ähnlich gelegenen Oberflächen F_2 reciprok sind, wendet sich Chasles zu den Tripeln hinsichtlich einer Oberfläche F_2 conjugirter Strahlen, oder, wie er selbst bezeichnet, conjugirter Axen. Je nachdem die drei Strahlen einer Ebene angehören oder von einem Punkte ausgehen, enthält die Polargerade eines jeden der Strahlen den Schnittpunkt der beiden anderen oder liegt mit denselben in einer Ebene. Die Tripel conjugirter Axen einer Fläche F_2, welche in einer Ebene α liegen und von ihrem Pole A nach F_2 ausgehen, können durch

reciproke Umformung aus den Tripeln conjugirter Durchmesser einer Fläche G_2 und den Dreiecken, welche sie auf der unendlich fernen Ebene bestimmen, abgeleitet werden. Drei von A ausgehende conjugirte Axen sind (36) conjugirte Durchmesser jeder Fläche H_2, deren Asymptotenkegel mit dem von A ausgehenden Tangentialkegel von F_2 zusammenfällt. Hierin liegt das Hauptinteresse für die zahlreichen hier eingeschalteten metrischen Relationen über Tripel conjugirter Axen. Die — an sich richtige — zweite in 42 angeführte Relation entspringt aus einer anderen als der an die Spitze gestellten Beziehung. Es folgen (56—70) Entwickelungen über harmonische Mittelpunkte und Axen, das Durchmesser-Theorem von Newton u. s. w. Aus den Eigenschaften des „quadrilatère gauche", leitet Chasles (71) unter Berufung auf Legendre [IX, 8] ab, daſs vier Gerade der einen Schar eines einschaligen Hyperboloids von irgend zwei Geraden der anderen Schar aus durch Gruppen von gleichem Doppelverhältnis projicirt werden.

13. Von Wichtigkeit ist die Art, in welcher die Ebenen-Coordinaten eingeführt werden. Die Verhältnisse der Cartesischen Coordinaten eines beweglichen Punktes zu denen eines festen Punktes können als Doppelverhältnisse gedeutet werden, welche diese beiden Punkte zusammen mit dem Anfangspunkte der Coordinaten und einem beliebigen unendlich fernen Punkte an den unendlich fernen Geraden der drei Coordinaten-Ebenen bestimmen. Diesen Doppelverhältnissen gleich werden bei einer reciproken Umformung des Raumes die Doppelverhältnisse, welche eine bewegliche und eine feste Ebene mit je zwei Ecken eines Tetraeders bestimmen. Trifft also eine Tangentialebene einer Fläche n^{ter} Klasse die Kanten AD, BD, CD eines Tetraeders in den Punkten X, Y, Z, so gehen $\frac{XA}{XD}$, $\frac{YB}{YD}$, $\frac{ZC}{ZD}$ in eine Gleichung n^{ten} Grades ein. Die Entfernungen der beweglichen Ebene von den Ecken des Tetraeders genügen einer homogenen Gleichung n^{ten} Grades (79). Chasles betrachtet noch zwei specielle Fälle. Einmal können (75), wenn D ins Unendliche rückt, als Coordinaten der Ebene die Segmente AX, BY, CZ eingeführt werden, die sie auf drei von A, B, C aus gezogenen Parallelen abschneidet. Indem andererseits ABC ins Unendliche hinausgeht, ergeben sich (78) als Coordinaten der Ebene die reciproken Werte der Strecken, welche sie auf drei von einem Punkte ausgehenden Strahlen abschneidet.*)

*) Diese speciellen Ebenencoordinaten und einen speciellen Fall der weiter unten geschilderten Punktcoordinaten erläutert Chasles in zwei Noten, durch welche er sich die Priorität gegen die gleichzeitigen Bestrebungen Plücker's zu sichern suchte. Vergl.: Lettre de M. Chasles au rédacteur, au sujet d'un Mémoire de M. Plucker, inséré dans le Journal de M. Crelle, Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 81—84, Note supplémentaire à la lettre précédente, ibidem, S. 85—87. Auf diese Notizen weist Chasles (90) hin, ohne Plücker zu erwähnen, der ja allerdings erst 1832 die Verallgemeinerung auf den Raum vollzog [XXIII, 5; XXXII, 8].

14. Die Coordinaten eines Punktes, der einer gegebenen Ebene in einer Correlation entspricht, kann man (91 ff.) durch Auflösung dreier linearen Gleichungen gewinnen. Einfacher jedoch ist (96 ff.) die geometrische Construction reciproker Figuren, bei der fünf Punkten A, B, C, D, E (von denen keine vier derselben Ebene angehören) bezw. die Ebenen α, β, γ, δ, ε (von denen keine vier durch denselben Punkt gehen) entsprechen sollen. Die zu M homologe Ebene μ entspringt aus den drei Doppelverhältnisgleichungen:

$$(BC)(ADEM) = (\beta\gamma)(\alpha\delta\varepsilon\mu),$$
$$(CA)(BDEM) = (\gamma\alpha)(\beta\delta\varepsilon\mu),$$
$$(AB)(CDEM) = (\alpha\beta)(\gamma\delta\varepsilon\mu).$$

Mannigfache Varianten dieser Construction, welche aus den geschilderten Entwickelungen von Möbius [XX, 5; XXIII, 13] sich unmittelbar ergiebt, werden angeführt. Poncelet hatte eine sehr einfache Regel zur Construction in einer Ebene liegender reciproken Felder gegeben; Chasles weist hier den oben [S. 231*] erwähnten Zusammenhang mit der Configuration des Pappus nach, welche aus dem Pascal'schen Satze für sechs auf zwei Gerade verteilte Punkte entsteht. Zunächst wird (111) folgendes räumliche Analogon zu Poncelet's Regel entwickelt: „Die Ebenen PBC, PCA, PAB mögen der Reihe nach die drei Punkte $\pi\beta\gamma$, $\pi\gamma\alpha$, $\pi\alpha\beta$ enthalten; alsdann beschreiben P und π reciproke Figuren, wenn der Punkt $\alpha\beta\gamma$ der Ebene ABC angehört." Chasles sucht (Note zu 112) im Anschlufs an die erwähnte Bemerkung seinem Theorem eine Fassung zu geben, welche dem Theorem von Pappus genau entspricht.

15. Zwischen den Coordinaten zweier Punkte besteht, wenn der eine der Polarebene des anderen nach einer Oberfläche zweiter Ordnung angehört, eine specielle bilineare Gleichung. Zwei Figuren sind deshalb (115) stets reciprok, wenn sie bezüglich einer Oberfläche F_2 einander polar gegenüberstehen. Zu den bisher bekannten descriptiven Eigenschaften trete, wie Chasles hervorhebt, noch eine metrische hinzu. Das Doppelverhältnis von vier einer Geraden angehörigen Polen ist (116) gleich dem der vier entsprechenden Polarebenen. Chasles geht hier indirect auf die Erörterungen ein, welche Poncelet an seine Entwickelungen über die parabolische Transformation geknüpft hatte [XXI, 12]. In der gewonnenen Doppelverhältnisgleichung — führt er aus — sei die eigentliche Quelle der interessanten metrischen Beziehungen zu erblicken, die Poncelet mit Hülfe des Polarsystems einer Kugel entwickelt habe, während er selbst sich des Rotationsparaboloids bedient habe. Poncelet habe ferner ausdrücklich hervorgehoben, dafs die neuen metrischen Beziehungen, welche sich bei Benutzung des Polarsystems eines Kreises, bezw. einer Kugel ergeben, auch dann richtig blieben, wenn man sich eines allgemeinen Gebildes zweiter Ordnung zur Umformung

bediene. Er habe dies für die Ebene aus den Gesetzen begründet, welche zwischen zwei zueinander perspectivischen Ebenen bestehen. Für den Raum sei eine derartige Herleitung zwar nicht gegeben worden, aber man begreife sofort, daſs sie aus der Homologie-Beziehung unmittelbar hervorgehe.

Es wird nun speciell die bilineare Gleichung

$$Ax'x + By'y + Cz'z = 1 + Lx' + My' + Nz'$$

in Betracht gezogen. Die einem Punkte x', y', z' zugeordnete Ebene ist parallel zu seiner Polarebene nach der Fläche

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

Indem die letztere Fläche in eine Kugel übergeht, gelangt Chasles zu manchen Sätzen über Rotationsflächen und auch rückwärts zu Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte. Hervorhebung verdient besonders der Satz (130): „Bei jeder Rotationsfläche F_2 stehen je drei von einem Brennpunkte ausgehende conjugirte Axen aufeinander senkrecht."

Es folgen nun höchst wichtige Erörterungen über das Nullsystem, auf die ich an anderer Stelle eingehe. Entspricht in einer reciproken Beziehung jedem Punkte dieselbe Ebene, mag man ihn zu dem einen oder anderen Raume rechnen, so handelt es sich, wie Chasles (155) rechnend beweist, entweder um ein Polarsystem, oder es gehört jeder Punkt seiner zugehörigen Ebene an.*)

16. Die Thatsache, daſs vier Punkte einer Geraden das gleiche Doppelverhältnis besitzen wie ihre Polarebenen nach einer Oberfläche F_2, wird noch auf eine zweite Weise (157) daraus abgeleitet, daſs die einer Geraden l angehörigen Paare conjugirter Punkte von F_2 durch zwei Punkte von F_2 harmonisch getrennt werden. Sind also die Pole B und C zweier Ebenen β und γ nach einer Fläche F_2 bekannt, so durchläuft der Pol A einer dritten Ebene α eine Ebene α_1, welche auch die Schnittlinie von β und γ enthält. Aus dieser räumlichen Form eines Satzes, den für die Ebene Poncelet gegeben hatte [Vergl.: S. 196**], folgert Chasles die oben [XXIII, 1] erörterten Beziehungen zwischen dem Dreieck ABC und dem Dreiflach $\alpha\beta\gamma$ und weist nochmals auf den hieraus entspringenden Zusammenhang zwischen zwei in Bezug auf F_2 reciproken Tetraedern hin [XXIII, 3].

17. Der zweite Teil der Abhandlung ist dem „Homographie-Princip", d. h. der Erörterung der Beziehungen zwischen zwei be-

*) Vertauscht man x, y, z mit x', y', z', so bleibt die definirende Gleichung im ersten Falle ungeändert, im zweiten Falle ändert sie ihr Vorzeichen. Chasles giebt die allgemeinste Gleichung des Nullsystems

$$a_0(yz' - y'z) + a_1(x - x') + b_0(zx' - z'x) + b_1(y - y') + c_0(xy' - x'y) + c_1(z - z') = 0.$$

liebigen collinearen Räumen gewidmet. Zwei Räume stehen, wenn sie auf einen und denselben dritten reciprok bezogen sind, in collinearer Beziehung (171). Den Punkten, Geraden und Ebenen des einen entsprechen eindeutig die Punkte, Geraden und Ebenen des anderen. Dem unendlich fernen Gebilde eines jeden Raumes entspricht im allgemeinen eine im Endlichen liegende Ebene des anderen. Überdies stimmen vier Punkte, die einer Geraden angehören, im Doppelverhältnis mit den homologen Punkten überein. Nach einem speciellen Falle dieser metrischen Beziehung ergeben die Entfernungen zweier homologen Punkte von den beiden Fluchtebenen ein constantes Product (177). Als eine leichte Modification des ersten Theorems ist das zweite anzusehen, nach welchem homologe von zwei entsprechenden Geraden ausgehende Ebenenquadrupel gleiches Doppelverhältnis zeigen.

Bei der collinearen Transformation geht eine algebraische Fläche in eine andere gleicher Ordnung über. Eine Fläche F_2 wird z. B. in den Endpunkten eines jeden Durchmessers von zwei parallelen Ebenen berührt; alle diese Durchmesser werden durch den Mittelpunkt halbirt. Mit Benutzung einer collinearen Umformung folgt (181): „Die Sehnen einer Oberfläche G_2, welche einen Punkt P enthalten, werden durch diesen und eine zugehörige Polarebene π harmonisch geteilt. Die Tangentialebenen in den Endpunkten einer jeden der Sehnen schneiden sich in einer Geraden dieser Polarebene." Drei conjugirte Durchmesser von F_2 gehen in drei von P ausgehende conjugirte Axen von G_2 über (184). Hieraus lassen sich dann (195 ff.) metrische Eigenschaften dieser Tripel conjugirter Axen ableiten.

Aus Monge's Kugelsatz ergiebt sich (187): „Der Schnittpunkt dreier Tangentialebenen einer Oberfläche F_2, welche ein Polardreieck eines Hülfskegelschnittes K_2 projiciren, beschreibt eine zweite Oberfläche, welche K_2 enthält und bezüglich seiner Ebene denselben Pol zeigt, wie F_2." Durch duale Übertragung folgt (190) der zweite Satz: „Die Tripel conjugirter Durchmesser einer Fläche G_2 treffen eine Fläche F_2 in Ecken von Octaedern, welche einer dritten Oberfläche H_2 umschrieben sind. G_2 und H_2 haben den Mittelpunkt von G_2 zum Homologiecentrum." Der Satz ist die collineare Erweiterung eines Theorems von Poncelet [XXI, 3].

18. Es folgen nun Anwendungen auf algebraische Flächen, wobei insbesondere Poncelet's Sätze über die harmonischen Mittelpunkte und Axen bei Gruppen von Punkten, Geraden und Ebenen entwickelt und mit Hülfe des Newton'schen Durchmessersatzes auf algebraische Gebilde übertragen werden (202 ff.). Von Interesse ist ferner die Art, in welcher (226) Newton's Potenzsatz verallgemeinert wird: „Schneidet eine algebraische Fläche die Geraden MI und MJ in den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_n$ und $B_1, B_2, \ldots B_n$, so ist, wenn I und J feste Punkte sind,

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{MA_k}{IA_k} : \frac{MB_k}{JB_k} = \text{Const.}``$$

Indem M auf der Geraden IJ, welche die Fläche in C_1, C_2, ... C_n schneiden möge, ins Unendliche entfernt wird, ergiebt sich eine Bestimmung der Constante; es entspringt dann das Carnot'sche Theorem:

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{MA_k \cdot IC_k \cdot JB_k}{MB_k \cdot IA_k \cdot JC_k} = 1.$$

Freilich ist der oben [II, 11] angedeutete Weg zur Ermittelung der Beziehung wesentlich einfacher.

19. Wenn man anstatt der cartesischen Coordinaten in der oben [XXXII, 13] beschriebenen Weise Doppelverhältnisse von Ebenen-Quadrupeln einführt, die letzteren mit beliebigen Transversalen schneidet, so gelangt man mit Chasles (232) zu folgender allgemeinen Coordinaten-Bestimmung: „A'', B'', C'' seien beliebige Punkte dreier Transversalen a, b, c, welche die Ebene eines Dreiecks ABC in den Punkten A', B', C' treffen mögen. Die Ebenen PBC, PCA, PAB mögen a, b, c der Reihe nach in X, Y, Z treffen, alsdann gehen $\frac{A''X}{A'X}$, $\frac{B''Y}{B'Y}$, $\frac{C''Z}{C'Z}$ in eine Gleichung n^{ten} Grades ein, wenn der Punkt P über eine Fläche F_n geführt wird, und können als Coordinaten des Punktes betrachtet werden." Verschiedene specielle Fälle entstehen, wenn entweder die Ebene ABC oder die Punkte A'', B'', C'' sich ins Unendliche entfernen, oder die drei Transversalen parallel zu ABC werden. Als specieller Fall erscheint (248) die Darstellung der Fläche durch eine homogene Gleichung n^{ten} Grades in Tetraeder-Coordinaten.

20. Chasles wendet sich (258 ff.) zu dem gemeinsamen Tripel conjugirter Durchmesser-Richtungen zweier Flächen F_2 und G_2, bespricht, dafs entweder zwei oder sechs Scharen paralleler Ebenen bestehen, die F_2 und G_2 in ähnlichen Kegelschnitten schneiden, u. s. w. Diese Sätze entspringen bei collinearer Umformung aus den Sätzen über das gemeinsame Polardreieck und die gemeinsamen Secanten der Kegelschnitte, welche zwei Oberflächen F_2 und G_2 mit einer Ebene gemein haben. Das gemeinsame Tripel conjugirter Durchmesser-Richtungen ist nur dann reell, wenn die Schnittcurve der beiden Flächen überhaupt keine oder vier reelle Asymptoten besitzt.

21. Zwei collineare Figuren sind durch fünf Paare homologer Punkte oder Ebenen bestimmt. Die geometrische Construction derselben geschieht im ersten Falle genau wie bei Möbius [XXIII, 13] aus dem Umstande heraus, dafs homologe Punkt-Quadrupel von entsprechenden Geraden aus durch Gruppen von gleichem Doppelverhältnis projicirt werden (272 ff.). Für diese und die duale Con

struction stellt Chasles (290) — für jetzt ergeben sich die Constructionen mittelbar aus dem rechnend erwiesenen Dualitätsprincip — eine rein geometrische Begründung in Aussicht. Durch die Entwickelungen von Steiner [XXVII, 13] und Seydewitz [XXXI, 5] wird die Form dieser Begründung, die wohl Staudt zuerst gegeben hat, selbstverständlich gemacht. Mit den beschriebenen Constructionen wird die analytische Darstellung der collinearen Beziehung in Verbindung gebracht. Die Coordinaten eines Punktes des einen Raumes sind gebrochene lineare Functionen der Coordinaten des homologen Punktes mit gemeinsamem Nenner. Auf die Ebene zurückgreifend nimmt Chasles (296—298) noch auf die Entwickelungen Waring's und Newton's Bezug [XXII, 8].

Nach den vorangegangenen Entwickelungen können zwei collineare Räume vier Punkte A, B, C, D miteinander gemein haben (301). In diesem Falle werden, wie aus der geometrischen Construction sofort hervorgeht, alle Ebenen des Tetraeders $ABCD$ in sich übergeführt. Besonderes Interesse verdient der Specialfall, in welchem jeder Punkt der Ebene BCD und mithin auch jede von A ausgehende Gerade sich selbst entspricht. Je zwei homologe Punkte bilden mit A und dem Punkte, in welchem ihre Verbindungslinie BCD trifft, eine Gruppe von constantem Doppelverhältnis (307). Man gelangt so offenbar zu der Homologie-Beziehung Poncelet's.

22. Chasles bemüht sich zunächst, die Vorteile der neuen metrischen Construction von allen Seiten zu beleuchten, um sich sodann der Homologie-Beziehung zwischen zwei Oberflächen F_2 und G_2 zuzuwenden. Nach Poncelet's Ausführungen [XIX, 2] treten F_2 und G_2 in Homologie-Beziehung, sobald sie einen und folglich noch einen zweiten Tangentialkegel miteinander gemein haben. Die Spitze eines dieser Kegel ist dann das Centrum der Homologie. Die Homologie-Ebene kann durch den einen oder anderen der beiden Kegelschnitte festgelegt werden, die F_2 und G_2 mit einander gemein haben. Jedoch mufs hierbei das Continuitätsprincip in weiterem Maafse zu Hülfe genommen werden, als Poncelet vorausgesetzt hatte (318). In der That leuchtet ja ein, dafs eine geradlinige und eine nicht geradlinige Oberfläche zweiter Ordnung niemals collinear verwandt sein können, so lange man im Reellen verbleiben will. Diese Unterscheidung hatte bereits Möbius [XXIII, 13] hervorgehoben. Thatsächlich können zwei Oberflächen zweiter Ordnung einen reellen Tangentialkegel miteinander gemein haben, während die beiden gemeinsamen Kegelschnitte und deren Ebenen imaginär sind. Chasles verzeichnet, um dies anschaulich zu machen, auf einem Kegel zweiten Grades zwei Ellipsen, die sich in reellen Punkten A und B treffen. Längs dieser Ellipsen werde der Kegel von dem einschaligen Hyperboloid H_2 und dem Ellipsoid E_2 berührt. H_2 und E_2 können dann aufser A und B reelle Punkte nicht gemein haben, da H_2 aufser-

halb, E_2 innerhalb des Kegels liegt. Aus diesem Grunde sind die beiden E_2 und H_2 gemeinsamen Kegelschnitte imaginär und liegen auch in imaginären Ebenen, welche sich in der Geraden AB schneiden; eine reelle Ebene würde nämlich schon die Punkte A und B und somit einen reellen Kegelschnitt mit E_2 und H_2 gemeinsam haben. Übrigens ist es offenbar unwesentlich, die Punkte A und B als reell vorauszusetzen. H_2 hat als einschaliges Hyperboloid mit jeder reellen Ebene einen reellen Kegelschnitt gemein, und deshalb liegen die E_2 und H_2 gemeinsamen Kegelschnitte in imaginären Ebenen. [Dagegen können zwei gleichartige Flächen zweiter Ordnung reelle gemeinsame Tangentialkegel nicht aufweisen, ohne dafs eine reelle Homologie-Beziehung zwischen ihnen obwaltet.] Ist S das Centrum einer Homologie-Beziehung, hat von zwei homologen Punkten A und A' der erste die Entfernung AP von der Fluchtebene seines Raumes, ist endlich λ eine Constante, so besteht die Gleichung (322)

$$\frac{AS}{AP} = \lambda A'S.$$

Zu einer Kugel ist daher (323) hinsichtlich ihres Mittelpunktes S eine Rotationsfläche homolog, die S zum Brennpunkt hat.

Wählt man als Fluchtebene des einen von zwei homologen Räumen die Polarebene des Centrums der Homologie S nach einer in ihm enthaltenen Fläche F_2, so hat die F_2 entsprechende Fläche F_2' S zum Mittelpunkt. Hieraus folgt noch einmal, dafs die von einem Punkte ausgehenden Tripel conjugirter Strahlen von F_2 zugleich Tripel conjugirter Durchmesser einer Fläche F_2' sind. Unter Benutzung des Umstandes, dafs die beiden Endpunkte A', A_1' eines Durchmessers von F_2' aus den Endpunkten einer S enthaltenden Sehne c von F_2 entspringen, leitet Chasles z. B. das Resultat

$$A'S = \mu \frac{d^2}{c}$$

ab, wobei d der zur Sehne c parallele Durchmesser von F_2 ist, μ eine Constante bedeutet (336).

23. Chasles giebt ferner mehrere Anwendungen einer Beziehung zwischen zwei algebraischen hinsichtlich S homologen Flächen (312). Aus zwei homologen Geraden l und l', die in zwei festen homologen Ebenen α und α' liegen, lege man die Tangentialebenen an die homologen Flächen F und F', welche in $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bezw. in $A_1', A_2', \ldots, A_m'$ berühren mögen; man fälle ferner auf α die Lote $A_1P_1, A_2P_2, \ldots, A_mP_m$, auf eine ganz beliebige Ebene β die Lote $A_1'Q_1', A_2'Q_2', \ldots, A_m'Q_m'$. Alsdann besteht, wenn man l und l' in α und α' verschiebt, die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{m} \pm \frac{SA_k}{A_kP_k} : \frac{SA_k'}{A_k'Q_k'} = \text{const.}$$

Bei Flächen zweiter Ordnung reducirt sich die Summe auf zwei Glieder; A_1A_2 und $A_1'A_2'$ laufen durch feste Punkte, die Pole von α und α' nach F_2 und F_2'. Wenn man z. B. die beiden Flächen zusammenfallen läſst, α und β sich ins Unendliche entfernen, so entsteht der Satz: „Treffen die Verbindungslinien eines festen Punktes S mit den Endpunkten A_1, A_2 eines beliebigen Durchmessers einer Fläche F_2 dieselbe zum zweiten Male in den Punkten B_1 und B_2, so besteht die Beziehung

$$\frac{SA_1}{SB_1} \pm \frac{SA_2}{SB_2} = \text{const.}“$$

Nach Chasles' Angabe (343) gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem es sich um ein Ellipsoid oder ein Hyperboloid handelt.

24. Die affine Transformation benutzt Chasles besonders zur Herleitung von Beziehungen unter den Tripeln conjugirter und aufeinander senkrechter Durchmesser eines Ellipsoids (379 ff.). Er bedient sich der Regel: „Eine metrische Beziehung ist invariant gegen alle affinen Transformationen, wenn sie nur Verhältnisse von Paaren unter sich paralleler Strecken und Ebenenstücke enthält, oder wenn sie sich nur auf Volumina bezieht.“ Aus dieser Regel entwickelt Chasles in der That die meisten der oben erwähnten Sätze von Binet, Livet, Petit u. s. w. [VIII, 5, 6]. Auf diese Weise entspringt zunächst die bekannte Relation unter drei conjugirten Halbmessern eines Ellipsoids:

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \text{const.}$$

Sie kann der affinen Transformation unterzogen werden, wenn man ihr die Form giebt:

$$\frac{MA^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{A}^2} + \frac{MB^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{B}^2} + \frac{MC^2}{\mathfrak{M}\mathfrak{C}^2} = \text{const.},$$

wobei $\mathfrak{M}\mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{B}$, $\mathfrak{M}\mathfrak{C}$ die zu MA, MB, MC parallelen Halbmesser einer Hülfskugel sind; es folgt dann (410): „Sind a, b, c drei conjugirte Halbmesser eines Ellipsoids und a_1, b_1, c_1 die zu a, b, c parallelen Halbmesser eines zweiten, so besteht die Relation

$$\frac{a^2}{a_1^2} + \frac{b^2}{b_1^2} + \frac{c^2}{c_1^2} = \text{const.}“$$

Indem das erste Ellipsoid in eine Kugel übergeht, folgt der Satz: „Drei aufeinander senkrechte Halbmesser l, m, n eines Ellipsoids erfüllen die Relation

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \text{const.}“$$

25. Zwei Punktreihen, Strahlenbüschel oder Ebenenbüschel bezeichnet Chasles (428) als „homographisch“, wenn sie in zwei collinearen (homographischen) Räumen oder Ebenen einander entsprechen. Homologe Quadrupel homographischer Gebilde zeigen

gleiches Doppelverhältnis. „Homographische Ebenenbüschel und Punktreihen im Raume erzeugen die eine Geradenschar eines Hyperboloids. Homographische Strahlenbüschel und Punktreihen in der Ebene erzeugen einen Kegelschnitt" (429 ff.).*) Chasles bringt sodann den später auch von Seydewitz gegebenen Nachweis, dafs zwei einer Ebene angehörige collineare Felder drei Doppelpunkte besitzen (433) und giebt ferner (443) die oben [S. 323* geschilderte anschauliche Methode, um gegebene collineare Felder in perspectivische Lage zu bringen. Hieran knüpft sich (448) der Satz: „Zwei collineare Räume können im allgemeinen nicht in perspectivische Lage gebracht werden." Wird ein Strahl des ersten Raumes parallel zu einer Geraden d der Fluchtebene desselben bewegt, so gilt das Analoge von dem homologen Strahle. Deshalb müssen nicht nur die beiden Punkte, welche sich znm Centrum der perspectivischen Beziehung vereinigen sollen, sondern überhaupt irgend zwei homologe Punkte A und A' zwei congruente homologe Strahlenbüschel aussenden, deren Ebenen zu den Fluchtebenen der beiden Räume parallel sind. Zwei zu den Fluchtebenen (und der Homologie-Ebene) parallele homologe Ebenen enthalten nach Magnus' Fassung dieser Regel [XXXII, 2] ähnliche Punktfelder. Den Abschlufs des Werkes bildet ein Nachtrag zu der Transversalentheorie der algebraischen Flächen.

XXXIII. Das Nullsystem.

1. Das Nullsystem kommt zwar bereits 1828 in einer schon oben [XXII, 6] erwähnten Arbeit von Giorgini vor, lediglich aus geometrischen Gesichtspunkten wird es jedoch erst in einer aus dem Jahre 1833 stammenden Abhandlung von Möbius**) erfafst, deren Vorläufer die bereits besprochene Abhandlung über einander zugleich ein- und umgeschriebene Tetraeder aus dem Jahre 1828 ist [XXIII, 17]. Möbius setzt zunächst auseinander, dafs eine bilineare Gleichung zwischen zwei Coordinaten-Tripeln xyz, $x'y'z'$ eine reciproke Beziehung im Raume darstelle. Wenn man sich x', y', z' als Coordinaten von P' fixirt denke, stelle die Gleichung die „Gegenebene" von P' dar, durchlaufe P' eine Gerade l', so drehe sich die Gegenebene um ihre „Gegengerade" l, werde P' in einer Ebene bewegt, so drehe sich die Gegenebene um den „Gegenpunkt" derselben; in gleicher Weise könne man den Punkten, Geraden und Ebenen des (x, y, z)-Raumes Gegenebenen, Gegengeraden und Gegenpunkte im (x', y', z')-

*) Chasles verweist auf die oben [XXIX, 4. 5] besprochenen Noten 9, 15, 16 des Aperçu historique.

**) Möbius, Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume, Crelle's Journ., Bd. 10, 1833, S. 317—341 (Ges. W., Bd. 1, S. 489—515).

Raume zuordnen. Ohne sich mit weiterer Entwickelung „dieser zudem schon mehrfach behandelten reciproken Verhältnisse aufzuhalten", wendet sich Möbius sofort zu dem Falle, dafs jeder Punkt P seiner Gegenebene π angehört, die bilineare Gleichung also verschwindet, sobald x, y, z mit x', y', z' identisch werden. Er gelangt so zu der specielleren Gleichung

$$(bz - cy + f)x' + (cx - az + g)y' + (ay - bx + h)z' \\ - fx - gy - hz = 0;$$

sie zeigt, dafs einem Punkte, mag er in den einen oder anderen Raum gerechnet werden, dieselbe Gegenebene entspricht. Die Gegenpunkte A, B, C dreier Ebenen α, β, γ, die bei Möbius mit den Hauptebenen des — schiefwinkligen — Coordinatensystems zusammenfallen, unterliegen nur der einen Beschränkung, mit dem Schnittpunkte M der Ebenen α, β, γ in einer Ebene μ, der Gegenebene desselben, zu liegen. Die Gegenebene eines Punktes D verbindet die drei Schnittpunkte DBC, β, γ; DCA, γ, α; DAB, α, β. Andererseits gehört der Gegenpunkt D von δ den Ebenen an, welche die Geraden $\beta\gamma$; $\gamma\alpha$; $\alpha\beta$ der Reihe nach mit den Punkten BC, δ; CA, δ; AB, δ verbinden. Von den Tetraedern $ABCD$ und $\alpha\beta\gamma\delta$ sei ein jedes, fügt Möbius bei, in der früher von ihm erörterten Weise dem anderen eingeschrieben. Jetzt könne man allgemein zu jedem beliebigen Polyeder unendlich viele ihm zugleich ein- und umgeschriebene Polyeder construiren; dieselben seien ihm in reciproken Beziehungen der betrachteten Art zugeordnet.

2. Bleibt eine Ebene sich selbst parallel, so durchläuft ihr Gegenpunkt eine bestimmte Gerade von unveränderlicher Richtung, welche die Hauptrichtung des Systems genannt wird (S. 501). Möbius beweist dies zunächst rechnend mit Benutzung der Ebenen, welche zu zwei — ganz willkürlichen — Coordinatenebenen parallel sind. Eine bestimmte dieser Parallelen enthält die Gegenpunkte der zu der Hauptrichtung senkrechten Ebenen. Wird diese „Hauptlinie des Systems" zur z-Axe eines orthogonalen Coordinaten-Systems gemacht, so nimmt die bilineare Gleichung die einfache Form an:

$$xy' - yx' = k(z - z').$$

Hieraus wird abgeleitet: „Die Gegenebene eines Punktes enthält das von ihm auf die Hauptlinie gefällte Lot. Der cot. des Winkels, den sie mit der Hauptlinie bestimmt, ist zu der Länge dieses Lotes proportional. Eine beliebige Gerade, ihre Gegengerade und die Hauptlinie schneiden eine Gerade rechtwinklig." Sodann folgt (S. 510) der wichtige Satz: „Zwei Paare von Gegenlinien gehören derselben Regelschar an." Er ergiebt sich daraus, dafs alle „Doppellinien" (sich selbst entsprechende Gerade des Systems), welche eine Gerade l treffen, zugleich ihre Gegengerade l' schneiden.

Zum Teil begründet Möbius diese Sätze auch durch geometrische Überlegungen. Gegenpunkte von Ebenen, deren Schnittlinien unter sich parallel sind, liegen in einer Ebene, der Gegenebene eines unendlich fernen Punktes. Unter sich parallele Ebenen haben eine unendlich ferne Gerade miteinander gemein. Ihre Gegenpunkte liegen also auf einer Geraden. Wird jede von zwei Ebenen zu sich selbst parallel bewegt, so bleibt auch ihre Schnittlinie zu sich selbst parallel die beiden Gegenpunkte beschreiben also Gerade, welche einer Ebene angehören und deshalb parallel sind; denn ein Schnittpunkt im Endlichen würde zwei verschiedene Gegenebenen besitzen. Möbius erkennt auch, daſs die Gegenebene des unendlich fernen Punktes der Hauptlinie ganz und gar im Unendlichen liegt.

3. Magnus reproducirt 1837*) die bisher geschilderten Entwickelungen und bringt eine sehr interessante neue Beobachtung hinzu. „Dreht man die eine von zwei Figuren, die sich in der beschriebenen „besonderen Art der Reciprocität" gegenüberstehen, durch einen Winkel von 180° um eine die Hauptlinie senkrecht schneidende Gerade, so stehen dieselben sich nunmehr in einem Polarsystem [eines gleichseitigen hyperbolischen Paraboloids] gegenüber." In der That geht die zuletzt entwickelte Gleichung des Nullsystems durch die Substitutionen

$$z' = -z'', \quad y' = y'', \quad x' = -x''$$

in die Gleichung

$$k(z + z'') = xy'' + yx''$$

über, welche die Coordinaten zweier in Bezug auf das hyperbolische Paraboloid

$$xy = kz$$

conjugirten Punkte verknüpft (S. 145).

4. Möbius giebt in der besprochenen Abhandlung (S. 510 ff.) noch statische Betrachtungen an, die nicht unerwähnt bleiben dürfen. Zwei in den windschiefen Geraden p und p' wirkende Kräfte P und P' können auf unendlich viele Weisen durch zwei Kräfte R und R' ersetzt werden. Wird die im allgemeinen willkürliche Wirkungslinie r von R in einer Ebene α bewegt, so geht diejenige der zweiten Kraft, r', beständig durch einen Punkt A von α; r und r' sind deshalb Gegengeraden eines Nullsystems. Nachdem man zwei p enthaltenden Ebenen α und β ihre Schnittpunkte A und B mit p', einer Ebene γ, welche p und p' in $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ schneidet, einen bestimmten Punkt C von $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ zugeordnet hat, kann das Nullsystem in der oben besprochenen Weise construirt werden. Die Linie r darf nicht mit einer Doppellinie des Nullsystems, welche zwei Gegengeraden des Systems zugleich trifft, identisch sein; auch aus dieser statischen Betrachtung folgt sofort, daſs zwei Paare von

*) Vergl.: a. a. O. S. 168***, § 27, S. 189 ff.

Gegengeraden einer Regelschar angehören. Wird die Wirkungslinie r von R parallel zur Hauptlinie des Nullsystems, so tritt statt R' ein Kräftepaar ein, welches in die Gegenebene eines beliebigen Punktes von r verlegt werden kann. Nach Poinsot's Entwickelung besitzen nun zwei gleichwertige Systeme von Kräften in Bezug auf jede Gerade das gleiche Moment. Ein vorliegendes System von Kräften besitzt mithin für alle Doppellinien eines Nullsystems, das durch zwei ihm gleichwertige Kräfte in der beschriebenen Weise bestimmt wird, das Moment Null (S. 513). Mit Rücksicht auf diese statischen Betrachtungen hat Möbius seine recht glücklich gewählten Bezeichnungen 1837 verlassen.*) Er bezeichnet als „Nullebene" eines Punktes die ihr in Bezug auf ein System von Kräften zukommende Gegenebene, andererseits den Punkt als den „Nullpunkt" der Ebene. Den Namen „Nullsystem" scheint erst Staudt**) gebraucht zu haben.

5. Aus statischen Betrachtungen heraus war Giorgini in der oben***) bereits erwähnten, 1827 verfafsten und 1828 erschienenen Arbeit zu dem Nullsystem gelangt. Ein rechtwinkliges Coordinatensystem sei so gewählt, dafs ein gegebenes Kräfte-System durch eine der z-Axe angehörige Einzelkraft Q und ein der (x, y)-Ebene angehöriges Kräftepaar von dem Moment M ersetzt werden kann. Alsdann ist

$$Q(\beta x - \alpha y) = M(\gamma - z)$$

die „Maximalmomentenebene" (Nullebene) des Punktes α, β, γ. Aus der Gleichung heraus beweist nun Giorgini: „Dreht sich eine Ebene um einen Punkt P, so beschreibt der ihr entsprechende Punkt die P zugehörige Ebene (S. 247)." Durchläuft der Punkt P eine Gerade r, so dreht sich die zugehörige Ebene um eine zweite Gerade r'. Die Beziehung zwischen r und r' ist wechselseitig (S. 249); man kann das Kräftesystem durch zwei Kräfte R, R' mit den Wirkungslinien r, r' ersetzen. Zwei auf r und r' abgetragene Strecken, welche R und R' in einem vorgegebenen Mafsstabe darstellen, sind gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders von constantem Volumen (S. 254).

Dieser Lehrsatz wird auch von Gergonne†) erwiesen, jedoch ausdrücklich auf Chasles zurückgeführt. In verschiedenen Abhandlungen, welche Chasles über äquivalente Systeme von Kräften veröffentlicht hat, kommt er wiederholt von Neuem vor.††) Es ist

*) Möbius, Lehrbuch der Statik, Leipzig 1837, Bd. 1, § 84, S. 144 ff. (August Ferdinand Möbius gesammelte Werke, Bd. 3, herausgegeben von F. Klein, Leipzig 1886, S. 1—497 (S. 118 ff.)).

**) v. Staudt, Geometrie der Lage, Nürnberg 1847, S. 191.

) a. a. O. S. 192.

†) Gergonne, Démonstration d'un théorème de M. Chasles, Gerg. Ann., Bd. 18, 1827 u. 1828, S. 372—377.

††) Man vergleiche die Abhandlungen: Chasles, Mémoire de géometrie pure, sur les systèmes de forces, et les systèmes d'aires planes; et sur les polygones, les polyèdres, et les centres des moyennes distances,

wohl möglich, dafs Chasles gerade von dieser Seite her zum Nullsystem gelangt ist. Aus dem Giorgini-Chasles'schen Satze lassen sich in der That sehr einfach rein geometrische Eigenschaften des Nullsystems ableiten. Der kürzeste Abstand h zweier conjugirten Geraden hängt nach dem Satze mit den Winkeln φ_1 und φ_2, welche sie mit der Axe des Nullsystems einschliefsen, z. B. durch die Gleichung

$$\frac{1}{h} \cdot \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin \varphi_2 \sin \varphi_1} = \text{const.}$$

zusammen.

6. Als Chasles 1837*) ein erstes Mal zum Nullsystem vordrang, gab er allerdings den Zusammenhang des Nullsystems mit der Statik nur ganz kurz an, ohne den Entwickelungsgang anzudeuten (150, 151). Viel wichtiger ist ihm offenbar der Zusammenhang mit der Geometrie der Bewegung. Bei einer stetigen Bewegung bilden in jedem Augenblick die Normalebenen der Bahnen, welche die Punkte einer Figur beschreiben, eine zu ihr selbst reciproke Figur. Wenn man andererseits in dem Mittelpunkte der Strecke, welche Anfangs- und Endlage eines Punktes verbindet, eine zu ihr senkrechte Ebene

Quet. Corr., Bd. 6, 1830, S. 92—126 (S. 110). Chasles, Théorèmes généraux sur les systèmes de forces et leur moments, Liouv. Journ., Bd. 12, 1847, S. 213—224 (S. 222). Nimmt man bei n durch Strecken dargestellten Kräften einmal den Schwerpunkt der Endpunkte, dann den der Anfangspunkte, so bleibt die Verbindungslinie der Richtung nach ungeändert, wenn man die Kräfte irgendwie durch ein gleichwertiges System von Kräften ersetzt, die Gröfse der Strecke aber ist zu der Anzahl n der Kräfte des Systems umgekehrt proportional. Dieser Satz wird in der Abhandlung entwickelt: Chasles, Sur les propriétés des centres des moyennes distances des points d'application de plusieurs forces, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 106—108. Für den speciellen Fall, dafs die Kräfte auf einen Punkt wirken, führt Chasles das Theorem auf Gérono zurück. Verschiedene Lösungen einer hierauf bezüglichen Aufgabe werden mitgeteilt: Gerg. Ann., Bd. 16, 1825 u. 1826, S. 30—31. Für ein Kräftesystem, welches auf eine Einzelkraft reducirt werden kann, hat Bordoni den Satz erwiesen. Vergl.: Bordoni, Nuovo rapporto tra la teoria del centro di gravitá e quella della composizione delle forze, Mem. di mat. e fis. d. soc. ital. Bd. 15, parte mat., Verona 1811, S. 301—319. Pagani erwies 1839 das Theorem nochmals für den Fall von Kräften, die auf einen Punkt wirken. Vergl.: Pagani, Nouveau théorème de statique qui comprend, comme cas particulier, le célèbre théorème de Leibnitz, Bull. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 6_2, 1839, S. 497. Das im Titel erwähnte Theorem von Leibniz sagt aus, dafs die Kräfte SA, SB, SC, ... im Gleichgewicht stehen, wenn S der Schwerpunkt der Gruppe ABC ... ist. Chasles wies hierauf nochmals auf seine zuletzt citirte Abhandlung hin. Vergl.: M. Quetelet communique une lettre qu'il a reçue de M. Chasles, au sujet d'un théorème de statique, présenté par M. Pagani etc., Bull. de l'Ac. de Bruxelles, Bd. 7_1, 1840, S. 261—262. Möbius entwickelt und erweitert den Tetraedersatz von Chasles in der Abhandlung: Möbius, Beweis eines neuen, von Herrn Chasles in der Statik entdeckten Satzes, nebst einigen Zusätzen, Crelle's Journ., Bd. 4, 1829, S. 179—184 (Ges. W., Bd. 3, S. 499—506). Im ersten Bande seiner Statik kommt er alsdann auf diese Sätze zurück (Ges. W., Bd. 3, S. 100 ff.).

*) Chasles, Abhandlung des Aperçu historique (Nr. 143—151).

construirt, so ist eine aus solchen Ebenen gebildete Figur reciprok zu den drei Figuren, welche die Anfangs-, End- und Mittelpunkte der zugehörigen Strecken bilden. Chasles verspricht an späterer Stelle rein geometrische Beweise dieser Sätze zu geben; vorläufig beschränkt er sich auf eine rechnende Behandlung.*) Auf das wichtige Resultat von Nr. 155 wurde schon oben verwiesen [XXXII, 15].

7. 1839 gab Chasles die oben geschilderte rein geometrische Definition des Nullsystems.**) Sie ist in dem Satze von Möbius enthalten, dafs zwei Paare aa_1 und bb_1 von Gegenlinien eines Nullsystems einer Regelschar angehören, welche noch unendlich viele Paare cc_1, dd_1, ... von Gegenlinien enthält. Die von einem Punkte P ausgehenden Strahlen l; m; n ..., welche a, a_1; b, b_1; c, c_1; ... treffen, gehören als Leitstrahlen des Nullsystems einem Strahlenbüschel an. Ebene und Mittelpunkt desselben bezeichnete Chasles als conjugirt und benutzte, um die Strahlen der Regelschar einander zuzuordnen, ein erstes beliebig gegebenes Strahlenbüschel. Dafs man aber zwei erste Paare conjugirter Geraden eines Nullsystems — wie es diese Erzeugung verlangt — aus einer Regelschar beliebig entnehmen kann, folgt aus den statischen Betrachtungen von Möbius. Ein directer geometrischer Beweis der Erzeugung des Nullsystems folgt sofort daraus, dafs eine involutorische Regelschar aa_1, bb_1, cc_1, ... eine jede Ebene in einer Involution AA_1, BB_1, CC_1, ... trifft, welche einem Kegelschnitt angehört und deshalb von den Strahlen eines Büschels ausgeschnitten wird. Indes hat diese Betrachtung, welche

---

*) Sind (x, y, z) und (x', y', z') Anfangs- und Endpunkte der von einem Punkte beschriebenen Bahn, so ist

$$x' = l + x\sqrt{1-(L^2+M^2+N^2)} + Mz - Ny$$
$$+ \frac{1-\sqrt{1-(L^2+M^2+N^2)}}{L^2+M^2+N^2} \cdot L(Lx + My + Nz).$$

Durch cyklische Verschiebung von x, y, z; x', y', z' und der Constanten l, m, n; L, M, N entstehen zwei weitere Formeln. Mit Hülfe derselben liefsen sich, wie Chasles anführt, die aufgestellten Sätze leicht erweisen. Für die unendlich kleine Bewegung führt Chasles dies etwas näher aus. Die Incremente, welche die Coordinaten eines beliebigen Punktes bei einer unendlich kleinen Verschiebung eines Körpers erfahren, seien, wie Euler nachgewiesen habe — Chasles citirt die oben [S. 190***] an vorletzter Stelle genannte Abhandlung — in der Form darstellbar

$$\delta x' = \delta l - y'\delta N + z'\delta M,\quad \delta y' = \delta m - z'\delta L + x'\delta N,$$
$$\delta z' = \delta n - x'\delta M + y'\delta L.$$

Die zum Bahnelemente senkrechte Ebene sei also

$$x\delta x' + y\delta y' + z\delta z' = x'\delta l + y'\delta m + z'\delta n.$$

In dem Umstande, dafs diese Gleichung auch in x', y', z' nur linear sei, liege der Beweis für die beschriebene Dualitätsbeziehung.

**) Vergl. XXIX, 12.

Staudt*) 1856 beiläufig ausgesprochen hat, Chasles ziemlich fern gelegen. Er kommt nämlich 1843 nochmals flüchtig auf diesen Satz zurück**), nachdem erkannt ist, dafs jedes durch zwei conjugirte Gerade eines Nullsystems gelegte Hyperboloid noch unendlich viele andere Paare conjugirter Strahlen enthält. Er fügt dann (S. 1429) ausdrücklich hinzu, dafs ein rein geometrischer Beweis dieser Thatsache schwierig sein dürfte. Der Satz wird mit den für die unendlich kleine Bewegung eines Körpers gültigen Gesetzen verknüpft. Einer jeden Ebene des Körpers wird ihr „Brennpunkt“ (foyer) zugeordnet, der einzige Punkt, welcher bei der Bewegung des Körpers senkrecht zu ihr sich bewegt. Wird eine Ebene um eine von zwei conjugirten Geraden gedreht, so beschreibt ihr Brennpunkt die andere. Die unendlich kleine Bewegung kann auf unendlich viele Weisen aus Rotationen um zwei windschiefe Axen zusammengesetzt werden. Die beiden Axen, von denen die eine willkürlich ist, sind miteinander conjugirt. Ein Leitstrahl des Nullsystems wird als Gerade eingeführt, deren sämtliche Punkte sich zu ihr selbst senkrecht bewegen. Um eine Gerade als Leitstrahl zu kennzeichnen, genügt es, diese Eigenschaft für einen ihrer Punkte nachzuweisen. Da insbesondere jeder Leitstrahl entweder jeden einzelnen oder keinen von zwei conjugirten Strahlen trifft, so gelangt man zu den oben erwähnten Regelscharen und der zugehörigen Erzeugung des Nullsystems. Jede Gerade, welche zwei conjugirte Gerade senkrecht schneidet, steht zu der Axe der Bewegung senkrecht, welche nur in sich verschoben wird. Legt man also durch drei Punkte A, B, C die Ebenen α, β, γ senkrecht zu den Richtungen, in welchen dieselben fortschreiten, so schneidet die Axe die drei Geraden rechtwinklig, welche zu BC und $\beta\gamma$, CA und $\gamma\alpha$, AB und $\alpha\beta$ zugleich senkrecht stehen. Besondere Aufmerksamkeit wendet Chasles auf die Paare conjugirter Strahlen, die einen rechten Winkel miteinander bestimmen. Die Charakteristik einer Ebene, welche bei der unendlich kleinen Bewegung in ihr selbst verbleibt und das in ihrem Brennpunkte errichtete Lot stehen in dieser Beziehung. Es folgt das Resultat von 1830 [XXII, 4], dafs Punkte einer Raumcurve R_3 eine auf einen beliebigen Ort gerichtete Bewegung aufweisen. · Den Abschlufs bilden Formeln für die Zerlegung einer unendlich kleinen Bewegung in zwei Rotationen. Hierbei knüpft Chasles offenbar an Poinsot's Regel an, nach der die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen auf diejenige von Kräften zurückgeführt werden kann [XXII, 6].***)

*) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, erstes Heft, Nürnberg 1856, S. 57 (Nr. 92).

**) Chasles, Propriétés géométriques relatives au mouvement infiniment petit d'un corps solide libre dans l'espace, Comptes rendus, Bd. 16, 1843, S. 1420—1432.

***) Eine ausführliche Behandlung der in der erwähnten Abhandlung entwickelten Anschauungen findet sich in der Schrift: De Jonquières, Mélanges de géométrie pure, Paris 1856 (Cap. 1, S. 1—54).

8. Chasles ist in einer Reihe von zusammenhängenden, 1860 und 1861 veröffentlichten*) Noten auf diese Entwickelungen zurückgekommen. Dieselben beziehen sich hauptsächlich auf das „Déplacement fini", auf die Beziehungen zwischen Anfangs- und Endlage eines Körpers, welcher eine endliche stetige Bewegung durchgemacht hat. Doch weist überall die Betrachtung auch auf die unendlich kleine Bewegung hin. Chasles betrachtet zunächst in einer Ebene befindliche congruente Figuren und unterscheidet nunmehr gleichstimmige und ungleichstimmige Figuren. Congruente gleichstimmige Figuren können durch Drehung um einen Pol O ineinander übergeführt werden. Derselbe gehört der Geraden an, welche in dem Mittelpunkte A_0 der Verbindungsstrecke zweier homologen Punkte A und A' zu derselben senkrecht steht. AA' umhüllt eine Parabel, wenn A und A' über zwei homologe Gerade l und l' geführt werden. A_0 beschreibt die Scheiteltangente dieser Parabel, deren Brennpunkt O ist (1 — 6).

Zwei homologe Strahlenbüschel der beiden Felder mit den Scheiteln P, P' erzeugen — da sie gleichstimmig congruent sind — einen Kreis, welcher den Pol O enthält. Ein Punkt Q der Ebene legt mit dem Pole und je einem der beiden Punkte, die ihm entsprechen, je nachdem man ihn in die erste oder zweite Ebene rechnet, je einen derartigen Kreis fest. Dreht sich die Verbindungslinie zweier homologen Punkte A und A' um den Punkt Q, so beschreibt A den zweiten der bezeichneten Kreise (11). Bei der unendlich kleinen Bewegung geht der Kreis in den Ort der Punkte über, deren Bewegung auf Q gerichtet ist. Auf diese Weise war ein Satz, den Chasles schon früher aus elementaren Sätzen entwickelt hatte, auf naturgemäfse Weise begründet [XXII, 7]. Das Erzeugnis zweier homologen Curven C_m und C'_m ist, wie Chasles noch anführt, eine Curve $2m^{\text{ter}}$ Klasse und $m(m+1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

In ungleichstimmig congruenten Figuren einer Ebene erzeugen die Paare homologer Strahlenbüschel gleichseitige Hyperbeln mit einer gemeinsamen Asymptote (42). Durch Umwendung um diese Asymptote und durch eine Verschiebung längs derselben kann (36) die zweite Figur mit der ersten zur Deckung gebracht werden. Dieses Resultat kann auch durch Umwendung der zweiten Figur um eine beliebige Gerade l' derselben und durch eine Drehung bewirkt werden. Der Mittelpunkt derselben ist der Brennpunkt F der Parabel, welche l'

*) Chasles, Propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable, Comptes rendus, Bd. 51, 1860, S. 855—863, S. 905—914. Chasles, Sur le déplacement d'une figure de forme invariable dans l'espace, Comptes rendus, Bd. 52, 1861, S. 77—85, 189—197, 487—501. Meine Hinweise beziehen sich auf die durchlaufenden Nummern der einzelnen Sätze. Die beiden ersten Noten (Bd. 51) umfassen die Nummern 1—62, die drei anderen (Bd. 52) die Nummern 63—150.

mit der homologen Geraden l erzeugt. F und l' entsprechen sich in einer reciproken Beziehung (37—41). Zwei collineare Figuren — das sind zwei congruente Figuren der einen oder anderen Art — haben im allgemeinen drei Punkte und drei Gerade, die Ecken und Seiten eines Dreiecks, miteinander gemein (45). Von diesem Dreieck ist bei gleichstimmig congruenten Figuren nur eine Ecke reell, die beiden anderen fallen mit zwei bestimmten imaginären Punkten auf der unendlich fernen Geraden zusammen. Bei ungleichstimmig congruenten Figuren ist zwar das Dreieck reell, jedoch haben sich zwei Seiten mit der unendlich fernen Geraden vereinigt. Die gemeinschaftliche Asymptote a der oben erwähnten gleichseitigen Hyperbeln enthält seine beiden einander unendlich nahen Ecken; seine letzte Ecke ist der unendlich ferne Punkt der zu a senkrechten Geraden. Ähnliche ebene Figuren hatte Chasles schon 1837*) als collineare Figuren bezeichnet und daraus den Schlufs gezogen, dafs sie drei Punkte und deren Verbindungslinien entsprechend gemein haben. Aus dem Zusatze, dafs nur eine Ecke und eine im Unendlichen liegende Seite des fraglichen Dreiecks reell seien, zeigt sich, dafs Chasles den Fall ungleichstimmig ähnlicher Figuren aufser Betracht gelassen hatte.

9. Chasles beweist nun (46) nach der 1838 von Möbius benutzten Methode**), dafs zwei congruente Punktreihen ABC ... und $A'B'C'$ ... im Raume durch Drehung um eine Axe l_1 zur Deckung gebracht werden können. Die Ebenen, zu denen AA', BB', CC', ... in ihren Mittelpunkten A_0, B_0, C_0, ... senkrecht stehen, haben diese Gerade miteinander gemein. A_0, B_0, C_0, ... selbst gehören einer Geraden l_0 an, welche mit den Trägern der beiden Punktreihen gleiche Winkel bestimmt.

Durch zwei Drehungen, deren Axen einen rechten Winkel miteinander bestimmen, kann man zwei congruente Punktfelder auf unendlich viele Weisen zur Deckung bringen. Wenn sich die homologen Geraden a und a' der Felder auf der Schnittlinie der sie tragenden Ebenen α und α' begegnen, so kann man durch eine Drehung um eine zu aa' senkrechte Axe l_1 zunächst a mit a' zur Deckung bringen. Aus der neuen Lage, welche die mit l_1 starr verbundene Ebene α hierbei annimmt, geht sie durch eine Drehung um a' in α' über. Chasles betrachtet (52) einmal den Specialfall, in welchem a' in die Schnittlinie der beiden Ebenen fällt. Ein zweites Paar homologer Geraden b, b' wird von der Ebene γ_0 oder $A_0B_0C_0$ ... ausgeschnitten, welche die Mittelpunkte der Verbindungsstrecken homologer Punkte von α und α' enthält (50). Die Axe der Drehung, welche b in b' überführt, fällt mit einer dieser Sehnen, welche zu

*) Aperçu historique, S. 549.

) a. a. O. S. 192 (S. 548).

γ_0 senkrecht steht, zusammen. Ihr Mittelpunkt, der Brennpunkt der Ebene γ_0, ist der gemeinsame Punkt der Ebenen, auf denen die Sehnen AA', BB', CC', ... in ihren Mittelpunkten A_0, B_0, C_0 ... senkrecht stehen. Von jedem Punkte der Schnittlinie zweier congruenten Ebenen gehen zwei homologe Gerade derselben aus. Die Parabeln, welche dieselben umhüllen, berühren die Schnittlinie in den auf ihr enthaltenen homologen Punkten. Die erwähnten Geradenpaare werden von den Tangentialebenen einer abwickelbaren Fläche F_4 ausgeschnitten, welche eine Raumcurve R_3 zur Cuspidalcurve hat und aus jedem Raumpunkte drei Tangentialebenen empfängt. Die Schnittlinie zweier Tangentialebenen von F_4 hat mit α und α' zwei homologe Punkte gemein (55—57). Zwei homologe Curven C_m und C_m' erzeugen eine Regelfläche F_{2m} (58).

10. Die Überführung eines Körpers aus einer Lage in eine zweite, welche er durch eine stetige Bewegung erreicht hat, kann [XXII, 4—6; XXXII, 4] durch eine Schraubenbewegung herbeigeführt werden. Chasles gewinnt den Satz (66), wie oben*) schon angedeutet wurde, durch Combination der Theoreme, dafs gleichstimmig congruente Figuren auf der Kugel und in der Ebene durch eine blofse Drehung ineinander übergeführt werden können. Chasles wendet sich (69) zu dem tetraedralen Complex, welchen die Verbindungslinien homologer Punkte, oder was dasselbe ist (70), die Schnittlinien homologer Ebenen zweier congruenten Körper erfüllen. Bewegt sich eine Sehne in einer Ebene, so durchlaufen ihre Endpunkte die beiden der Ebene angehörigen homologen Geraden, die Sehne umhüllt also eine Parabel (74). Die beiden homologen Ebenen, welche sich in einer Sehne schneiden, beschreiben projectivisch-congruente Ebenenbüschel, wenn ein Punkt P der Sehne festgehalten wird. Die beiden Axen der Büschel sind die Sehnen, welche P im zweiten und ersten Körper begrenzt. Die P enthaltenden Sehnen erfüllen also einen Kegel zweiten Grades. Mit dem Kegel, welcher ihm im zweiten Körper entspricht, wenn er selbst dem ersten zugerechnet wird, hat er eine der durch P begrenzten Sehnen und eine Raumcurve R_3 gemein, deren Punkte die betrachteten Sehnen im zweiten Körper begrenzen. Jede Gerade, welche diese Curve R_3 zweimal schneidet, trifft die entsprechende Gerade, wenn sie dem zweiten Körper zugerechnet wird, und ist deshalb eine Sehne (75). Aus den Entwickelungen, die vorher für den entsprechenden Satz der Ebene angedeutet waren, geht unzweifelhaft hervor, dafs Chasles etwa das geschilderte Beweisverfahren benutzt hat, das aber fast nur durch die Reihenfolge der Theoreme gekennzeichnet ist. Aus den zum Teil schon 1830 [XXII, 4] aufgestellten Theoremen folgt noch, dafs bei der unendlich kleinen Bewegung eines Körpers einem Punkte P die Punkte einer Raumcurve R_3 zustreben, welche P selbst enthält.

) Vergl. S. 345.

11. Mittels einer Drehung durch den Winkel α um die Axe s und einer Parallelverschiebung durch die Strecke e längs s können zwei gleichstimmig congruente Körper ineinander übergeführt werden. Zwischen dem Neigungswinkel φ und dem kürzesten Abstande r, den eine beliebige Sehne AA' mit der Axe bestimmt, besteht also (77) die Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi = r \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}e}.$$

Da nun r auf der einen Seite durch den Mittelpunkt A_0 der Strecke AA' begrenzt wird, so sind (105) die Sehnen Tangenten der Bahnen, welche die Punkte des aus den Mittelpunkten der Sehnen gebildeten „Mittelkörpers" („corps-milieu") bei einer bestimmten unendlich kleinen Bewegung beschreiben, wie es der 1830 [XXII, 4] aufgestellte und 1837 [XXXIII, 6] erwiesene Satz verlangt. Die Punkte einer Geraden l_0 des Mittelkörpers bewegen sich derart, daſs ihre Normalebenen eine Gerade l_1 mit einander gemein haben. Eine Drehung um l_1 führt die homologen Geraden l und l' der beiden Körper ineinander über, deren Mittelgerade l_0 ist. Nach den nun unmittelbar sich ergebenden Eigenschaften des Nullsystems ist die Beziehung zwischen l_1 und l_0 offenbar eine wechselseitige. Die Überführung des ersten Körpers in den zweiten kann offenbar auf unendlich viele Weisen durch zwei aufeinander folgende Rotationen um zwei zueinander windschiefe Axen, l und l_1, bewirkt werden. Man hat zuerst, durch eine Drehung um l_1, l mit seiner homologen Geraden l' zur Deckung zu bringen und kann den ersten Körper aus der so erlangten Zwischenlage in den zweiten Körper durch eine Drehung um l' überführen. Eine der beiden Axen l und l_1 kann willkürlich gewählt werden. Diesen Zweck hatte Möbius mit seiner oben [XXXIII, 9] nochmals angeführten Construction verfolgt. Der Mittelkörper ist (104) auf die beiden gegebenen collinear — genauer affin — bezogen. Aus diesem Grunde entsprechen sich l und l_1 in einer reciproken Beziehung, die eine Gerade dreht sich (122) um einen Punkt, wenn die andere in einer Ebene verbleibt. Nebenbei ergiebt sich der oben [XXXIII, 8] angeführte Satz über die Überführung zweier ungleichstimmig congruenten Figuren einer Ebene ineinander durch eine Umwendung und eine Drehung. Trägt man auf den im ersten Körper festen Axen l und l_1 Strecken auf, von denen jede zu dem sinus der halben zugehörigen Rotation proportional ist, so erhält man gegenüberliegende Kanten eines Tetraeders von constantem Volumen. Diese metrische Relation führt Chasles (129) auf Rodrigues*) zurück.

*) Rodrigues, Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solide dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produire, Liouv. Journ., Bd. 5, 1840, S. 380—440 (S. 396).

Chasles wendet sich nunmehr zu verschiedenen Constructionen für die Axe der Schraubenbewegung, welche zwei gleichstimmig congruente endlich entfernte Körper ineinander überführt. Die zugehörige unendlich kleine Bewegung des Mittelkörpers besitzt die gleiche Axe. Hieraus ergiebt (147) sich die Regel: „Man construire die Ebenen α, β, γ, zu denen die Sehnen AA', BB', CC', in ihren Mittelpunkten A_0, B_0, C_0 senkrecht stehen, und construire die drei Geraden a_1, b_1, c_1, welche B_0C_0 und $\beta\gamma$, C_0A_0 und $\gamma\alpha$, A_0B_0 und $\alpha\beta$ zugleich senkrecht schneiden. Die Axe schneidet a_1, b_1, c_1 zugleich senkrecht." Sind in einem Punkte P des Raumes die Punkte Q' und R der beiden congruenten Körper vereinigt, so trifft das von P auf QR' gefällte Lot, da es zwei für die unendlich kleine Bewegung conjugirte Gerade senkrecht schneidet, ebenfalls die Axe unter einem rechten Winkel. Nachdem Chasles noch Giorgini's Construction [XXII, 6] für die Axe ausführlich begründet hat, schliefst er seine Arbeit mit zahlreichen Litteraturnachweisen. Unter Hinweis auf den Aperçu historique fügt Chasles (S. 501) noch die Bemerkung hinzu, dafs die angeführten Entwickelungen auch auf ähnliche Figuren und allgemeiner auf collineare Figuren übertragen werden können. Die meisten oben angeführten Sätze über den Sehnencomplex lassen sich in der That augenblicklich auf den durch zwei collineare Räume erzeugten Complex ausdehnen.

12. Ein Kräftesystem läfst sich im allgemeinen durch sechs Einzelkräfte ersetzen, welche in gegebene Wirkungslinien fallen*). Jedoch wird dies unmöglich, wenn die sechs Geraden ein System im Gleichgewicht befindlicher Kräfte enthalten. Bei der näheren Untersuchung dieser Fragen wurde man wieder auf das Nullsystem zurückgeführt. Legt man bei einem System von sechs im Gleichgewicht stehenden Kräften die Wirkungslinien der fünf ersten fest, so beschreibt, weil sechs Bedingungen des Gleichgewichts vorliegen, die Wirkungslinie der letzten einen Complex, oder, wie es Möbius

*) Indem man ein Kräftesystem durch seine drei Componenten nach den Coordinatenaxen und die Momente in Bezug auf diese Axen als gegeben ansah, hatte man implicite von dieser Anschauung Gebrauch gemacht, wobei drei von den sechs Geraden mit den Axen zusammenfielen, die drei anderen die unendlich fernen Geraden der Coordinatenebenen waren. Möbius hat den oben angeführten Satz zuerst (1838) in der folgenden Weise umgeformt: „Eine jede unendlich kleine Bewegung eines Körpers kann aus Rotationen um sechs im allgemeinen beliebige Gerade zusammengesetzt werden." (Vergl.: a. a. O. S. 192** (S. 563 ff.)) Einen speciellen Fall dieses Satzes kann man in dem ersten der beiden folgenden Sätze von Giorgini erblicken: „Eine unendlich kleine Verschiebung eines Körpers kann aus Schraubenbewegungen um drei Axen zusammengesetzt werden, die nicht zu einer Ebene parallel sind, und aus zwei Schraubenbewegungen um Axen, die mit der Axe der gegebenen unendlich kleinen Verschiebung dieselbe Gerade senkrecht schneiden." Vergl.: a. a. O. S. 192* (S. 38 u. S. 36).

ausdrückt*), man kann von derselben verlangen, dafs sie eine gegebene Gerade schneidet und einen gegebenen Punkt enthält. Sie ist dann eindeutig bestimmt. Schneiden sich nämlich die Wirkungslinien zweier Kräfte R und R', von denen jede mit fünf in gegebenen Geraden wirkenden Kräften im Gleichgewicht steht, so erhält man durch Zusammensetzung von R und R' und durch Addition der beiden Kräfte, welche in jeder der fünf gegebenen Geraden liegen, ein neues System von sechs Kräften im Gleichgewicht. Die beiden Componenten R und R' können in beliebiger Gröfse angenommen werden. Die Wirkungslinie der sechsten Kraft beschreibt daher, wenn sie einen Punkt enthalten oder in eine Ebene fallen soll, einen Strahlenbüschel, falls nicht jeder Strahl des betreffenden Bündels oder Strahlenfeldes der Bedingung genügt. Diese Ausnahmen treten aber, wie Möbius hervorhebt, nur dann ein, wenn die Wirkungslinien der fünf Kräfte eine gemeinsame Transversale l besitzen. Alsdann genügt jede Gerade, welche l trifft, der Bedingung (S. 142).

Die Wirkungslinie einer Kraft ist, wie Möbius ebenfalls ausführt, eindeutig durch einen ihrer Punkte bestimmt, wenn sie mit vier in gegebenen Geraden wirkenden Kräften im Gleichgewicht steht. Sie trifft, falls dieselben reell vorhanden sind, die gemeinsamen Transversalen der vier gegebenen Geraden. Beschreibt eine von sechs Geraden, welche im Gleichgewicht befindliche Kräfte tragen, einen Strahlenbüschel, während die übrigen festgehalten werden, so wird eine jede der letzteren eine Kraft vom Werte Null für einen Strahl des Büschels aufnehmen, der dann allein von den Wirkungslinien der vier anderen Kräfte in der beschriebenen Weise abhängt. Auf diese Weise, durch Verknüpfung zweier Resultate von Möbius, hat Sylvester**) das schöne Theorem gewonnen: „Je vier von fünf gegebenen Geraden bestimmen ein Paar gemeinsamer Transversalen. Die fünf so entstandenen Strahlenpaare schneiden auf einer beliebigen Ebene Punktepaare aus, deren Verbindungslinien Strahlen eines Büschels sind. Jeder Strahl desselben bildet mit den gegebenen eine Gruppe von sechs Strahlen „in Involution", längs deren im Gleichgewicht befindliche Kräfte wirken" (S. 742). Sylvester entwickelt im Anschlufs hieran, nach Einführung der Paare conjugirter Geraden, seine bekannte Definition des Nullsystems. Jeder Leitstrahl desselben trifft zwei homologe Strahlen zweier projectivischen Strahlenbüschel, welche die Verbindungslinie der Scheitel entsprechend gemein haben.

13. Sylvester hat dann diese durch statische Betrachtungen ge-

*) Möbius, Lehrbuch der Statik, Bd. 1, §§ 98 u. 99 (Ges. W. Bd. 3, S. 138 ff.).

**) Sylvester, Sur l'involution des lignes droites dans l'espace considérées comme des axes de rotation (Note présentée par M. Chasles), Comptes rendus, Bd. 52, 1861, S. 741—745.

wonnenen Resultate auf rein rechnendem Wege bestätigt. Die Abhandlung*) ist bekanntlich ebenso wie eine von ihr hervorgerufene Entwickelung von Cayley**) für die Geschichte der Liniengeometrie von grofser Bedeutung. Ich kann jedoch an dieser Stelle nicht auf dieselben eingehen, mufs aber noch der Bemerkungen gedenken, welche Chasles***) an die statischen Entwickelungen Sylvester's geknüpft hat. Er leitet zunächst aus dem Princip der virtuellen Verrückungen den Satz ab: „Erfährt ein Körper eine unendlich kleine Verschiebung, so können im Gleichgewicht befindliche Kräfte in irgend sechs Geraden angebracht werden, die auf den Bahnen von sechs Punkten in deren Anfangspunkten senkrecht stehen, [d. h. in sechs Leitstrahlen eines Nullsystems]. Sämtliche Punkte einer solchen Geraden werden senkrecht zu ihr fortbewegt" (S. 745). Auch mit Benutzung einer endlichen stetigen Bewegung eines Körpers kann man nach den ausführlich geschilderten Entwickelungen leicht sechs Gerade der erwähnten Art construiren. Chasles hebt ferner (S. 1042) hervor, dafs sechs Gerade, von denen jede einen Punkt einer Raumcurve R_3 trifft und der zugehörigen Schmiegungsebene angehört, ebenfalls der Bedingung genügen, denn die Raumcurve könne so bewegt werden, dafs jeder ihrer Punkte senkrecht zu seiner Schmiegungsebene fortschreitet.†) Chasles kann nun auch umgekehrt erweisen: „Die Wirkungslinien a, b, c, d, e, f von sechs im Gleichgewicht befindlichen Kräften sind Leitstrahlen eines Nullsystems." Bei einer bestimmten unendlich kleinen Bewegung eines a, b, c, d, e, f starr verbindenden Körpers bewegt sich nämlich jeder Punkt einer der Geraden a, b, c, d, e zu ihr selbst senkrecht (S. 1096). Dasselbe gilt dann nach dem Princip der virtuellen Verrückungen für f. Werden a, b, c, d von $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, hingegen a, b, c, e von $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ zugleich getroffen, so handelt es sich um eine unendlich kleine Bewegung, die sich aus zwei Rotationen, sowohl um $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}_1$, als auch um $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{d}_1$ zusammensetzen läfst; eine solche unendlich kleine Bewegung ist möglich, weil $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{e}_1$, welche a, b, c zugleich treffen, derselben Regelschar angehören. Auch die Paare $\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1$; $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1$; $\mathfrak{c}\mathfrak{c}_1$ der Geraden, welche b, c, d, e; a, c, d, e; a, b, d, e zugleich treffen, bestehen aus je zwei conjugirten Rotationsaxen der unendlich kleinen Be-

*) Sylvester, Note zur l'involution de six lignes dans l'espace, ibidem, S 815—817.

**) Cayley, Note relative aux droites en involution de M. Sylvester, ibidem, S. 1039—1042.

***) Chasles, Observation, ibidem, S. 745—746. Observation, ibidem, S. 1042—1043. Sur les six droites qui peuvent être les directions de six forces en équilibre. — Propriétés de l'hyperboloïde à une nappe et d'une certaine surface du quatrième ordre, ibidem, S. 1094—1104.

†) Chasles verweist auf die Abhandlung: Chasles, Propriétés des courbes à double courbure du troisième ordre, Comptes rendus, Bd. 45, 1857, S. 189—197 (S. 195).

wegung. Die Richtung, in welcher ein beliebiger Punkt P fortschreitet, steht daher auf den fünf von P ausgehenden Geraden senkrecht, welche $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{b}_1$, ... zugleich treffen. Chasles beweist noch, dafs nicht blofs eine Regelschar, sondern auch eine durch zwei projectivische Kegelschnitte erzeugte Regelfläche vierter Ordnung aus Leitstrahlen eines Nullsystems zusammengesetzt werden kann (S. 1099). Für die Theorie des Nullsystems fliefst aus diesen Entwickelungen vor allem der Hauptsatz: Ein Nullsystem ist durch fünf Strahlen, die nicht dieselben beiden Geraden treffen, eindeutig bestimmt, ein Satz, den Sylvester gleichzeitig auf rechnendem Wege bewiesen hatte (in der zweiten der oben genannten Abhandlungen).

Dritter Abschnitt.

Oberflächen zweiter Ordnung. Algebraische Curven.

XXXIV. Erzeugung und Construction der Oberflächen zweiter Ordnung; Büschel und Bündel aus Oberflächen zweiter Ordnung.

1. Die beiden in der synthetischen Geometrie üblichen Definitionen der Oberfläche zweiter Ordnung stammen aus dem Jahre 1847. Die Definition als Ordnungsfläche eines Polarsystems wird in dem Abschnitte des zweiten Bandes dieses Referats besprochen werden, welcher dem Fundamentalwerke Staudt's gewidmet ist. Den Gedanken, die Oberfläche zweiter Ordnung F_2 als Erzeugnis reciprok bezogener Strahlenbündel darzustellen, hat Seydewitz in dem zweiten Teile einer Abhandlung ausgeführt, aus der viele Ergebnisse schon oben [XXXI, 11—14] angeführt wurden.*) Die Oberfläche F_2 wird als ein Gebilde definirt, welches mit einer Ebene einen Kegelschnitt, mit einer Geraden zwei Punkte gemein hat. Ein derartiges Gebilde erzeugen aber zwei reciprok bezogene Bündel mit den Scheiteln S und S_1 sicherlich. Der Kegelschnitt, den die Oberfläche mit einer beliebigen Ebene gemein hat, erscheint nach den früheren Entwickelungen von Seydewitz [XXXI, 9] als Ordnungscurve $\mathfrak{K}$ einer reciproken Beziehung. Der Kegelschnitt, welchen die Fläche F_2 mit einer von S oder S_1 ausgehenden Ebene gemein hat, ist sofort als Erzeugnis projectivischer Strahlenbüschel dargestellt. Er berührt in S oder S_1 die zu S_1S bezw. SS_1 homologe Ebene. Man gelangt so zunächst für S und S_1 zur Tangentialebene. Seydewitz schreitet

*) Seydewitz, Konstruktion und Klassifikation der Flächen des zweiten Grades mittels projektivischer Gebilde, Grunert's Arch., Bd. 9, 1847, S. 158—214 (Zweiter Teil, S. 187—214).

nun (Lehrsatz 33, S. 195) sofort zu dem Satze: „Die Centra S und S_1 der beiden Bündel können mit zwei beliebigen Punkten der Fläche zusammenfallen, und es kann einem von S ausgehenden Strahle p eine beliebige, π, der Ebenen zugeordnet werden, welche S_1 und den zweiten Schnittpunkt P des Strahles p enthalten." Legt man durch P und S zwei Kegelschnitte K und K' von F_2 und projicirt die ihnen angehörigen Punktreihen einmal von S aus, dann von Strahlen aus, welche K und K' treffen, S_1 enthalten und mit P in einer Ebene π liegen, so entstehen zwei Projectivitäten

$$pp_1p_2p_3 \ldots \barwedge \pi\pi_1\pi_2\pi_3 \ldots,$$
$$pp'p''p''' \ldots \barwedge \pi\pi'\pi''\pi''' \ldots,$$

welche nach den früheren Entwickelungen von Seydewitz [XXXI, 5] notwendig und hinreichend zur Einleitung einer reciproken Beziehung zwischen den beiden Bündeln mit den Scheiteln S und S_1 sind. Das Erzeugnis G_2 dieser Bündel enthält die beiden Kegelschnitte K und K'. Jeder von S_1 ausgehende Kegelschnitt der Fläche ist durch S_1 und die vier Punkte, welche er mit K und K' gemein hat, eindeutig bestimmt und gehört eben deshalb der ursprünglich gegebenen Fläche F_2 an. Es handelt sich in Wirklichkeit um eine neue Erzeugung dieser Fläche. Mifslich ist bei diesem Beweise nur der Umstand, dafs die Schnittpunkte einer von S_1 ausgehenden Ebene mit K oder K' imaginär werden können. Vorzugsweise aus diesem Grunde entspringen die kleinen Veränderungen, mit denen der Seydewitz'sche Beweis in den Lehrkörper der synthetischen Geometrie Aufnahme fand. Von der Oberfläche, welche zwei reciproke Strahlenbündel mit den Scheiteln S und S_1 erzeugen, benutzt man zunächst nur die S oder S_1 enthaltenden Kegelschnitte, welche die Strahlenbüschel des einen Bündels mit den zugehörigen Ebenenbüscheln des anderen erzeugen. Während der erste Scheitel S fest bleibt, wird der zweite mit einem beliebigen Punkte S_2 der gegebenen Fläche F_2 vertauscht. Legt man — das Folgende schildert die von Reye benutzte Methode*) — erst durch S_1 und S_2 einen Kegelschnitt K'' von F_2, und wählt zwei von S ausgehende Kegelschnite K und K' von F_2 aus, die K'' in je zwei reellen Punkten treffen, so wird nach Seydewitz' Entwickelung durch zwei reciprok bezogene Bündel mit den Scheiteln S und S_2 eine K, K', K'' enthaltende Oberfläche zweiter Ordnung erzeugt. Als Ort der Kegelschnitte, welche S und S_2 enthalten und K, K', K'' je noch

*) Reye, Die Geometrie der Lage, Bd. 2, (erste Auflage) Hannover 1868 (Vortr. 5). Die Einführung des Kegelschnittes K'' kann übrigens vermieden werden. Die Kegelschnitte von F_2, welche S und S_2 enthalten, sind dadurch völlig festgelegt, dafs sie K und K' nochmals schneiden und in S die durch die Tangenten von K und K' gegebene Tangentialebene berühren.

einmal, aufser in S oder S_2, schneiden, fällt dieselbe mit F_2 zusammen. Schon jetzt hat man eine einfache Begründung des Satzes: „In jedem von zwei reciproken Feldern derselben Ebene beschreibt ein Punkt, welcher in der zugehörigen Geraden des anderen Feldes liegt, einen Kegelschnitt." Man kann die Fläche F_2, indem der geschilderte Gedankengang noch einmal wiederholt wird, durch zwei reciproke Strahlenbündel erzeugen, deren Scheitel (S und S_1) zwei beliebige Punkte derselben sind.

2. Wird der Ebenenbüschel mit der Axe SS_1 dem zweiten Strahlenbündel zugerechnet, so entspricht ihm ein aus den Tangenten in S gebildeter Strahlenbüschel. Zwei Gerade desselben, welche in den zugehörigen Ebenen liegen, gehören der Fläche vollkommen an. Seydewitz zeigt nun in der üblich gewordenen Weise, dafs eine jede Tangentialebene der Fläche F_2 entweder zwei reelle, oder zwei zusammenfallende, oder zwei imaginäre Gerade derselben enthält. Die Fläche ist im ersten Falle ein einschaliges Hyperboloid oder ein hyperbolisches Paraboloid, im zweiten Falle ein Kegel oder ein Cylinder, im dritten Falle ein zweischaliges Hyperboloid, ein Ellipsoid oder ein elliptisches Paraboloid. Zu dieser Einteilung gelangt Seydewitz aus der Erwägung heraus, dafs der unendlich ferne Kegelschnitt von F_2 reell oder imaginär sein und endlich aus zwei reellen oder conjugirt-imaginären Geraden bestehen kann (S. 201).

Zwei gegebene reciprok bezogene Bündel kann man, wie Seydewitz ferner ausführt, durch blofse Verschiebung in solche Lage bringen, dafs sie eine Fläche zweiter Ordnung von vorgeschriebener Art erzeugen. Wenn z. B. dem Strahle a und einer ihn enthaltenden Ebene β des ersten Bündels die Ebene α_1 und der Strahl b_1 des zweiten Bündels entsprechen und a und b_1 aufeinander gelegt werden, so entsteht, je nachdem α und β_1 noch voneinander verschieden sind oder nicht, ein einschaliges Hyperboloid oder ein Kegel. Setzt man die beiden Bündel erst zum Polarsystem eines imaginären Kegels [XXXI, 14] zusammen und verschiebt den zweiten Bündel sich selbst parallel, so erzeugt er mit dem ersten ein Ellipsoid. Setzt man die Bündel zum Polarsystem eines reellen Kegels zusammen, und verschiebt denselben mit dem zweiten Bündel sich selbst parallel, so erzeugen die Bündel ein einschaliges oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem die beiden congruenten Kegel reelle Tangentialebenen mit einander gemein haben oder nicht. Bildet zunächst wieder der zweite Bündel mit dem ersten das Polarsystem eines Kegels, macht er sodann eine Drehung durch 90^0 um ein Lot zu einer cyclischen Ebene, bezw. eine Drehung durch 180^0 um eine Mantellinie des Kegels, welche auf der Ebene einer Ellipse desselben senkrecht steht, und wird er dann zu sich selbst parallel verschoben, so erzeugt er mit dem fest gebliebenen ersten Bündel ein hyperbolisches, bezw. ein elliptisches Paraboloid.

3. Seine Entwickelungen über die Construction der Oberfläche F_2, welche neun gegebene Punkte enthält, leitet Seydewitz mit einer wichtigen Vorbemerkung ein (S. 205). Eine lineare homogene Gleichung zwischen zwei Gruppen von drei Coordinaten weise acht wesentliche Constante auf. Hiernach erscheine es auf den ersten Blick möglich, eine Oberfläche F_2 durch zehn Punkte zu legen. Denn zwei der Punkte könne man zu Anfangspunkten der beiden Coordinatensysteme machen. Die übrigen acht Punkte liefern dann anscheinend die genau erforderliche Anzahl von Bedingungsgleichungen, um die Coefficienten der bilinearen Gleichung zu bestimmen und damit die reciproke Beziehung der F_2 erzeugenden Bündel festzulegen. Dem aber stehe das bekannte Resultat entgegen, dafs eine Oberfläche F_2 bereits durch neun Punkte eindeutig gegeben ist. „Dieses analytisch-geometrische Paradoxon," fährt Seydewitz dann fort, „ist für die rein-geometrische Betrachtung bereits durch Lehrsatz 33. hinweggeräumt." Das Verständnis der sehr eleganten Lösung, welche Seydewitz nun giebt, kann durch eine passendere Bezeichnungsweise sehr erleichtert werden. Sie beruht auf folgendem, von Seydewitz allerdings nicht genau in dieser Form ausgedrückten Theorem: „Zwei Ebenen können auf unendlich viele Weisen so reciprok bezogen werden, dafs einem Punkte A_1 und einer von demselben ausgehenden Geraden g_1 ($= A_1 G_1$) eine gegebene Gerade a und ein ihr angehöriger Punkt G entsprechen, und dafs zu den Punkten B_1, C_1, D_1, E_1 Gerade b, c, d, e gehören, welche vorgegebene Punkte B, C, D, E enthalten; b, c, d, e beschreiben projectivische Strahlenbüschel." Wenn nämlich c, d, e die Gerade a in den Punkten $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{E}_0$, die Gerade b in den Punkten $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ treffen, und $\mathfrak{M}$ der a und b gemeinsame Punkt ist, so bestehen die projectivischen Beziehungen

$$\mathfrak{M}\mathfrak{C}_0\mathfrak{D}_0\mathfrak{E}_0 G \barwedge A_1(B_1 C_1 D_1 E_1 G_1),$$
$$\mathfrak{M}\mathfrak{C}\,\mathfrak{D}\,\mathfrak{E} \quad \barwedge B_1(A_1 C_1 D_1 E_1).$$

Wird nun auf einer von G ausgehenden Geraden $\mathfrak{g}$ gemäfs der Regel

$$M C_0 D_0 E_0 G \barwedge A_1(B_1 C_1 D_1 E_1 G_1)$$

eine Hülfsgruppe $M C_0 D_0 E_0 G$ construirt, so laufen jedenfalls $\mathfrak{M}M$, $\mathfrak{C}_0 C_0$, $\mathfrak{D}_0 D_0$, $\mathfrak{E}_0 E_0$ in einem Hülfspunkte I zusammen. Wenn b fixirt ist, so kann man denselben mit alleiniger Hülfe des Lineals leicht construiren.*) Wenn sich b um B dreht, so beschreibt I eine

*) Während der Punkt I die Gerade $\mathfrak{M}M$ durchläuft, beschreiben die Schnittpunkte $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{E}_0$ von IC_0, ID_0, IE_0 mit a und die Schnittpunkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ von $C\mathfrak{C}_0$, $D\mathfrak{D}_0$, $E\mathfrak{E}_0$ mit b projectivische Punktreihen. Ist auf einer von $\mathfrak{M}$ ausgehenden Geraden $\mathfrak{m}$ die Hülfsgruppe $\mathfrak{M}C_2 D_2 E_2$ gemäfs der Regel

$$\mathfrak{M} C_2 D_2 E_2 \barwedge B_1(A_1 C_1 D_1 E_1)$$

angebracht, so charakterisirt sich offenbar die gesuchte Anordnung da-

Gerade i, welche man durch die zwei speciellen Lagen b', b'' von b zugehörigen Punkte I', I'' fixiren kann. Nimmt b die Lagen b', b'' an, so mögen anstatt der Punkte $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{E}_0$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ die Punkte $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{C}_0'$, ... bezw. $\mathfrak{M}''$, $\mathfrak{C}_0''$, ... eintreten. Wird I über die Gerade i geführt, so beschreiben die Schnittpunkte $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ von b oder $B\mathfrak{M}$ mit c, d, e oder $C\mathfrak{C}_0$, $D\mathfrak{D}_0$, $E\mathfrak{E}_0$ drei Kegelschnitte $(\mathfrak{C})_2$, $(\mathfrak{D})_2$, $(\mathfrak{E})_2$, welche die Punkte B, G und den Schnittpunkt H von a und i enthalten. Durch eine quadratische Verwandtschaft entsteht nun der Hülfssatz: „Vier Kegelschnitte eines Büschels schneiden auf Geraden, die von einem Grundpunkte des Büschels ausgehen, projectivische Punktgruppen aus." Einen dieser Kegelschnitte kann man in ein Geradenpaar ausarten lassen. Nach der Umkehrung dieses Hülfssatzes treffen $GH = a$, $(\mathfrak{C})_2$, $(\mathfrak{D})_2$, $(\mathfrak{E})_2$ jede von B ausgehende Gerade b in einer zu $B_1(A_1C_1D_1E_1)$ projectivischen Gruppe $\mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}$, da sie zwei derartige Gruppen $\mathfrak{M}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{M}''\mathfrak{C}''\mathfrak{D}''\mathfrak{E}''$ auf b' und b'' ausschneiden; $(\mathfrak{C})_2$, $(\mathfrak{D})_2$, $(\mathfrak{E})_2$ gehören ferner einem Büschel an. Damit ist der aufgestellte Satz bewiesen.

4. Wenn man jetzt an Stelle von E und E_1 die Punkte F und F_1 einsetzt, der Hülfsgruppe auf $\mathfrak{g}$ einen neuen Punkt F_0 nach der Regel

$$MC_0D_0E_0F_0G \barwedge A_1(B_1C_1D_1E_1F_1G_1)$$

hinzufügt, so tritt statt der Geraden i die Gerade $\mathfrak{i}$ ein, welche i im Punkte I_0 treffen möge. Wenn dann die durch B, C, D, E, F gelegten Strahlen b_0, c_0, d_0, e_0, f_0 die Gerade a in denselben Punkten treffen, wie MI_0, C_0I_0, D_0I_0, E_0I_0, F_0I_0, so entsprechen in einer bestimmten reciproken Beziehung den Elementen g_1, A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 die Elemente G, a, b_0, c_0, d_0, e_0, f_0. Man hat den Satz: „Eine reciproke Beziehung ist im allgemeinen eindeutig gegeben, wenn für einen Strahl und einen auf ihm gelegenen Punkt der entsprechende Punkt und die von ihm ausgehende Gerade gegeben sind, wenn ferner die fünf Punkten entsprechenden Geraden gegebene Punkte enthalten sollen."*)

---

durch, dass $C_2\mathfrak{C}$, $D_2\mathfrak{D}$, $E_2\mathfrak{E}$ einen Punkt K miteinander gemein haben. In K treffen sich die drei Geraden, welche die Schnittpunkte von $C_2\mathfrak{C}$, $D_2\mathfrak{D}$, $E_2\mathfrak{E}$ beschreiben, wenn I über $\mathfrak{M}M$ schreitet. Die speciellen Lagen b' und b'' von b, für welche diese Construction auszuführen ist, läſst man bei der praktischen Ausführung vorteilhaft mit zwei der Geraden BC, BD, BE zusammenfallen.

*) Fallen indes die Geraden $\mathfrak{i}$ und i zusammen, so geht bei jeder Lage von b die Gerade f durch F hindurch. Man erhält aus dieser Bemerkung sofort folgende Ergänzung der Betrachtung von Seydewitz: „Sind von zwei reciproken Ebenen die Paare entsprechender Elemente a und A_1, G und g_1 sowie die Paare conjugirter Punkte BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 gegeben, so beschreibt die einem beliebigen Punkte F_1 entsprechende Gerade f einen Strahlenbüschel." Alle diese Strahlenbüschel sind unter sich pro-

Erzeugt man nun eine die Punkte S, S_1, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ enthaltende Oberfläche F_2 durch reciproke Strahlenbündel mit den Scheiteln S und S_1, so müssen die $S\mathfrak{A}$, $S\mathfrak{B}$, ..., $S\mathfrak{G}$ entsprechenden Ebenen die Strahlen $S_1\mathfrak{A}$, $S_1\mathfrak{B}$, ..., $S_1\mathfrak{G}$ enthalten. Eine dieser Ebenen kann man noch willkürlich bestimmen, also etwa $S\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ als die $S_1\mathfrak{G}$ entsprechende Ebene betrachten. Dann ist natürlich $S_1\mathfrak{A}\mathfrak{G}$ die zu $S\mathfrak{A}$ homologe Ebene. Es leuchtet ein, daſs die reciproken Felder, welche die gesuchten Bündel auf einer Hülfsebene π ausschneiden, nach der soeben besprochenen Regel gefunden werden können.*)

5. Im Jahre 1851 ist Seydewitz auf diese höchst interessante Frage zurückgekommen.**) Auch diese Schrift ist für die synthetische Geometrie der Oberflächen F_2 von der gröſsten Bedeutung. „Leichtfaſslich" wird man aber die Darlegungen des Verfassers nicht eben finden. Augenscheinlich hat Seydewitz die von Steiner gelegentlich ausgesprochene Mahnung vorgeschwebt, man dürfe nicht „mit dem Munde" construiren. In der vorangestellten Vorschrift zur Construction hat er daher alles auf das Schneiden von Geraden und Ebenen zurückgeführt, ohne dem Leser die für das Verständnis so notwendigen Ruhepausen zu gewähren. Erst wenn man die einzelnen Schritte gruppenweise übersichtlich zusammenfaſst, wie ich das in dem Folgenden versuchen will, tritt die bewunderungswürdige Eleganz der Construction und des zugehörigen Beweises klar zu Tage. Seydewitz beginnt mit Constructionen für das einschalige Hyperboloid, wobei er der Reihe nach drei Punkte P_1, P_2, P_3 und zwei gegeneinander windschiefe Gerade, vier Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 und zwei sich schneidende Gerade l, a, endlich sechs Punkte P, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 und eine Gerade l als gegeben ansieht. Im zweiten

jectivisch. Der F_1 zugehörige Strahl verbindet z. B. den Punkt $\mathfrak{F}_0$, in welchem a die Gerade JF_0 trifft, mit dem Punkte $\mathfrak{F}$ von b oder $\mathfrak{M}B$, welcher aus der Beziehung

$$B_1(A_1 C_1 D_1 E_1 F_1) = \mathfrak{M}\mathfrak{C}\mathfrak{D}\mathfrak{E}\mathfrak{F}$$

entspringt; $\mathfrak{F}$ beschreibt also einen Kegelschnitt $(\mathfrak{F})_2$, welcher mit $(\mathfrak{C})_2$, $(\mathfrak{D})_2$, $(\mathfrak{E})_2$ in denselben Büschel gehört. $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_0$ beschreiben mithin projectivische Punktreihen zweiter und erster Ordnung, welche die Punkte G und H entsprechend miteinander gemein haben. Ihr Erzeugnis ist ein Strahlenbüschel, dessen Centrum $(\mathfrak{F})_2$ angehört. — Seydewitz' Beweisgang führt also nebenbei sofort zu einem allerdings nicht ganz allgemeinen Büschel collinearer Strahlenfelder. Der weitere Ausbau von Seydewitz' Construction ist bekanntlich von Schröter und Reye gegeben worden.

*) Neben jeden seiner Sätze über Flächen zweiter Ordnung stellt Seydewitz den dualen über Flächen zweiter Klasse. Der Nachweis der Identität beider Flächen, welcher ja aus den Polareigenschaften unmittelbar folgen würde, geht, wie Seydewitz angiebt, über die Grenzen seiner Abhandlung hinaus (S. 201).

**) Seydewitz, Leichtfassliche Konstruktion einer Fläche des zweiten Grades, von welcher neun Punkte beliebig gegeben sind, Grunert's Archiv, Bd. 17, 1851, S. 275—297.

Falle ist der Kegelschnitt K des Hyperboloids, welcher drei der vier Punkte, etwa P_1, P_2, P_3 verbindet, völlig bestimmt, da er die beiden Geraden l und a treffen mufs. Jede von P_4 ausgehende Gerade des Hyperboloids trifft K und je eine der beiden Geraden l und a. Damit ist man zur ersten Aufgabe zurückgelangt, deren Lösung evident ist. In ähnlicher Weise löst Seydewitz die letzte und wichtigste Aufgabe. In einer Anmerkung (S. 278) wird die uns jetzt geläufige Lösung der Aufgabe entwickelt. Die zu l windschiefe Gerade m des Hyperboloids, welche P aussendet, genügt den beiden Forderungen

$$l(P_1P_2P_3P_4) \barwedge m(P_1P_2P_3P_4),$$
$$l(P_1P_2P_3P_5) \barwedge m(P_1P_2P_3P_5)$$

und ist deshalb der letzte gemeinsame Strahl zweier bekannten Kegel zweiten Grades, welche die Mantellinien PP_1, PP_2, PP_3 enthalten.

6. Es sei jetzt die Fläche F_2 zu construiren, welche die neun Punkte S, T, B, C, A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 enthält. Man erzeuge zunächst durch je ein Paar projectivischer Ebenenbüschel

$$\beta\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots \barwedge \delta\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots,$$
$$\gamma\gamma'\gamma''\gamma''' \ldots \barwedge \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' \ldots$$

die beiden Hyperboloide H_2' und H_2'', welche SB und T, C, A_1, A_2, A_3, A_4 bezw. SC und B, T, A_1, A_2, A_3, A_4 enthalten. Von den Axen b, c, d, e der Ebenenbüschel $\beta\beta_1\beta_2\beta_3 \ldots$, $\gamma\gamma'\gamma''\gamma''' \ldots$, $\delta\delta_1\delta_2\delta_3 \ldots$, $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon''' \ldots$ mögen die beiden ersten mit SB und SC zusammenfallen, die beiden letzten mögen von T ausgehen. β und γ mögen verschiedene Bezeichnungen für die Ebene SBC sein Die Schnittlinie f von δ und ε projicirt alsdann den Punkt F, welchen die Schnittcurve von H_2' und H_2'' mit der Ebene SBC aufser S, B, C gemein hat. Der Schnittlinie $s_i^{(k)}$ von β_i und $\gamma^{(k)}$ entspricht diejenige $t_i^{(k)}$ von δ_i und $\varepsilon^{(k)}$ offenbar in einer geometrischen (quadratischen) Verwandtschaft [XXXI, 1]. In jedem Schnittpunkte von H_2' und H_2'' treffen sich zwei zusammengehörige Strahlen. Man ordne jetzt zunächst dem Strahle $s_0^{(0)}$ oder β_0, $\gamma^{(0)}$, welcher A_0 von S aus projicirt, die Ebene $\sigma_0^{(0)}$ zu, welche den zugehörigen Strahl $t_0^{(0)}$ oder δ_0, $\varepsilon^{(0)}$ mit A_0 verbindet, $\sigma_0^{(0)}$ schneide δ und ε in den Strahlen d_0 und $e^{(0)}$. Um auf einen beliebigen Strahl $s_i^{(k)}$ eine Ebene $\sigma_i^{(k)}$ zu beziehen, benutze man die beiden Dreikante $d_0 d t_i^{(0)}$ und $e^{(0)} t_0^{(k)} e$, welche hinsichtlich des Strahles $t_0^{(0)}$ perspectivisch liegen. $\sigma_i^{(k)}$ soll mit der Ebene zusammenfallen, hinsichtlich deren die Dreikante perspectivisch liegen. Die Ebene $\sigma_i^{(k)}$ enthält die drei Strahlen

$$d^{(k)} = d_0 d,\ e^{(0)} t_0^{(k)} = \delta,\ e^{(0)} t_0^{(k)};\ e_i = d_0 t_i^{(0)},\ e^{(0)} e = d_0 t_i^{(0)},\ \varepsilon;$$
$$t_i^{(k)} = d t_i^{(0)},\ t_0^{(k)} e = \delta_i,\ \varepsilon^{(k)}.$$

Offenbar bestehen die beiden projectivischen Beziehungen:

$$\beta\beta_1\beta_2\beta_3\ldots \barwedge ee_1e_2e_3\ldots,$$
$$\gamma\gamma'\gamma''\gamma'''\ldots \barwedge dd'd''d'''\ldots;$$

man zeigt aus der Definition von $d^{(k)}$ und e_i, dafs e und d zwei verschiedene Bezeichnungen für die Schnittlinie f von δ und ε sind. Die Ebene $\sigma_i^{(k)}$, welche e_i und $d^{(k)}$ verbindet, und der Strahl $s_i^{(k)}$, in dem sich die Ebenen β_i und $\gamma^{(k)}$ schneiden, sind homologe Elemente zweier reciproken Strahlenbündel [XXXI, 5]. Da $\sigma_i^{(k)}$ nach der obigen Entwickelung den Strahl $t_i^{(k)}$ enthält, so nimmt die durch die beiden Bündel erzeugte Oberfläche F_2 die H_2' und H_2'' gemeinsamen Punkte auf, zu denen S, T, B, C, A_1, A_2, A_3, A_4 gehören. Da ferner $s_0^{(0)}$ und $\sigma_0^{(0)}$ sich im Punkte A_0 schneiden, so fällt die Oberfläche mit der gesuchten, welche durch die neun Punkte nach der vorangegangenen Entwickelung im allgemeinen eindeutig bestimmt ist, zusammen.

7. Man kann (S. 291) dieser Construction mit Hülfe des Pascal'schen Satzes auch folgende Wendung geben: „Der Strahl $t_0^{(0)}$, eine beliebige von T ausgehende Gerade $t_i^{(k)}$ und die Schnittlinie $u_i^{(k)}$ der Ebenen $\sigma_0^{(0)}$ und $\sigma_i^{(k)}$ gehören einem Kegel zweiten Grades an, welcher die drei festen Strahlen d, e, f enthält." Nach seiner eigenen Äufserung will Seydewitz das zwischen zehn Punkten einer Fläche F_2 obwaltende Gesetz durch „eine räumliche Figur zum Ausdruck bringen, welche als eine Verstrickung von fünf mystischen Sechskanten erscheint". Das eine derselben habe ich soeben angeführt. Je zwei andere dienen zur Ermittelung der zu SB bezw. SC windschiefen und von T ausgehenden Geraden d und e der oben vorkommenden Hyperboloide H_2' und H_2''. Die von Seydewitz gegebene Regel läfst sich übersichtlich etwa in folgender Weise darstellen. Die Ebenen SBA_1, SBA_2, SBA_3, SBA_4 mögen auf TC die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4 ausschneiden, hingegen mögen TA_2A_3, TA_3A_1, …, TA_3A_4 mit BC die Punkte Q_{23}, Q_{31}, …, Q_{34} gemein haben. Es sei q_4 die Pascal'sche Gerade des Sechsecks $P_2Q_{23}P_3Q_{31}P_1Q_{12}$ und es mögen q_1, q_2, q_3 zu den drei anderen in derselben Weise gebildeten Sechsecken gehören. Alsdann haben q_1, q_2, q_3, q_4 einen Punkt O miteinander gemein, zu dessen Feststellung natürlich zwei der Geraden genügen. Wenn jetzt OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 die Gerade BC in den Punkten R_1, R_2, R_3, R_4 treffen, so haben TR_1A_1, TR_2A_2, TR_3A_3, TR_4A_4 die Gerade d des Hyperboloids H_2' miteinander gemein, welches die Gerade SB und die Punkte T, C, A_1, A_2, A_3, A_4 enthält. Auf entsprechende Weise wird das zweite Hyperboloid H_2' construirt.

8. In den geschilderten Entwickelungen liegt nun der geometrische Beweis für die Existenz des Büschels aus Oberflächen F_2. Da

nämlich die Ebene $\sigma_i^{(k)}$, welche sich in irgend einem Punkte der durch die neun Punkte im allgemeinen eindeutig bestimmten Oberfläche F_2 mit dem zugehörigen Strahle $s_i^{(k)}$ schneidet, den Strahl $t_i^{(k)}$ enthält, so gehört der Fläche, wie auch der neunte gegebene Punkt A_0 liegt, jeder Punkt an, den zwei homologe Strahlen $s_i^{(k)}$ und $t_i^{(k)}$ miteinander gemein haben. Es folgt (S. 292): „Alle Flächen F_2, die acht Punkte enthalten, haben eine — als Schnittcurve zweier einschaligen Hyperboloide festzulegende — Curve miteinander gemein." Implicite liegt in der Entwickelung eine Erweiterung der bekannten später genauer zu schildernden Definition der Raumcurve R_3, nämlich der Satz: „Sind zwei Strahlenbündel geometrisch verwandt, so gehören die Punkte, in denen sich entsprechende Strahlen schneiden, der Durchdringungscurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung an."

Eine Oberfläche F_2 kann auf unendlich viele Weisen durch zwei reciprok bezogene Bündel erzeugt werden, deren Scheitel zwei beliebige Punkte S und S_1 von F_2 sind. Die beiden Ebenen σ', σ'', welche zwei Strahlen s', s'' des ersten Bündels bei derselben Erzeugung entsprechen, beschreiben projectivische Ebenenbüschel, deren Axen t', t'' die zweiten Schnittpunkte von s' und s'' mit F_2 enthalten. Alle diese Ebenenbündel haben drei Ebenen miteinander entsprechend gemein, nämlich die Tangentialebene der Fläche F_2 in S_1 und die beiden Ebenen, welche die von S ausgehenden Geraden der Fläche projiciren. Bei den nicht geradlinigen Flächen F_2 bleibt natürlich nur die Schnittlinie S_1S der letzteren Ebenen reell (S. 296). Alle diese Entwickelungen können — damit schliefst Seydewitz seine Abhandlung — von freieren Gesichtspunkten her aufgefafst werden, wenn man die von Steiner und ihm selbst ausgebildete Lehre von den geometrischen Verwandtschaften durch Einführung von imaginären Hauptelementen erweitere. Man könne dann z. B. den Satz aufstellen: „Zwei Strahlenbündel sind geometrisch verwandt, wenn ihre Scheitel einer Fläche F_2 angehören, und je zwei homologe Strahlen sich auf der Fläche schneiden." Diesen Satz bezeichnet er als „analoger" der Erzeugung des Kegelschnittes durch zwei projectivische Strahlenbüschel, als die besprochene Erzeugung der Flächen mittels reciproker Strahlenbündel. Von der Kugel ausgehend hatte Dandelin diese Verwandtschaft zur Untersuchung der Inversion in der Ebene benutzt [XIV, 4]. Bei Oberflächen F_2 im allgemeinen haben Reye und Darboux, wie schon jetzt bemerkt werden möge, diesen Gedanken zur Bestimmung der Oberfläche F_2 benutzt, welche neun Punkte enthält.

9. Das von Seydewitz in der soeben geschilderten Weise mit rein geometrischen Mitteln erledigte Problem der Construction einer durch neun Punkte bestimmten Oberfläche F_2 hat zu immer erneuten Lösungen Veranlassung gegeben. Ich habe bereits [X, 1] die Art ge-

schildert, in welcher Lamé 1818 die Aufgabe löste. Im Jahre 1825 stellte die Akademie zu Brüssel die Aufgabe, bei der Oberfläche zweiter Ordnung ein Analogon zu dem Pascal'schen Satze zu schaffen in Form eines Satzes, der zehn Punkte der Fläche miteinander verknüpft und zugleich gestattet, aus neun vorliegenden Punkten beliebig viele andere zu construiren. Den hierfür ausgesetzten Preis scheint Olivier erhalten zu haben (1827), obgleich er nach dem mir zugänglichen Auszuge seiner Arbeit aus den neun gegebenen Punkten der Fläche F_2 nur specielle Tripel von Punkten derselben ableitete.*) Eine vollständige Lösung der Aufgabe aber giebt 1842 — also vor Seydewitz — Hesse.**) Die Polarebenen eines Punktes bezüglich der Oberflächen F_2 eines Bündels haben einen Punkt miteinander gemein. Neun Punkte 1, 2, ..., 9 bestimmen eine Oberfläche F_2, welche den Bündeln mit den Grundpunkten 1, 2, ..., 6, 7; 1, 2, ..., 6, 8; 1, 2, ..., 6, 9 zugleich angehört. Die drei Punkte Q_1, Q_2, Q_3, welche dem Punkte P für diese Bündel in der beschriebenen Weise entsprechen, legen die Polarebene π des Punktes P nach der gesuchten Fläche F_2 fest. Der zweite Schnittpunkt etwa von P 1 wird nun von 1 durch P und π harmonisch getrennt. Man kann auf diese Weise, da P ganz beliebig ist, den zweiten Schnittpunkt jeder Geraden finden, die von einem der gegebenen Punkte ausgeht. Zur Durchführung der Construction braucht man von jedem der bezeichneten Bündel drei Flächen. Hesse schlägt vor, zu diesem Zwecke einschalige Hyperboloide zu nehmen, beispielsweise bestimmen drei von 5, 6, 7 ausgehende Gerade, welche 12 und 34 zugleich treffen, ein dem ersten Bündel angehörendes einschaliges Hyperboloid. Seine Polarebene nach P legen die Punkte fest, deren jeder mit P zusammen zwei der von 5, 6, 7 ausgehenden Geraden harmonisch trennt. Durch einen von Cayley***) herrührenden Auszug mit Hesse's Arbeit bekannt geworden, hat dann Townsend†) die Methode auf unendlich ferne Elemente angewendet und so die Mittel zur Bestimmung der Tripel conjugirter Durchmesser u. s. w. der Fläche gewonnen.

10. Cayley ist geneigt, in der Entwickelung Hesse's den Ersatz für das zu finden, was in der Ebene der Pascal'sche Satz darbietet.

---

*) Olivier, Extrait d'un mémoire sur les polaires, Bull. de Férussac, Bd. 15, 1831, S. 214—223.

**) Hesse, Über die Construction der Oberflächen zweiter Ordnung, von welchen beliebige neun Puncte gegeben sind, Crelle's Journ., Bd. 24, 1842, S. 36—39 (Abh., S. 51—55).

***) Cayley, Abstract of a memoir by Dr. Hesse on the construction of the surface of the second order which passes through nine given points, Camb. Dubl. Journ., Bd. 4 (8), 1849, S. 44—46.

†) Townsend, On the problem to determine in magnitude, position and figure, the surface of the second order which passes through nine given points, ibidem, S. 241—252

Das Theorem gestatte, bei zehn gegebenen Punkten sofort zu entscheiden, ob sie einer Oberfläche zweiter Ordnung angehören oder nicht. Es lassen sich nun allerdings Lehrsätze finden, die in ihrer äufseren Erscheinung eine vollkommenere räumliche Erweiterung des Pascal'schen Satzes darbieten. Allein es fehlt ihnen die constructive Bedeutung des letzteren, da sie mehr als zehn Punkte einer Oberfläche F_2 miteinander verknüpfen. Hierhin gehört vor allem ein Theorem von Chasles*): „Liegen bei zwei aufeinander bezogenen Tetraedern die zwölf Punkte auf einer Oberfläche F_2, in deren jedem eine Ebene des einen Tetraeders eine aufserhalb der homologen Ebene gelegene Kante des anderen trifft, so gehören die vier Schnittlinien homologer Ebenen einer, die Verbindungslinien homologer Ecken einer zweiten Regelschar an."**) Man erhält, wenn das eine Tetraeder F_2 eingeschrieben und folglich das andere F_2 umschrieben ist, den Bobillier-Steiner'schen Tetraedersatz [XXIII, 2, 3].***) Die beiden Tetraeder sind im Polarsystem der Fläche F_2, wie in dem eben bezeichneten Specialfalle, auch dann reciprok, wenn sämtliche Kanten des einen, und folglich auch die des anderen, F_2 berühren. Dieser specielle Fall des neuen Satzes kann also auch, wie Chasles in der betreffenden Arbeit besonders hervorhebt, aus seinem allgemeinen Lehrsatze über reciproke Tetraeder einer Oberfläche F_2 abgeleitet werden.†) Aber dieser Zusammenhang ist ein ganz allgemeiner. Die beiden auf die beschriebene Art aus einer Fläche F_2 entstandenen Tetraeder sind stets hinsichtlich einer anderen Fläche G_2 zu einander reciprok; der eine Satz ist in dem anderen enthalten. In der That hat Chasles††) 1839, um seinen Satz zu begründen, die Fläche G_2 mit Hülfe von Transversalensätzen eingeführt. Hesse hat in einer 1844—1845 verfafsten Arbeit, die aus seinem Nachlasse veröffentlicht wurde†††),

*) Chasles, Théorèmes analogues, dans les surfaces du second degré, aux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon dans les coniques, Aperçu historique, Note 32, S. 400—403.

**) Der zweite Teil des Theorems ist eine Folge des ersten. Wie Chasles nämlich an anderer Stelle hervorhebt, kann Poncelet's Satz von den perspectivischen (homologen) Tetraedern auf folgende Weise verallgemeinert werden: „Liegen die vier Geraden, in denen sich homologe Ebenen zweier aufeinander bezogenen Tetraeder schneiden, in einer Regelschar, so gehören die Verbindungslinien homologer Ecken einer zweiten Regelschar an." Vergl.: Chasles, Aperçu historique, S. 547.

***) Nach der oben (S. 199**) erwähnten Note Gergonne's haben Steiner und Bobillier den Satz fast gleichzeitig entwickelt, die nicht abgedruckte Mitteilung Steiner's ist Gergonne einige Tage früher zugegangen als die Arbeit Bobillier's.

†) Vergl.: a. a. O. S. 196* (S. 79).

††) Chasles, Propriétés des surfaces du second degré analogues aux théorèmes de Pascal et de M. Brianchon, Bull. de l'Ac. de Bruxelles Bd. 6_1, 1839, S. 248—255.

†††) Hesse, Beweis einiger Sätze von Chasles. (Aus einem Diarium aus der Zeit 1844 bis November 1845.), Abh., S. 637—648.

den Satz von den im Polarsystem einer Fläche G_2 reciproken Tetraedern, sowie seine dem Pascal'schen Satze analoge Fassung, rechnend erwiesen. Specielle Fälle, z. B. der Bobillier-Steiner'sche Satz, werden berücksichtigt. Voran geht eine Behandlung der entsprechenden Sätze der Ebene.

11. Beziehungen einer Fläche F_2 zu einem Tetraeder bietet auch Steiner.*) Sein Hauptsatz lautet: „Die beiden Gruppen von Punkten, in denen die Kanten eines Tetraeders von zwei Hülfsflächen G_2' und G_2'' berührt werden, liegen auf einer Fläche F_2. Wenn nämlich G_2' die Kanten DA, DB, DC in $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, die Kanten BC, CA, AB in $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$ berührt, und $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$, ... für G_2'' die analoge Bedeutung besitzen, so schneiden sich nach Maclaurin's Satz [III, 8] sowohl $A\mathfrak{A}_1'$, $B\mathfrak{B}_1'$, $C\mathfrak{C}_1'$, als auch $A\mathfrak{A}_1''$, $B\mathfrak{B}_1''$, $C\mathfrak{C}_1''$, in je einem Punkte P', P''. Man kann deshalb aus Transversalensätzen überaus leicht ableiten, dafs z. B. $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}_1'$, $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{B}_1''$, $\mathfrak{C}_1''$ einem Kegelschnitte angehören**), woraus dann der erwähnte Satz folgt. Nebenbei sieht man leicht, dafs $\mathfrak{A}'\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}'\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{C}'\mathfrak{C}_1'$ sich in einem Punkte schneiden. In einer Fufsnote (zu S. 188) stellt dann Gergonne das meines Wissens nicht auf die Richtigkeit geprüfte Theorem auf: „Die zwölf Punkte, in denen drei Oberflächen F_2, G_2, H_2 die Flächen eines Tetraeders berühren, gehören einer Fläche zweiter Ordnung an."

12. Weiter hat sich Weddle mit solchen Theoremen beschäftigt. In seiner ersten hierhin gehörigen Arbeit***) wird (S. 32) folgender Satz erwiesen: „Berühren die Kanten eines Hexaeders eine Fläche F_2, so liegen die Schnittlinien gegenüberliegender Flächen des Hexaeders und der Paare von Tangentialebenen, welche gegenüberliegende Kanten enthalten, in einer Ebene; einen Punkt haben miteinander gemein die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken und der Berührungspunkte gegenüberliegender Kanten." Im Polarsystem der

*) Steiner, Démonstration de quelques théorèmes, Gerg. Ann., Bd. 19, 1828 u. 1829, S. 1—8 (Ges. W., Bd. 1, S. 181—188).

**) Man kann dieses Theorem aber auch rein geometrisch ableiten. Es ist offenbar in dem Staudt'schen Satze [XXII, 1] enthalten: „Die Punkte, in denen zwei Kegelschnitte vier Gerade berühren, liegen in einem Kegelschnitte."

***) Weddle, On the theorems in space analogous to those of Pascal and Brianchon in a plane, Camb. Dubl. Journ., Bd. 4 (8), 1849, S. 26—44. Bei seinem Beweise stellt Weddle die Ebenenpaare des Hexaeders in der Form

$$T + S = 0, \quad U + S = 0, \quad V + S = 0$$
$$T - S = 0, \quad U - S = 0, \quad V - S = 0$$

dar; die Fläche F_2 hat dann (S. 30) die Gleichung

$$T^2 + U^2 + V^2 = 2S^2$$

und mufs daher eine „umbilicare" Fläche zweiter Ordnung sein, reelle Nabelpunkte aufweisen.

Fläche F_2 selbst steht dem Hexaeder ein Octaeder gegenüber, dessen Kanten F_2 in den gleichen Punkten berühren, wie die des Hexaeders. Die sieben Paare gegenüberliegender Ebenen und die sechs Paare von Tangentialebenen, welche zwei gegenüberliegende Kanten des Hexaeders, wie des Octaeders enthalten, schneiden sich deshalb in 13 Geraden einer Ebene, in dem Pole derselben treffen sich entsprechend 13 Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken und Berührungspunkte. In diesem Theorem erblickt Weddle eine räumliche Erweiterung der Beziehung zwischen dem eingeschriebenen Viereck und dem zugehörigen umschriebenen Vierseit beim Kegelschnitt. Werden einem Hexaeder der genannten Art Oberflächen zweiter Ordnung eingeschrieben, so treffen sich die Verbindungslinien der Berührungspunkte gegenüberliegender Flächen in einem Punkte. Man kann alle diese Entwickelungen kurz dahin zusammenfassen: „Ein Octaeder oder ein Hexaeder, dessen Kanten eine Oberfläche F_2 berühren, kann stets als die collineare Umformung eines regelmäſsigen Polyeders aufgefaſst werden, dessen Mittelpunkt zugleich derjenige der zu F_2 collinearen Fläche G_2 ist." Weddle geht dann auf die Lehre von den Sechsseiten auf dem einschaligen Hyperboloid genauer ein. In einer Fuſsnote (S. 44) hebt er hervor, daſs Cayley ihn nach Abfassung seiner Arbeit auf die Priorität Hesse's*) nach dieser Seite hin aufmerksam gemacht habe.

13. Mehrere von Chasles veröffentlichte und von ihm unabhängig entdeckte Theoreme führt Weddle in einer zweiten Arbeit vor**), ermutigt von Chasles, wie er ausdrücklich hervorhebt. Auf rechnendem Wege wird zunächst Chasles' Resultat gezeigt: „Trifft jede Ebene des einen von zwei aufeinander bezogenen Tetraedern die drei auſserhalb der entsprechenden Ebene gelegenen Kanten des anderen in Punkten einer Fläche F_2, so gehören die vier Geraden, in denen sich entsprechende Ebenen der Tetraeder schneiden, in die eine Geradenschar eines einschaligen Hyperboloids." Aber Weddle zeigt (S. 128) weiter: „Irgend drei der Schnittlinien entsprechender Ebenen werden von jeder Ebene des vierten Paars in drei auf einer Geraden liegenden Punkten getroffen. Die so entstehenden acht Geraden gehören in die andere Geradenschar des Hyperboloids." In dieser Bemerkung ist die Handhabe zu einem einfachen von Hesse angedeuteten Beweise für das Chasles'sche Theorem gegeben.***) Eine Oberfläche F_2 schneide die Kanten AD; BD; ...; AB eines Tetraeders $ABCD$ in den Punkten A_4, D_1; B_4, D_2; ...; A_2, B_1; als-

*) Vergl. die oben [II, 10] gemachten Ausführungen über Servois, Dandelin und Hesse. Ich komme auf die Arbeit von Hesse in dem Capitel über das Hexagrammum mysticum zurück [Bd. 2 dieses Berichtes].

**) Weddle, On the theorems in space etc. Part. III, Camb. Dubl. Journ., Bd. 6 (10), 1851, S. 114—135.

***) Vergl. a. a. O. S. 387††† (S. 648).

dann liegen die Punkte BC, A_2A_3; CA, B_3B_1; AB, C_1C_2 in der Pascal'schen Geraden d_0 des einem Kegelschnitte von F_2 eingeschriebenen Sechsecks $B_3C_2C_1A_3A_2B_1$, gehören aber offenbar zugleich den Geraden a; b; c an, in welchen die Ebenen BCD; CAD; ABD des ersten Tetraeders die homologen Ebenen $A_2A_3A_4$; $B_3B_1B_4$; $C_1C_2C_4$ des zweiten schneiden. Selbstverständlich trifft d_0 die Schnittlinie d von ABC und $D_1D_2D_3$. Hieraus ergiebt sich durch Vertauschung der Buchstaben, daſs jede der vier Geraden a, b, c, d von jeder der vier Geraden a_0, b_0, c_0, d_0 geschnitten wird, sodaſs die beiden Quadrupel in die beiden Geradenscharen eines einschaligen Hyperboloids gehören. Weddle beweist noch (S. 118) die Chasles'sche Erweiterung des Poncelet'schen Theorems von den perspectivischen Tetraedern, sowie auch den Satz von den im Polarsystem einer Oberfläche zweiter Ordnung reciproken Tetraedern und ist dann, unter Hinzunahme der dualen Beziehungen, im Stande, eine ganze Reihe unter sich gleichwertiger Theoreme aufzustellen (S. 128 ff.).

14. Auch bei zwei perspectivischen Tetraedern schneidet jede Ebene des einen auſserhalb der homologen Ebene gelegene Kanten des anderen in Punkten einer Fläche zweiter Ordnung. Die beiden so entstandenen Flächen F_2 und F_2' schneiden sich in zwei Kegelschnitten, von denen der eine in der Homologie-Ebene der beiden Tetraeder liegt (Fuſsnote zu S. 118). Jede Ebene des einen Tetraeders schneidet die nicht homologen Ebenen des anderen in Tangenten einer F_2 und F_2' zugleich umschriebenen Fläche G_2 (S. 134). Chasles selbst hatte bereits seinen Tetraedersatz, um ein Analogon zum Satze von Brianchon zu gewinnen, einer dualen Umformung unterzogen. Hierbei trat zu einem Tetraeder ein zweites hinzu, in dessen Ecken je drei von Kanten des ersten Tetraeders ausgehende Tangentialebenen einer Fläche F_2 sich schneiden. Auch zwei derartige Tetraeder traten natürlich in die mehrerwähnte Beziehung. Weddle hat dieses Theorem unabhängig entwickelt, wobei er auf den Satz von Brianchon nochmals zurückgeht.*)

In einer anderen Arbeit geht Weddle auf Tetraeder ein, deren sämtliche Kanten eine Oberfläche F_2 berühren.**) Zunächst wird

*) Weddle, Demonstration of Brianchon's theorem, and of an analogous property in space, Camb. Dubl. Journ., Bd. 7 (11), 1852, S. 10—13.

**) Weddle, On certain geometrical relations between a surface of the second degree and a tetrahedron whose edges touch the surface, Camb. Dubl. Journ., Bd. 8 (12), 1853, S. 105—148. F_2 hat mit Bezug auf das Tetraeder die Gleichung

$$t^2 + u^2 + v^2 + w^2 - 2tu - 2tv - 2tw - 2vw - 2wu - 2uv = 0.$$

Weddle schlieſst daraus, daſs die Fläche umbilicar sei; die Tangentialebene $v + w = 0$, welche die Tangente $v = 0$, $w = 0$ enthält, habe nur einen reellen Punkt mit der Fläche gemein.

entwickelt, dafs die Verbindungslinien der Berührungspunkte gegenüberliegender Kanten — gemäfs Steiner's Satz — einen Punkt miteinander gemein haben. Hinsichtlich dieses Punktes liegen das gegebene und das ihm polar gegenüberstehende Tetraeder perspectivisch. Die Kanten des zweiten Tetraeders berühren die Fläche F_2 in denselben Punkten, wie die des ersten. Die Ecken der beiden Tetraeder sind Grundpunkte eines Bündels von Flächen F_2, die duale Beziehung verknüpft die acht Ebenen der beiden Tetraeder (S. 118). Berührt eine Fläche G_2 sämtliche Kanten des einen Tetraeders, so berührt sie entweder überhaupt keine Kante, oder zwei Paare gegenüberliegender Kanten, oder endlich alle Kanten des zweiten Tetraeders (S. 123). Im letzteren Falle berührt jedoch G_2 zwei zusammengehörige Paare gegenüberliegender Kanten der beiden Tetraeder in denselben beiden Punkten, wie die ursprüngliche Fläche F_2. Zwei Paare gegenüberliegender Kanten des einen Tetraeders und die entsprechenden Kantenpaare des zweiten gehören einem einschaligen Hyperboloid an (S. 124).

15. Ich habe eine Arbeit Weddle's übergangen, welche den letztgenannten vorangeht, in der hauptsächlich von Gruppen associirter Punkte und Ebenen die Rede ist.*) Er entwickelt zwei Theoreme, zu denen die dualen Sätze, sowie die Umkehrungen hinzutreten, nämlich einmal den Hauptsatz Hesse's, nach dem die Ecken zweier Polartetraeder einer Fläche G_2 Grundpunkte eines Bündels von Flächen F_2 sind, andererseits (S. 58) das folgende Theorem: „Wenn die vier Geraden, in denen sich gegenüberliegende Ebenen eines räumlichen einfachen Achtecks begegnen, einer Regelschar angehören, so sind die Ecken desselben Grundpunkte eines Bündels von Flächen F_2.“ Serret**), um dies schon hier zu bemerken, hat als Analogon zum Pascal'schen Satze folgendes räumliche Theorem aufgestellt: „Wenn sich in jedem von fünf Punkten einer Ebene zwei gegenüberliegende Kanten eines räumlichen Zehnecks schneiden, so liegen seine Ecken auf einer Fläche F_2.“ Man sieht jedoch, dafs die zehn Punkte der Fläche F_2 nicht unabhängig voneinander sind.

16. Es wurde [XXXIV, 8] geschildert, in welcher Art Seydewitz den Büschel aus Flächen F_2 rein geometrisch für den Fall nachwies, dafs die beiden erzeugenden Flächen sich in einer reellen Curve schneiden. Aus der Betrachtungsweise Poncelet's [XIX, 4], welche als unzureichend bezeichnet werden mufste, kann man leicht eine andere befriedigende ableiten, welche in der That von Staudt***) zur Definition des Büschels benutzt wird. Auf jeder Geraden bestimmen

---

*) Weddle, On the theorems etc. — Part. II, Camb. Dubl. Journ., Bd. 5 (9), 1850, S. 58—69.

**) Serret, Note sur une classe particulière de décagones gauches, inscriptibles à l'ellipsoïde, Comptes rendus, Bd. 82, 1876, S. 162—165 (S. 163).

***) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, Heft 3, Nürnberg 1860 (S. 341).

die beiden Punktepaare, welche sie mit zwei Flächen F_2' und F_2'' gemein hat, eine Involution. Irgend ein anderes Punktepaar PP' derselben gehört alsdann einer dritten Fläche des Büschels an, den F_2' und F_2'' festlegen. Durchläuft in der That PP' einen Strahlenbüschel mit dem Scheitel P, so beschreibt P' nach Sturm's Verallgemeinerung des Desargues'schen Involutionssatzes [XXIV, 6] einen Kegelschnitt. Je zwei dieser Kegelschnitte schneiden sich aufser in P in noch einem weiteren Punkt; sie liegen daher in einer Oberfläche F_2, welche augenscheinlich sämtliche gemeinsamen Punkte der beiden gegebenen Flächen enthält. Ist auf diese oder die von Seydewitz gegebene Weise der Büschel gewonnen, so ergiebt sich sofort der Bündel, und es ist auch von rein geometrischem Standpunkte aus die Frage gerechtfertigt: „Auf welchem Wege kann der achte Schnittpunkt dreier Oberflächen zweiter Ordnung aus sieben bereits bekannten Schnittpunkten derselben abgeleitet werden?“ Hesse hat das Verdienst, diese Frage in eleganter Weise gelöst zu haben. Seine erste Lösung des Problems stammt aus dem Jahre 1840.*) Der erste Teil der Abhandlung handelt allgemein von der Transformation einer quadratischen Form in eine Summe von Quadraten. Specielle Fälle der entwickelten Resultate sind Steiner's Satz [XXVII, 16]: „Zwei Polardreiecke eines Kegelschnittes sind einem Kegelschnitte eingeschrieben“ (S. 31) und das neue anscheinend erst 1860 von Staudt**) rein geometrisch begründete Theorem: „Die Ecken zweier Polartetraeder einer Fläche G_2 sind Grundpunkte eines Bündels von Flächen F_2“ (S. 36). Die folgenden Betrachtungen beruhen auf einem Satze, der mit seiner dualen Form schon bei Staudt [XXII, 3] auftritt, den Hesse (S. 41) in folgender Weise ausspricht: „Sind in Bezug auf einen Kegelschnitt K_2 zwei Ecken eines vollständigen Vierseits zu den gegenüberliegenden Ecken conjugirt, so besteht auch das dritte Paar gegenüberliegender Ecken aus zwei in Bezug auf K_2 conjugirten Punkten.“ Hesse leitet den Satz, indem K_2 in einen Kreis und eine Seite des Vierseits ins Unendliche projicirt wird, ziemlich indirect aus dem Höhenpunktsatze beim Dreieck ab. Auf dieses Theorem wird mit Hülfe des Pascal'schen Satzes in etwas unsymmetrischer Weise der erwähnte Satz von den Polardreiecken eines Kegelschnittes zurückgeführt.

17. Es seien nun $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ Polartetraeder, mithin z. B. die Geraden DA_1 und ABC, $D_1B_1C_1$ reciproke Polargerade einer Oberfläche F_2. Für den Kegelschnitt K_2, den die Fläche mit ABC gemein hat, ist somit ABC ein Polardreieck, ferner sind für ihn zu den Schnittpunkten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ von B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 die Schnitt-

*) Hesse, De octo punctis intersectionis trium superficierum secundi ordinis (Dissertation), Königsberg 1840. Man vergleiche auch den Abdruck der Abhandlung: Hesse, De curvis et superficiebus secundi ordinis, Crelle's Journ., Bd. 20, 1840, S. 285—308 (Abh. S. 21—49).

) Vergl.: a. a. O. S. 391* (S. 373).

punkte $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}_1$ von DA_1, DB_1, DC_1 conjugirt. Hesse construirt nun äufserst einfach das Polarsystem, welches durch das Polardreieck ABC und die beiden Paare $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ conjugirter Punkte eindeutig gegeben ist, und in dem $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ nach dem erwähnten Satze vom vollständigen Vierseit von selbst conjugirt sind.*) Die Ebenen, welche die Polaren von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach K_2 der Reihe nach mit A_1, B_1, C_1 verbinden, schneiden sich in dem Punkte D_1, der somit aus den sieben anderen A_1, B_1, C_1 und A, B, C, D linear abgeleitet ist.

Diese erste Lösung wird vom zeichnerischen Standpunkte aus die zweite, so elegant dieselbe ist, an Einfachheit übertreffen. Sind wieder $ABCD$ und $A_1B_1C_1D_1$ zwei Polartetraeder einer Oberfläche F_2, so enthält die Polarebene des Schnittpunktes P von AA_1 und DBB_1 einmal die Schnittgerade von DBC und $D_1B_1C_1$, andererseits den Schnittpunkt von AC und $D_1A_1C_1$. Da ferner zu den Punkten DB, AA_1B_1 und A_1 die Punkte A und B_1 conjugirt sind, so erkennt man mit Hülfe eines vollständigen Vierseits, dafs auch DBA_1, AB_1 und AA_1, DBB_1 für F_2 conjugirt sind. Hiernach liegen die vier Punkte DBC, B_1C_1; $D_1B_1C_1$, BC; $D_1A_1C_1$, AC; DBA_1, AB_1 in der Polarebene von P nach F_2 Aus diesem Grunde schneiden sich die Verbindungslinien der Punktepaare

$$DBC,\ B_1C_1;\ DBA_1,\ AB_1 \quad \text{und} \quad D_1B_1C_1,\ BC;\ D_1A_1C_1,\ AC.$$

Indem er D und D_1 immer mit den beiden letzten von acht associirten Punkten 1, 2, ..., 7, 8 und in geeigneten Permutationen 1, 2, 3, 4, 5, 6 mit A, B, C, A_1, B_1, C_1 zusammenfallen läfst, gewinnt Hesse folgende höchst einfache Regel: „Man ziehe durch 7 drei Gerade $1'4'$, $2'5'$, $3'6'$, von denen jede zwei gegenüberliegende Seiten des Sechsecks 123456 trifft; so entstehe das Sechseck $1'2'3'4'5'6'$, indem $1'$ der Seite 12, $2'$ der Seite 23 angehört, u. s. w.**) In analoger Art construire man mit Hülfe des Punktes 8 das Sechseck $1''2''3''4''5''6''$. Alsdann gehören die sechs Geraden

$$1'2',\ 2''3'',\ 3'4',\ 4''5'',\ 5'6',\ 6''1''$$

der einen und

$$1''2'',\ 2'3',\ 3''4'',\ 4'5',\ 5''6'',\ 6'1'$$

der anderen Geradenschar eines einschaligen Hyperboloids an.“ Hiernach verbindet $1''2''$ die Schnittpunkte von 123 mit $3'4'$ und $5'6'$,

*) Der Punkt A' bleibt, wenn er über BC bewegt wird, fortwährend zu A conjugirt. Nach dem Satze vom vollständigen Vierseit schneiden deshalb $A'\mathfrak{A}$ und $A'\mathfrak{A}_1$ die Geraden $A\mathfrak{A}_1$ und $A\mathfrak{A}$ in conjugirten Punkten. Diese Regel ergiebt zwei zu dem Schnittpunkte P von $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$ conjugirte Punkte, welche seine Polare p festlegen; dieselbe schneidet BC und CA in den Polen $\mathfrak{A}''$ und $\mathfrak{B}''$ von $A\mathfrak{A}$ und $B\mathfrak{B}$, womit dann die Polaren $\mathfrak{A}''\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}''\mathfrak{B}_1$ der Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden sind.

**) Die Punkte $1'$; $2'$; $3''$; $4''$; ... werden, um die obige Regel anzuwenden, als Schnittpunkte 745, 12; 756, 23; 861, 34; 812, 45; ... dargestellt.

$2''3''$ die Schnittpunkte von 234 mit $4'5'$ und $6'1'$, u. s. w. Die Diagonalen $1''4''$, $2''5''$, $3''6''$ des auf diese Art gefundenen Sechsecks $1''2''3''4''5''6''$ haben, wenn 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 gegeben sind, den gesuchten Punkt 8 miteinander gemein.

18. 1843 benutzte Hesse*) bei einer neuen Begründung seiner Construction die beiden Kegel zweiten Grades, welche eine gegebene Mantellinie l und fünf Punkte 2, 3, ..., 6 enthalten. Aus dem Pascal'schen Satze erkennt man sofort, daſs von jeder der beiden Spitzen eine Gerade ausgeht, welche die Geraden 23, 56 und die Verbindungslinie der Punkte $l2$, 45 und $l6$, 34 oder B und C zugleich trifft. Die beiden Geraden, welche 23, 56, BC und l zugleich treffen, schneiden auf l die Spitzen der gesuchten Kegel aus. Trifft eine Gerade, welche mit 23, 56, BC in dieselbe Regelschar gehört und deshalb ebenfalls von 53 geschnitten wird, die Ebenen $l2$ und $l6$ in den Punkten B_1 und C_1, so gehört der Schnittpunkt 7 von $5B_1$ und $3C_1$ der Curve an, welche die beiden Kegel auſser l miteinander gemein haben. Dieselbe kann also, ohne daſs man die Spitzen der Kegel vorher construirt, linear hergestellt werden.**) Werden die Punkte 2, 3, 4, 5, 6, 7 beliebig gegeben und ist von l nur ein Punkt 1 bekannt, so kann die Gerade l oder 18 construirt werden. BB_1 ist die Schnittlinie von 128 und 754, enthält also den bekannten Punkt $\mathfrak{B}_1$ oder 745, 12. Die zweite von B_1 ausgehende Gerade des oben betrachteten Hyperboloids enthält, da B_1 der Ebene 567 angehört, den bekannten Punkt $\mathfrak{B}_2$ oder 23, 567, trifft aber auch BC. In einer Ebene liegen also die Punkte $B, C, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ oder 812, 45; 861, 34; 745, 12; 756, 23. Entsprechend erkennt man bei Vertauschung von 2 und 6, 3 und 5, daſs auch 861, 34; 812, 45; 734, 61; 723, 56 einer Ebene angehören. Sind jetzt 1, 2, 3, ..., 8 associirte Punkte, so müssen notwendig die beiden Kegel, welche auf die beschriebene Art aus der Mantellinie 18 und den Punkten 2, 3, 4, 5, 6 entspringen, auch den Punkt 7

---

*) Hesse, Über die lineäre Construction des achten Schnittpunctes dreier Oberflächen zweiter Ordnung, wenn sieben Schnittpuncte derselben gegeben sind, Crelle's Journ., Bd. 26, 1843, S. 147—154 (Abh., S. 73—81). Eine lineäre Construction ist nach einer Fuſsnote zu S. 73 eine solche, bei der nur Gerade und Ebenen, bezw. in der Ebene nur Gerade Verwendung finden. Gehört ein Punkt zwei einem bekannten Dreiecke umschriebenen Kegelschnitten an, so ist diese Bestimmung nicht direct lineär; der Punkt kann aber durch eine lineäre Construction gefunden werden. Lineäre Constructionen können da verlangt werden, wo ein einziger Punkt von bestimmter Relation zu gegebenen zu suchen ist. Eine solche Construction ist z. B. für den neunten gemeinschaftlichen Punkt der Curven C_3 möglich, welche acht Punkte miteinander gemein haben.

**) Augenscheinlich durchschneiden sich zwei Kegel zweiten Grades mit den Spitzen 5 und 3 in der Curve; dieselben projiciren die beiden Kegelschnitte, welche das bezeichnete einschalige Hyperboloid mit den Ebenen $l2$ und $l6$ gemein hat.

enthalten. Es liegen also zunächst schon zwei der obigen Relationen vor, aus denen durch Permutation von 1, 2, ..., 6 die übrigen folgen. Man kommt also wieder zu den oben eingeführten Sechsecken $1'\ 2'\ 3'\ 4'\ 5'\ 6'$ und $1''\ 2''\ 3''\ 4''\ 5''\ 6''$ zurück. Aus den Beziehungen zwischen den Sechsecken hat Hesse später*) gefolgert, dafs 1 2 3 4 5 6 ein Pascal'sches Sechseck wird, wenn seine Ecken in eine Ebene gelangen, aufserhalb deren 7 und 8 bleiben. Rein rechnende Behandlungen dieser eleganten Beziehungen bieten zwei Abhandlungen aus dem Nachlasse Hesse's, von denen eine (um 1866 verfafst) zuerst 1878**), die andere (um 1872 verfafst) zuerst 1886***) veröffentlicht wurde.

19. In einer hier zu nennenden Abhandlung erörtert Plücker†) hauptsächlich die Erweiterung der stereographischen Projection, die bei Projection einer Fläche F_2 auf eine Ebene von einem ihrer Punkte aus entsteht, wobei ihre Kegelschnitte in Kegelschnitte mit zwei gemeinsamen — in speciellen Fällen unendlich fernen — Punkten übergehen. Oben [XII, 4] waren ältere Untersuchungen von Chasles, Dandelin, Steiner etc. über diesen Gegenstand angeführt worden. In einem Zusatze bespricht dann Plücker††) die Beziehungen zwischen zwei Projectionen dieser Art, die sich von einer Fläche F_2 auf einer Ebene entwerfen lassen, und erörtert

*) Hesse, Note über die acht Schnittpunkte dreier Oberflächen zweiter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 73, 1871, S. 371 (Abh., S. 561—562).

**) Hesse, Über Sechsecke im Raume, Crelle's Journ., Bd. 85, 1878, S. 304—314 (Abh., S. 651—662).

***) Hesse, Über die linearen homogenen Substitutionen, durch welche die Summe der Quadrate von vier Variabeln transformirt wird in die Summe der Quadrate der vier substituirten Variabeln, Crelle's Journ., Bd. 99, 1886, S. 110—127 (Abh., S. 663—681).

†) Plücker, Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung und Classe, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 341—356 (Abh., Bd. 1, S. 417—433).

††) Plücker, Bemerkung zu der Abhandlung: „Die analytische Geometrie der Curven auf den Flächen zweiter Ordnung“, ibidem, S. 360—376 (Abh., Bd. 1, S. 437—455). Jede Gerade einer Regelschar kann man durch das Doppelverhältnis festlegen, welches sie mit drei festen Geraden der Schar bestimmt. Als Coordinaten eines Punktes einer Fläche F_2 kann man die Doppelverhältnisse einführen, welche die beiden ihn enthaltenden Geraden von F_2 in der beschriebenen Art bestimmen. Einen speciellen Fall dieses Coordinatensystems benutzt Plücker in den beiden soeben genannten Abhandlungen. Beim Übergange zur Ebene gehen beide Regelscharen von F_2 in die Reihe der Tangenten eines Kegelschnittes oder specieller in Strahlenbüschel über. Wie Schönflies wohl mit Recht vermutet (Abh. von Plücker, Bd. 1, S. 611), stammen die beiden an letzter Stelle genannten Abhandlungen aus ziemlich früher Zeit, wenigstens findet sich schon in einer 1827 verfafsten Abhandlung der Satz: „Von einem Punkte O einer Fläche F_2 aus werden sämtliche ihr angehörige Kegelschnitte in ähnliche, ähnlich gelegene Kegelschnitte projicirt, wenn die Bildebene zur Tangentialebene von O parallel ist.“ Vergl. die zweite oben [S. 116***] genannte Abhandlung (Abh., Bd. 1, S. 75).

allgemeinere aus seiner Methode entspringende Verwandtschaften. Mit Bezug auf die oben [XXXIV, 9] geschilderte Hesse'sche Construction bemerkt Plücker, dafs auch er eine höchst einfache Construction der Oberfläche F_2 aus neun Punkten gegeben habe. Sie habe auf der Ermittelung des Büschels von Flächen F_2 mit acht gegebenen Grundpunkten beruht. Die betreffende Notiz sei, als dessen Zeitschrift einging, in Gergonne's Händen zurückgeblieben.*)

Auf ein scheinbares Paradoxon hat Steiner**) hingewiesen. Die Monge'sche Kugel [VIII, 7] einer Oberfläche F_2, von deren Punkten die Tripel zueinander senkrechter Tangentialebenen von F_2 ausgehen, sei durch ein F_2 umschriebenes rechtwinkeliges Parallelepipedon völlig festgelegt. Auf der anderen Seite müsse aber doch eine Fläche F_2 die Ebenen des Parallelepipedons und überdies drei beliebige aufeinander senkrechte Ebenen berühren. In der That artet die so bestimmte Fläche F_2 in einen unendlich fernen Kegelschnitt aus, dem Polardreiecke des unendlich fernen Kugelkreises umschrieben sind, und natürlich wird jetzt der Satz von der Monge'schen Kugel illusorisch. Wie es Steiner angiebt, ist der Widerspruch nur ein scheinbarer.

XXXV. Focaleigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

1. In den verschiedensten metrischen Beziehungen spielen die Brennpunkte des Kegelschnittes eine Hauptrolle. Eine erste Gruppe von Entwickelungen, welche danach streben, diese Sätze auf die eine oder andere Weise auf Oberflächen zweiter Ordnung zu übertragen, soll in dem folgenden Capitel geschildert werden. Verhältnismäfsig bald gelangte man dazu, bei den Oberflächen F_2 die zu den Brennpunkten des Kegelschnittes analogen Gebilde in den beiden Focalkegelschnitten zu erkennen. Aus den Beziehungen zwischen der Entfernung der Brennpunkte eines Kegelschnittes und den Längen seiner beiden Halbaxen entsprang sofort die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2-t}+\frac{y^2}{b^2-t}=1 \tag{1}$$

der Ellipsen und Hyperbeln, welche zwei Brennpunkte F und F' $(x=\pm\sqrt{a^2-b^2},\ y=0)$ miteinander gemein haben. Hieraus

*) Plücker, Aphorismen aus der Geometrie des Raumes, Crelle's Journ., Bd. 24, 1842, S. 60—68 u. 283—290 (Abh., Bd. 1, S. 387—403, Fufsnote zu S. 396).

**) Steiner, Geometrische Lehrsätze und Aufgaben, Crelle's Journ., Bd. 31, 1846, S. 90—92 (Ges. W., Bd. 2, S. 355—360, Aufg. 4).

entstand sofort durch Verallgemeinerung auf den Raum die Flächenschar*)

$$\frac{x^2}{a^2-t}+\frac{y^2}{b^2-t}+\frac{z^2}{c^2-t}=1. \tag{2}$$

Wie sich eine Ellipse und eine Hyperbel der ersten Mannigfaltigkeit rechtwinklig schneiden, so begegnen sich — diese Analogie trat zuerst hervor — die drei Flächen des zweiten Systems, welche einen Punkt enthalten und notwendig den drei verschiedenen Gattungen der Mittelpunktflächen angehören, unter rechten Winkeln. Auf die hierher gehörigen Schriften von Dupin und Binet ist an früherer Stelle [X, 4, 5] hingewiesen worden.

Man bezeichnete die Flächen der Mannigfaltigkeit (2) zunächst nur deshalb als confocal („homofocales"), weil sie auf den Coordinatenebenen confocale Kegelschnitte ausschneiden. Die Focalkegelschnitte

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1; \quad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$$

traten — bei Dupin — zunächst nur als Grenzkegelschnitte der Schar (2) in Analogie zu den Brennpunkten. Ähnlich wie sich die in der Schar (1) auftretenden Ellipsen und Hyperbeln an der Grenze um die beiden durch F und F' begrenzten Strecken zusammenziehen, so entstehen durch doppeltes Überlegen der beiden Gebiete, in welche die Focalellipse ihre Ebene zerlegt, ein unendlich abgeflachtes Ellipsoid und ein unendlich abgeflachtes einschaliges Hyperboloid der Schar (2). In analoger Weise vermittelt die Focalhyperbel den Übergang von den einschaligen zu den zweischaligen Hyperboloiden der Schar. Eine ausgeartete Fläche der einen oder anderen Art entsteht, wenn man das eine oder andere der beiden durch die Hyperbel abgegrenzten Gebiete doppelt überdeckt. Hat man also erkannt, daſs die Trägheitsaxen eines Körpers mit den Normalen unter sich confocaler Flächen F_2 zusammenfallen, so wird notwendig jeder Punkt eines Grenzkegelschnitts der Schar unendlich viele Trägheitsaxen, und zwar mit gleichen Trägheitsmomenten, aussenden, welche zu seiner Tangente senkrecht stehen, denn jede diese Tangente enthaltende Ebene ist eine Tangentialebene einer ausgearteten Fläche der Schar. So erklärt sich naturgemäſs diese von Binet und Ampère begründete Eigenschaft der Focalkegelschnitte.

2. Eine andere Eigenschaft der Focalkegelschnitte haben Steiner und Bobillier hervorgehoben. Steiner**) giebt den Satz (S. 11): „Der Ort des Scheitels eines geraden Kegels vom zweiten Grade,

*) Ich werde mich in der Folge in der Regel auf Mittelpunktflächen beschränken, da die für Paraboloide eintretenden Modificationen sich meistens von selbst ergeben.

**) Steiner, Einige geometrische Sätze, Crelle's Journ., Bd. 1, 1826, S. 38—52 (Ges. W., Bd. 1, S. 1—16).

welcher eine der Gröfse und Lage nach gegebene Fläche vom zweiten Grade in einer ebenen Curve berührt: ist eine ebene Curve vom zweiten Grade.“ Beim Ellipsoid mit den Halbaxen a, b, c ($a > b > c$) handle es sich um die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Die Curve schneidet das Ellipsoid in seinen Nabelpunkten. Die Axen der Hyperbel sind ihrer Gröfse nach gleich den Excentricitäten derjenigen beiden Ellipsen, in welchen die beiden durch die mittlere Axe gelegten Hauptaxenebenen das Ellipsoid schneiden. Bobillier*) unterzieht die Frage bei den Mittelpunktflächen einer rechnenden Behandlung und gelangt (S. 161) zu dem Resultat: „Die Spitzen der einer Oberfläche F_2 umschriebenen Rotationskegel erfüllen drei Kegelschnitte, welche in den Hauptaxenebenen liegen. Jeder dieser Kegelschnitte hat mit dem zugehörigen Hauptschnitt von F_2 die Brennpunkte gemeinsam; die Endpunkte seiner Axen sind Brennpunkte der beiden anderen Hauptschnitte von F_2.“ Beim Ellipsoid, fährt Bobillier fort, ist der eine Kegelschnitt eine Ellipse innerhalb desselben, der zweite Kegelschnitt ist imaginär, der dritte allein in Betracht kommende Kegelschnitt ist eine Hyperbel. Mit Hülfe eines oben erwähnten Hülfssatzes von Poncelet**) zeigt Bobillier sodann, dafs die Axen der geraden Kegel die Hyperbel berühren. Das Steiner-Bobillier'sche Resultat gestattet augenscheinlich folgende Fassung: „Die Tangentialkegel, welche confocale Flächen F_2 aus einem Punkte der Focalellipse oder der Focalhyperbel erhalten, sind Rotationskegel, welche die Tangente des Focalkegelschnittes zur gemeinsamen Axe haben; die einschaligen Hyperboloide empfangen aus Punkten beider Kegelschnitte, die Ellipsoide, bezw. die zweischaligen Hyperboloide nur aus Punkten der Hyperbel, bezw. der Ellipse reelle Tangentialkegel.“ Speciell erkennt man, was schon Dupin erwiesen hatte [X, 4]: „Die Focalhyperbel enthält die Nabelpunkte der Ellipsoide, die Focalellipse diejenigen der zweischaligen Hyperboloide der Schar.“ Je mehr sich ferner eine Oberfläche der Schar abplattet, desto mehr nähert sich der Tangentialkegel, den sie aus einem Punkte empfängt, dem Kegel, welcher einen der Grenzkegelschnitte projicirt; so erklärt es sich, dafs von allen Punkten des einen Grenzkegelschnittes aus der andere durch gerade Kegel projicirt wird, wie Dupin ebenfalls zuerst erkannt hatte [VII, 2].

Bobillier gewinnt durch Umformung im Polarsystem einer Kugel noch das wichtige Resultat: „Die Ebenen der Kegelschnitte einer Fläche F_2, welche von einem festen Punkte aus durch Rotations-

*) Bobillier, Sur les foyers dans les surfaces du second ordre, Quet. Corr., Bd. 4, 1828, S. 157—163.
**) Vergl. S. 295* (Traité, Bd. 1, Nr. 478).

kegel projicirt werden, umhüllen einen Kegel zweiten Grades, haben also einen Punkt miteinander gemein.*) Die Ebene beschreibt einen Büschel, wenn eine der Fläche F_2 umschriebene Rotationsfläche zweiter Ordnung den fraglichen Punkt zum Brennpunkt hat" (S. 162).

3. Nach den Entwickelungen von Ampère [X, 6] erfüllen die Trägheitsaxen eines Körpers, welche einen Punkt P enthalten, im allgemeinen einen Kegel zweiten Grades, hingegen zwei Strahlenbüschel für einen Punkt P einer Hauptträgheitsebene α des Schwerpunktes, also einer Hauptaxenebene der Schar confocaler Flächen, mit deren Normalen nach dem Binet'schen Satze die Trägheitsaxen des Körpers zusammenfallen. Der eine Strahlenbüschel gehört der Ebene α selbst, der zweite einer zu ihr senkrechten Ebene π an. Den gemeinsamen Strahl p beider Büschel definirt Ampère als Normale eines Kegelschnittes, der P enthält und zu dem Grenzkegelschnitte der Ebene α bezüglich seines Mittelpunktes ähnlich liegt. Die Strahlen des zweiten Büschels sind Trägheitsaxen von Punkten eines Kreises, dessen Mittelpunkt p angehört und der P enthält. Aus der Combination von Binet's und Ampère's Resultaten gewinnt man also den Satz: „Legt man von einer Geraden l einer Hauptaxenebene aus Tangentialebenen an eine Fläche F_2, welche in Q' und Q'' berühren mögen, so bleibt der Schnittpunkt L der zugehörigen Normalen mit der Hauptaxenebene ungeändert, wenn F_2 eine Schar confocaler Flächen beschreibt." Die Gerade $Q'Q''$, die Polargerade von l nach F_2, nähert sich, wenn F_2 sich um den Focalkegelschnitt der Hauptaxenebene zusammenzieht, offenbar dem in L errichteten Lote. Schliefslich entsteht der Satz: „Der Punkt und die Gerade, in welchen eine Normale einer Fläche F_2 und die zugehörige Tangentialebene die Ebene eines Focalkegelschnittes treffen, sind für denselben Pol und Polare." Man kann dem Theorem auch folgende andere Fassung geben: „Durch jeden Punkt des Raumes kann man drei Flächen zweiter Ordnung mit gegebenen Focalkegelschnitten legen. Die aufeinander senkrechten Normalen derselben schneiden auf jeder der Hauptaxenebenen ein Tripel conjugirter Punkte des zugehörigen reellen oder imaginären Focalkegelschnittes aus."

4. In beiden Formen spricht Chasles**) den Satz im Anfang einer 1837 veröffentlichten Entwickelung aus, welche für diese Lehre von der gröfsten Bedeutung ist. Er bezeichnet jedoch die eine der drei erwähnten aufeinander senkrechten Geraden als die Normale einer Fläche F_2, die beiden anderen als die Tangenten ihrer

*) Offenbar giebt es drei Kegel der bezeichneten Art, von denen einer imaginär ist. Nur beim einschaligen Hyperboloid führen die beiden reellen Kegel aut Reihen reeller Rotationskegel.

**) Chasles, Propriétés nouvelles des surfaces du second degré, analogues à celles des foyers dans les coniques, Aperçu historique, Note 31, S. 384—399.

Krümmungslinien, welche den Fuſspunkt der Normale enthalten. Hierbei tritt noch deutlicher die Analogie zu dem Satze hervor: „Jede Tangente und die zugehörige Normale eines Kegelschnittes werden sowohl durch die beiden reellen als auch durch die beiden imaginären Brennpunkte harmonisch getrennt.“ Auch für den dritten imaginären Focalkegelschnitt einer Oberfläche F_2 erhält man so eine Definition. Bei Flächen der oben betrachteten Schar (2) besitzt dieser dritte Focalkegelschnitt die Gleichung

$$\frac{y^2}{b^2-a^2}+\frac{z^2}{c^2-a^2}=1.\text{*)}$$

Confocale Kegelschnitte haben die Paare aufeinander senkrechter conjugirten Strahlen — welche durch die Brennpunkte harmonisch getrennt werden — miteinander gemein. In analoger Weise sendet jeder Punkt des Raumes drei aufeinander senkrechte für alle unter sich confocalen Flächen F_2 conjugirte Strahlen aus, welche insbesondere auf jeder Hauptaxenebene ein Tripel conjugirter Punkte des ihr angehörigen Focalkegelschnittes ausschneiden. Man kann dieses fundamentale Theorem auch in folgender Weise fassen (Nr. 50): „Die Pole einer Ebene bezüglich unter sich confocaler Flächen F_2 erfüllen eine zu dieser Ebene selbst senkrechte Gerade“, oder, wenn man an die ursprüngliche Beziehung zwischen Pol und Polarebene anknüpfen will: „Die Spitzen der Tangentialkegel unter sich confocaler Flächen F_2, deren Berührungskegelschnitte einer festen Ebene angehören, erfüllen eine zu dieser Ebene senkrechte Gerade.“ Nach dem Obigen haben unter sich confocale Flächen F_2 sämtliche Paare aufeinander senkrechter conjugirten Ebenen miteinander gemein. Aus diesem Grunde erhalten sie insbesondere aus einem beliebigen Punkte confocale Tangentialkegel.**) Von jedem der beiden diesen Kegeln gemeinsamen Focalstrahlen gehen unendlich viele Paare aufeinander senkrechter conjugirten Ebenen aus. Wenn man eine Fläche des betrachteten Systems nach und nach in das einschalige Hyperboloid übergehen läſst, welches einen Punkt P enthält, so flacht sich der von P ausgehende Tangentialkegel mehr und mehr ab und überdeckt zum Schluſs je nach der Seite, von welcher man sich dem Hyperboloid nähert, den einen oder

*) Chasles giebt, da der Name „Focale“ bereits von Quetelet für eine Curve dritter Ordnung verbraucht sei, der Bezeichnung „coniques excentriques“ den Vorzug vor der anderen „coniques focales“, die er sonst für geeigneter halten würde. Indes hat sich, wie bekannt, die letztere Bezeichnung eingebürgert.

) Diese Eigenschaft giebt auch Mac-Cullagh in der unten [S. 407] erwähnten Arbeit aus dem Jahre 1837 mit der Bemerkung, er habe sie bereits 1836 in seinen Vorlesungen an der Universität Dublin mitgeteilt. Das unmittelbar vorangehende Theorem ist von Graves gegeben worden, wie derselbe im Anschluſs an die Verlesung von Mac-Cullagh's Arbeit constatirte.

den anderen der beiden Strahlenwinkel doppelt, welche die von P ausgehenden Geraden des Hyperboloids begrenzen. Diese beiden Geraden sind also (Nr. 11) die Focalstrahlen der von P ausgehenden Tangentialkegel; von den gemeinsamen Hauptaxen steht die eine zu beiden Geraden zugleich senkrecht, während die beiden anderen die von ihnen gebildeten Winkel halbiren. Zwei der Tangentialkegel schneiden sich, wenn sie sich überhaupt begegnen, rechtwinklig. Insbesondere gilt dies von den Kegeln, welche die beiden Focalkegelschnitte von P aus projiciren. Diesen speciellen Fall des Theorems hatte, wie oben [XXI, 9] angemerkt wurde, Chasles bereits 1829 gegeben und auch den auf confocale Rotationsflächen bezüglichen Specialfall entwickelt. Aber obgleich Chasles nach späteren Ausführungen*) auch das allgemeine Theorem schon 1829 gekannt hat, so hat er doch, wie es scheint, vor 1836 [bezw. 1834] nichts darüber veröffentlicht; daher gebührt die Priorität für den Satz Jacobi, der die soeben angeführte elegante Bestimmung der Focalstrahlen 1834 in dem weiter unten**) nochmals erwähnten Briefe an Steiner anführt. Flacht sich das einschalige Hyperboloid ab, so gelangt P — wie Jacobi weiter ausführt — in die Ebene des einen oder anderen Focalkegelschnitts;

) Diese Fragen werden erörtert in der Notiz: Chasles, Notes sur quelques questions de priorité, au sujet d'un Mémoire de M. Mac Cullagh, Liouv. Journ., Bd. 11, 1846, S. 120—123. Hiernach wird der allgemeine Satz, nach dem zwei confocale Flächen F_2 und G_2 aus einem beliebigen Punkte sich rechtwinklig durchschneidende Tangentialkegel empfangen, zuerst in der oben [S. 191] genannten, 1829 der Société philomatique übergebenen — aber erst 1878 veröffentlichten — Arbeit erwähnt (Fufsnote zu S. 247) und in einem vom 2. April 1830 datirten Zusatze der Arbeit (S. 248 ff.) rechnend entwickelt. Als confocal werden die Kegel in einem 1834 verfafsten und im Auszuge veröffentlichten Briefe an Quetelet bezeichnet. Vergl.: M. Quetelet... communique également l'éxtrait suivant d'une lettre qui lui a été adressée par M Chasles, correspondant de l'académie, Bull. de l'ac. de Bruxelles (Nr. 27 vom 6. Dez. 1834) Jahrg. 1832—1834, Bd. 1, 1836, S. 190—193 (S. 191, 192). In der oben [S. 236**] genannten Notiz von 1835 wird flüchtig erwähnt, dafs Chasles in gewissen Curven bei einer Fläche F_2 Gebilde erkannt habe, die zu ihr in derselben Beziehung stehen, wie die Brennpunkte zum Kegelschnitte. Eine Sammlung von Theoremen ist unter dem Titel der Note 31 des Aperçu historique bereits 1835 der Académie des Sciences übergeben worden. Mit diesen Hinweisen begegnet Chasles Mac Cullagh's Äufserung, er habe seine 1837 zuerst veröffentlichten Entwickelungen über die Focalkegelschnitte bereits 1836 in seinen Vorlesungen an der Universität zu Dublin vorgetragen. Vielleicht bezieht sich auf diese Vorträge auch Salmon's Äufserung: „In the year 1836 Professor Mac Cullagh published this modular method of generation of quadrics." Vergl.: Salmon, A treatise on the analytic geometry of three dimensions, Dublin 1862, Fufsnote zu S. 109. Die mir zugänglichen Schriften von Mac Cullagh sind 1837 und 1843 erschienen.

**) Vergl. a. a. O. S. 420* (S. 7) Einen rechnenden Beweis des Satzes enthält die Notiz: Cayley, Demonstration of a geometrical theorem of Jacobi's, Camb. Dubl. Journ., Bd. 3 (7), 1848, S. 48—49.

die Focalstrahlen gehen in zwei Tangenten desselben über. Gehört nun der Punkt P dem Focalkegelschnitt an, so vereinigen sich die beiden Focalstrahlen zu einer Rotationsaxe des von P ausgehenden Tangentialkegels, wie es der Steiner-Bobillier'sche Satz ergeben hatte.

5. Eine Reihe von Einzeltheoremen, in denen Chasles die Analogie der Brennpunkte zu den Focalkegelschnitten genauer hervortreten läfst*), steht an Bedeutung gegen die Entdeckung (Nr. 47) weit zurück, dafs unter sich confocale Flächen F_2 einer imaginären abwickelbaren Fläche eingeschrieben sind; dies entspreche dem Satze Poncelet's, dafs Kegelschnitte mit gemeinsamen Brennpunkten die Seiten eines imaginären Vierseits berühren, von dessen drei Paaren gegenüberliegender Ecken eines aus den reellen, eines aus den imaginären Brennpunkten, das dritte aber aus zwei ganz bestimmten unendlich fernen imaginären Punkten bestehe. Nach Poncelet's Entwickelungen arten vier Individuen einer Schar von Flächen F_2 in Kegelschnitte aus, welche Strictionslinien der zugehörigen Hüllfläche sind. Diese Strictionslinien bestehen, wie Chasles hervorhebt, aus den drei Focalkegelschnitten und einem unendlich fernen imaginären Kegelschnitt, der ebenfalls als Focallinie bezeichnet werden müsse. Dafs dieser vierte Focalkegelschnitt der unendlich ferne Kugelkreis ist, geht indirect aus Chasles' Äufserungen hervor, obwohl er es ausdrücklich nicht ausgesprochen hat. Nach den Entwickelungen Poncelet's [XXI, 2] erfüllen nämlich die Pole einer Ebene α bezüglich der Flächen F_2 einer Schar eine Gerade; dieselbe enthält insbesondere die Pole der vier Kegelschnitte der Schar nach den Sehnen, welche die Ebene α auf ihnen ausschneidet. Nach dem oben angeführten Theorem — welches Chasles ausdrücklich damit in Verbindung bringt, dafs confocale Flächen F_2 einer Schar angehören — ist der Ort der Pole für den Fall confocaler Flächen F_2 eine zu α senkrechte Gerade. Hiernach gehört die unendlich ferne Strictionslinie einer Kugel an, fällt mit dem unendlich fernen Kugelkreise zusammen.

Die Hüllfläche einer Schar unter sich confocaler Flächen F_2 besteht bekanntlich aus sämtlichen unendlich kleinen Kreisen dieser Flächen, anders ausgedrückt: „Die beiden Erzeugenden, welche von einem Punkte S eines Focalkegelschnittes ausgehen, liegen in der Normalebene von S und projiciren die unendlich fernen Kreispunkte dieser Ebene.“ Chasles drückt diese Eigenschaft (Nr. 28) in dem Satze aus: „Unter sich confocale Flächen F_2 schneiden die Normalebene

*) Zu dem Satze: „Die Fufspunktcurve eines Kegelschnittes bezüglich eines Brennpunktes ist der Kreis, welcher die Hauptaxe zum Durchmesser hat“, ist z. B. ein Specialfall eines Bobillier'schen Theorems [Vergl.: S. 174***] analog: „Die Spitze eines orthogonalen Trieders, welches aus Tangentialebenen einer Fläche F_2 und ihrer beiden Focalkegelschnitte zusammengesetzt ist, beschreibt eine Kugel, welche F_2 in den Endpunkten der Hauptaxe berührt.“ (Nr. 25).

eines Punktes S eines Focalkegelschnittes in Kegelschnitten mit dem gemeinsamen Brennpunkte S." Alle diese Kegelschnitte berühren ja nach den von Poncelet begründeten Anschauungen in der That die Asymptoten eines Kreises mit dem Mittelpunkte S. Von dem Punkte S gehen somit unendlich viele allen Flächen der Schar gemeinsame Tripel aufeinander senkrechter conjugirten Strahlen aus, welche sämtlich die Tangente des Focalkegelschnittes miteinander gemein haben. Nochmals folgt hieraus, dafs der Tangentialkegel von F_2 mit der Spitze S diese Tangente zur Rotationsaxe hat; man erkennt auch, dafs die unendlich kleine Kugel mit dem Mittelpunkte S, in deren Polarsystem je drei in S sich senkrecht schneidende Strahlen conjugirt sind, jede Fläche der Schar in zwei Punkten berührt. Diesen letzten Satz hat jedoch Chasles erst später und zwar in ganz anderem Zusammenhange ausgesprochen.

6. Chasles führt am Schlufs seiner Note noch einige weitere Resultate über den Inbegriff der Normalen unter sich confocaler Flächen F_2 an. Bei einem Rückblick auf die bisherigen Ergebnisse entsteht die Frage: „Hat sich Chasles eine einigermafsen klare Vorstellung des aus diesen Normalen bestehenden Complexes, des Axencomplexes, gebildet?" Ich meine doch, man kann diese Frage nicht ganz verneinen. Meines Erachtens beginnt die Vorgeschichte des Axencomplexes mit der oben besprochenen Arbeit Ampère's. Binet gebührt in dieser Angelegenheit nur das Verdienst, die Ampère'sche Arbeit durch das schöne Resultat vorbereitet zu haben, dafs die Trägheitsaxen eines Körpers zugleich Normalen solcher Flächen F_2 sind, welche die Brennpunkte der Hauptschnitte miteinander gemein haben, also confocal sind. Ampère schuf, wie mir scheint, den Begriff des Complexes überhaupt, indem er bemerkte, dafs durch einen Punkt im Raume Trägheitsaxen anderer Punkte hindurchgehen, und die gegenseitige Lage der so entstandenen Complexkegel untersuchte. Allerdings fehlt noch völlig der entsprechende Begriff der Complexcurve. Bekanntlich ist der Axencomplex ein specieller tetraedraler Complex, dessen Tetraeder aus dem Schwerpunkte und den unendlich fernen Punkten der Hauptträgheitsaxen eines Körpers besteht, dessen Trägheitsaxen den Complex erfüllen. Die vier Ecken des Tetraeders kommen als singuläre Punkte des Complexes auch bei Ampère zur Geltung; es wird erkannt, dafs sie Strahlenbündel zum Complex beitragen und folglich sämtlichen Complexkegeln angehören. Die unendlich ferne Ebene des Tetraeders kommt bei Ampère gar nicht zur Geltung, die drei anderen Ebenen des Tetraeders aber werden als singuläre Ebenen insofern erkannt, als für jeden Punkt einer solchen Ebene der Complexkegel in zwei Ebenen zerfällt, von denen die eine die gegenüberliegende Ecke des Tetraeders enthält, die andere mit der Tetraederebene zusammenfällt.

7. Der Axencomplex kann auf verschiedene Weisen durch Bezug-

nahme auf eine einzige Fläche F_2 definirt werden. Eine derartige oben recapitulirte Erzeugung fand sich bereits bei Ampère vor. Anschaulicher sind die Sätze, welche Chasles zu diesem Zwecke beibrachte. Der Complex erscheint als Ort der Axen der Tangentialkegel einer Fläche F_2 oder specieller der Kegel, welche einen Focalkegelschnitt derselben projiciren. Andererseits gehören ihm die Lote an, welche man von beliebigen Punkten des Raumes auf ihre Polarebenen nach F_2 fällen kann. Von hier aus gelangt man durch einen letzten Schritt zu der endgültigen Definition Reye's*), bei welcher der Axencomplex als Ort der Strahlen erscheint, welche mit ihren reciproken Polaren hinsichtlich einer Fläche F_2 rechte Winkel bestimmen. Auf diese Zusammenhänge weist Chasles durch Fragen am Schlusse seiner Note ausdrücklich hin. Chasles vervollständigt das bisher Bekannte noch durch die Sätze, dafs ein unendlich ferner Punkt einen Strahlenbüschel (Nr. 57), eine Ebene die Tangenten eines Kegelschnittes zum Complex beiträgt (Nr. 58); Chasles bringt den letzteren Satz in der Form: „Von dem Inbegriff der Normalen, welche man auf unter sich confocalen Flächen F_2 errichten kann, umhüllen die einer Ebene angehörigen einen Kegelschnitt. Ihre Fufspunkte erfüllen eine „focale à noeud"; die entsprechenden Tangentialebenen schneiden sich in einer zur Ebene senkrechten Geraden." Nähere Bestimmungen über den Kegelschnitt hat er also nicht hinzugefügt, wie er sich auch mit der Angabe begnügt, dafs die in einem Punkte zusammenlaufenden Normalen der Flächen einen Kegel zweiten Grades erfüllen, ohne selbst Ampère's genauere Angaben zu wiederholen. Dafs aber der fragliche Kegel den Mittelpunkt der Fläche und die unendlich fernen Punkte ihrer Axen enthält, hat Chasles 1838 in einer schon behandelten Arbeit ausgesprochen [XXX, 8], und es liefs sich auch erkennen, mit welchen Mitteln Chasles die geometrische Begründung des Satzes vollzogen dachte. Bei dem einer Ebene (α) angehörenden Complexkegelschnitt knüpfte Chasles ohne Zweifel an seine früheren Entwickelungen [XXX, 6] über die specielle Schar-Schar an, welche die um einen Punkt P beschriebenen Kreise mit einem beliebigen Kegelschnitt bestimmen. P ist hierbei der Berührungspunkt der einzigen Fläche der Schar, welche α zur Tangentialebene hat. Kegelschnitte dieser Schar-Schar werden von beliebigen Flächen des Systems ausgeschnitten. Die Complexcurve ist die am genannten Orte eingeführte Parabel. Sicher bedurfte es noch einer ordnenden Hand, um die Einzelheiten Ampère's und Chasles' in ein harmonisches Ganzes, die Theorie des Axencomplexes, einzufügen.

*) Reye, Die Geometrie der Lage, Bd. 2, erste Auflage, Hannover 1868 (S. 146 ff.). Den obigen Rückblick habe ich hauptsächlich mit Rücksicht auf eine Notiz Reye's in der dritten Auflage desselben Werkes (Bd. 2, Leipzig 1892) eingeschaltet (Anmerkung zur Geschichte dieses Axencomplexes, S. 147—148).

Dafs Chasles liniengeometrische Anschauungen durchaus nicht allzu fern lagen, zeigen seine Entwickelungen über einen anderen tetraedralen Complex, den zwei ähnliche Räume erzeugen. Die ersten Angaben über denselben stammen schon aus dem Jahre 1830 [XXII, 4].

8. In der soeben ausführlich besprochenen Note spricht Chasles sein Bedauern aus, dafs er den Entfernungseigenschaften des Kegelschnittes nichts analoges bei den Flächen F_2 an die Seite setzen könnte. Diese Lücke wurde durch verschiedene jetzt ausführlich zu besprechende Schriften ausgefüllt. Zunächst handelt es sich um Abwandlungen des Satzes, nach dem drei Oberflächen F_2, G_2, H_2 eines Büschels eine beliebige Gerade in Punktepaaren einer Involution treffen. Überlegungen, wie sie von Chasles und Sturm [XXIV, 6] beim Kegelschnittbüschel angestellt waren, ergeben die beiden gleichwertigen Sätze: „Zieht man durch die Punkte P und M zwei parallele Sehnen $Q'Q''$ und $\mathfrak{Q}'\mathfrak{Q}''$ einer Fläche G_2, durch P und N zwei parallele Sehnen $R'R''$ und $\mathfrak{R}'\mathfrak{R}''$ einer Fläche H_2, so gehört P einer dritten, mit G_2 und H_2 zu einem Büschel gehörigen Fläche F_2 an, wenn M und N fest bleiben, und die Relation besteht:

$$\frac{PQ' \cdot PQ''}{M\mathfrak{Q}' \cdot M\mathfrak{Q}''} : \frac{PR' \cdot PR''}{N\mathfrak{R}' \cdot N\mathfrak{R}''} = \text{const.}“$$

Die Richtungen der beiden Paare paralleler Sehnen können hierbei beliebig verschoben werden. Ein specieller Fall ist die Erweiterung des oben [S. 227*] angegebenen Kegelschnittsatzes von Sturm: „Verschiebt man zwei in P sich schneidende Sehnen $Q'Q''$ und $R'R''$ zweier Flächen G_2 und H_2 sich selbst parallel derart, dafs die Beziehung

$$\frac{PQ' \cdot PQ''}{PR' \cdot PR''} = \text{const.}$$

obwaltet, so bleibt P auf einer mit G_2 und H_2 zu einem Büschel gehörigen Fläche F_2.“ Als Specialfall ergiebt sich aus dem ersten Theorem, wenn M und N Mittelpunkte von G_2 und H_2 angehörigen Kreisen werden, aber auch mit Hülfe der Potenzeigenschaft des Kreises aus der zweiten Gleichung der folgende Satz: „Berühren die Geraden PQ und PR in Q und R Kreise zweier Flächen G_2 und H_2, so besteht die Beziehung

$$\frac{PQ}{PR} = \text{const.},$$

wenn P auf einer Fläche F_2 des durch G_2 und H_2 bestimmten Büschels sich bewegt.“ Diese im wesentlichen von Walker*) herrührende Betrachtung (S. 22 ff.) verknüpft einige der sofort zu betrachtenden Erzeugungen der Fläche F_2. Ist F_2 ein einschaliges Hyperboloid, so können G_2 und H_2 in unendlich dünne elliptische

*) Walker, Geometrical propositions relating to focal properties of surfaces and curves of the second order, Camb. Dubl. Journ., Bd. 7 (11), 1852, S. 16—28.

Cylinder ausarten. Man erhält — diesen Schlufs hat Walker nicht gezogen — zunächst folgende Erweiterung einer von Chasles aufgestellten Erzeugung des orthogonalen Hyperboloids: „Schreiten die Endpunkte Q und R der Strecken PQ und PR, die beständig zu zwei festen Ebenen parallel bleiben, so über zwei Gerade q und r, dafs die Beziehung

$$\frac{PQ}{PR} = \text{const.}$$

obwaltet, so bleibt P auf einem einschaligen Hyperboloid." Um ein gegebenes Hyperboloid zu erzeugen, kann man für q und r zwei beliebige reciproke Polargerade desselben nehmen, welche dasselbe in imaginären Punkten treffen. Gehen PQ und PR in die Entfernungen des Punktes P von den windschiefen Geraden über, so hat man es mit dem orthogonalen Hyperboloid zu thun, das auf unendlich viele Weisen in dieser Art erzeugt werden kann [XXIX, 8]. Jetzt lasse man G_2 in eine Kugel, H_2 in einen unendlich dünnen Cylinder übergehen. Eine Ebene, welche einen Kreis des Cylinders enthält, schneidet natürlich auch die Kugel und folglich auch die Fläche F_2 in einem Kreise; man erhält also den Lehrsatz: „Eine Fläche F_2 enthalte die beiden Kreise, welche eine Kugel mit einem Paare conjugirtimaginärer, von der reellen Geraden l ausgehenden Ebenen gemein hat. Legt man von jedem Punkte von F_2 aus einmal eine Tangente PQ an die Kugel, zieht andererseits parallel zu der Ebene eines reellen Kreises von F_2 eine Gerade PR nach l, so besteht die Relation

$$\frac{PQ}{PR} = \text{const.“}$$

Wenn nun endlich der Kreis sich auf einen Punkt reducirt, so folgt: „Eine Fläche F_2 ist der Ort der Punkte, deren Entfernungen von einem Punkte und einer Geraden in constantem Verhältnis stehen, wobei jedoch die Entfernung von der Geraden parallel zu der Ebene eines Kreises von F_2 zu messen ist." Die Analogie dieser „modularen Erzeugung" Mac Cullagh's zu dem Brennpunkt-Theorem von Pappus [VI, 2] ist offenbar, während der erstere Satz der Bobillier'schen Erweiterung desselben [VII, 5] entspricht. Aus der ursprünglichen Form des Walker'schen Theorems erhält man den zweiten Satz: „Sind PQ' und PQ'' die Entfernungen eines Punktes einer Fläche F_2 von zwei reellen Ebenen, die aus einer unendlich kleinen Kugel mit dem Mittelpunkte S Kreise der Fläche F_2 herausschneiden, so besteht für jeden Punkt P von F_2 die Relation

$$\frac{PQ' \cdot PQ''}{PS^2} = \text{const.“}$$

Auch bei dieser zweiten Erzeugung, welche Mac Cullagh als „umbilicar" bezeichnet, kann man eine Kugel von endlichem Radius benutzen, wobei statt PS die Tangente eintritt, welche sie aus P erhält.

9. Bevor ich auf die genauere Besprechung der einschlägigen Arbeiten eingehe, werde noch kurz die Art angedeutet, in der Willock's Erzeugung*) der Flächen F_2 von Walker begründet wird. Die Producte $M\mathfrak{Q}' \cdot M\mathfrak{Q}''$ und $N\mathfrak{R}' \cdot N\mathfrak{R}''$ können bei der ursprünglichen Fassung des Theorems auch an Flächen ermittelt werden, welche zu G_2 und H_2 ähnlich sind. Man kann dann G_2 und H_2 selbst in imaginäre oder reelle Kegel übergehen lassen. Die Spitzen derselben sind conjugirte Punkte von F_2. So entsteht (S. 150) das Theorem: „Die Gleichung

$$\frac{PQ}{\mathfrak{M}\mathfrak{Q}} : \frac{PR}{\mathfrak{N}\mathfrak{R}} = \text{const.}$$

besteht, wenn man P auf einer Fläche F_2 bewegt, die Q und R zu conjugirten Punkten hat, unter $\mathfrak{M}\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{N}\mathfrak{R}$ aber die zu PQ und PR parallelen Durchmesser geeigneter Hülfsflächen G_2 und H_2 versteht." Wenn R einer von drei bestimmten zu Q conjugirten Punkten ist — ein von R ausgehender Kegel zweiten Grades mufs nämlich die Schnittcurve der Fläche F_2 mit einer unendlich kleinen Kugel um Q enthalten — nimmt diese Relation die einfachere Form an:

$$PQ : \frac{PR}{\mathfrak{N}\mathfrak{R}} = \text{const.}$$

10. Die modulare Erzeugung der Flächen F_2 ist länger als die umbilicare bekannt. Im Jahre 1837 teilte Mac Cullagh**) dieselbe mit. Eine Fläche zweiter Ordnung ist der Ort der Punkte, deren Entfernungen von einem festen Punkte S — einem Focalpunkte — und einer Geraden — der zugehörigen Directrix — in einem constanten Verhältnis stehen, wobei jedoch die letztere Entfernung parallel zu einer Hülfsebene gemessen werden mufs, welche einen Kreis der Fläche F_2, gleichgültig aus welcher der beiden Scharen, enthält. Bei dem hyperbolischen Paraboloid, bei dem das constante Verhältnis — der Modul — den Wert 1 annimmt, werden die Geraden zu den Hülfsebenen parallel. Während alles andere constant bleibt, kann der Focalpunkt und mit ihm die Directrix verschoben werden. Der Focalpunkt — diesen Irrtum hat Mac Cullagh in der späteren Arbeit berichtigt — beschreibe stets die Focalellipse. Die Rotationsflächen mit eigentlichen Brennpunkten — also das zweischalige Rotationshyperboloid, das verlängerte Sphäroid und das Rotationsparaboloid — entbehren, wie Mac Cullagh ausdrücklich anführt, der modularen Erzeugung, hingegen ist dieselbe gerade bei den Rotationsflächen zweiter Ordnung

*) Willock, The focal generation of surfaces of the second order, Camb. Dubl. Journ., Bd. 4 (8), 1849, S. 149—160. Man vergleiche Chasles' Erweiterung des Brennpunktbegriffs [XXX, 11].

**) Mac Cullagh, On the Properties of Surfaces of the second Order, Proc. Irish Ac., Jahrgänge 1836—1840, Bd. 1, 1841, S. 89—90 (Nr. 6, 1837). [Vergl. S. 401*.]

ohne Brennpunkte auf sehr elegante Weise schon 1836 von Chasles nachgewiesen worden.*) Ein Punkt nämlich, dessen Entfernungen PQ und PS von einer Geraden q und einem Punkte S in einem constanten Verhältnisse stehen, beschreibt in der durch q und S festgelegten Ebene einen Kegelschnitt mit dem Brennpunkte S und der zugehörigen Directrix q; die Gleichung

$$\frac{PQ}{PS} = \text{const.}$$

definirt, wenn man S und Q (auf q) festhält, eine Kugel, welche mit der zu q in Q senkrechten Ebene einen der Fläche angehörigen Kreis gemein hat. Sein Mittelpunkt liegt mit q und S in einer Ebene. Die Fläche entsteht daher durch Rotation eines Kegelschnittes um seine Nebenaxe und hat zum Focalkegelschnitte den Kreis, welchen die Brennpunkte beschreiben. Die Directrices erfüllen einen Rotationscylinder.

11. Diese Überlegung läfst sich auf Flächen F_2 im allgemeinen übertragen. In einer späteren Arbeit,**) in welcher er alle diese Verhältnisse einer im wesentlichen rechnenden ausführlichen Behandlung unterzieht, weist Mac Cullagh implicite auf elementarem Wege nach, dafs eine gegebene modulare Erzeugung stets eine Fläche zweiter Ordnung ergiebt. Wenn nämlich PQ die Entfernung des Punktes P von der Geraden q bedeutet, jedoch gemessen parallel zu einer Ebene α, S ein fester Punkt ist, so definirt die Gleichung

$$\frac{PQ}{PS} = \text{const.}$$

eine Fläche, welche mit den zu α parallelen Ebenen Kreise — oder, wenn die Constante gleich 1 ist, Gerade — gemein hat. Statt der festen Ebene α kann man aber eine zweite einsetzen, welche zu ihr symmetrisch liegt hinsichtlich einer zu q senkrechten Ebene. Alsdann gelangt man zu einem zweiten Büschel paralleler Ebenen, welche Kreise — beziehungsweise Gerade — der Fläche enthalten (S. 450). Diese Eigenschaft aber kommt nur den Flächen F_2 zu.

Mac Cullagh benutzt folgende Untersuchungsmethode: Augenscheinlich ist die (x, y)-Ebene, welche den Focalpunkt S (oder x_1, y_1) enthält und zu der die Directrix im Punkte S' (oder x_2, y_2) senkrecht steht, eine Hauptaxenebene. Wird die y-Axe parallel zur Directrixebene gewählt, ist φ der Neigungswinkel derselben gegen die (x, y)-Ebene, und ist endlich m der Modul, so besteht (S. 449) für jeden Punkt x, y, z der Fläche die Gleichung

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + z^2 - m^2 ((x - x_2)^2 \sec^2 \varphi + (y - y_2)^2) = 0,$$

*) Vergl.: a. a. O. S. 62**.

**) Mac Cullagh, On the Surfaces of the Second Order, Proc. Irish Ac., Jahrgänge 1840—1844, Bd. 2, 1844, S. 446—507 (Nr. 42, 1843).

welche mit der Gleichung der gegebenen Fläche F_2,

$$Ax^2 + By^2 + z^2 + 2Gx + 2Hy = K,$$

identisch werden muss. Mac Cullagh untersucht sehr ausführlich sowohl die Mittelpunktflächen als auch die Paraboloide. Ich will mich im wesentlichen auf den ersten Fall

$$Ax^2 + By^2 + z^2 = K$$

beschränken. Die oben eingeführten Punkte S und S' beschreiben alsdann die beiden Kegelschnitte

$$K = \frac{A}{1-A}x^2 + \frac{B}{1-B}y^2; \qquad K = A(1-A)x^2 + B(1-B)y^2,$$

welche (S. 453) einander hinsichtlich eines Hauptschnittes der Fläche F_2 polar gegenüberstehen. Zudem liegt der Punkt S' auf der Normale des ersten Kegelschnittes, des Focalkegelschnittes, im entsprechenden Punkte S. Andererseits schneidet die S enthaltende Ebene eines Kreises von F_2 den aus den Directrices gebildeten Cylinder in einem Kegelschnitte, dessen Normale in dem S entsprechenden Punkte $\mathfrak{S}'$ den Punkt S enthält. Der Modul $m = \sqrt{1-B}$ bleibt offenbar für alle Punkte des Focalkegelschnittes der gleiche. Mac Cullagh bezeichnet nun einen Focalkegelschnitt als modular oder umbilicar, je nachdem sich an seine Focalpunkte modulare Erzeugungen mit reellen Bestimmungsstücken knüpfen lassen oder nicht. Bei dem einschaligen Hyperboloid sind sowohl Focalellipse als auch Focalhyperbel modular, von den beiden Moduln m und m', zu denen die Winkel φ und $\frac{\pi}{2} - \varphi$ gehören, ist der erstere gröſser als 1, der letztere liegt zwischen den Grenzen $\sin\varphi$ und 1; es besteht (S. 459) die Relation

$$\frac{\cos^2\varphi}{m^2} + \frac{\sin^2\varphi}{m'^2} = 1.$$

Beim einschaligen Rotationshyperboloid ($\varphi = 0$) geht übrigens die zweite Art der modularen Erzeugung verloren. Beim Ellipsoid ($0 < m < \cos\varphi$) ist nur die Focalellipse, beim zweischaligen Hyperboloid ($1 > m > \cos\varphi$) nur die Focalhyperbel modular. Beim elliptischen Paraboloid ist die eine Focalparabel modular; der Modul hat den Wert $\cos\varphi$. Beim hyperbolischen Paraboloid sind die beiden Focalparabeln modular, zu jeder gehört der Modul 1. Jedoch ergiebt sich, wenn $\varphi = 0$, $m = 1$ ist, ein parabolischer Cylinder. Beim Kegel bilden die beiden Focalstrahlen die (modulare) Focalhyperbel, die ebenfalls modulare Focalellipse reducirt sich auf die Spitze des Kegels, sodaſs zu zwei ersten Scharen modularer Erzeugungen noch eine einzelne hinzutritt, bei welcher der Punkt S mit der Spitze des Kegels, die Directrix mit der

Hauptaxe zusammenfällt. Mac Cullagh wiederholt hier einen bei früherer Gelegenheit gegebenen elementaren Beweis*); die Erzeugungen der ersten Art fallen fort, wenn es sich um einen Rotationskegel handelt.

12. Eine Fläche F_2 beschreibt bei wechselndem Modul einen Büschel, wenn ein Focalpunkt S, dessen Directrix s und die Stellungen der Kreisebenen vorliegen; die letzteren mögen mit der S enthaltenden, zu s senkrechten Hauptaxenebene den Winkel φ einschliefsen. Ist jetzt m_0 ein bestimmter Wert zwischen den Grenzen 1 und $\cos\varphi$, so erhält man für $m > m_0$ einschalige Hyperboloide, F_2 geht dann durch die Zwischenform des Kegels $(m = m_0)$ in ein zweischaliges Hyperboloid über und verwandelt sich, nachdem man für $m = \cos\varphi$ ein elliptisches Paraboloid erhalten hatte, in ein Ellipsoid. Für $m = 1$ geht F_2 in ein hyperbolisches Paraboloid über. Der Focalkegelschnitt, welcher S enthält, ist, je nachdem m innerhalb oder aufserhalb der Grenzen 1 und $\cos\varphi$ liegt, eine Hyperbel oder eine Ellipse**), für die Werte 1 und $\cos\varphi$ selbst eine Parabel, für m_0 ein Geradenpaar. An der Betrachtung dieses Büschels (S. 6ff.) hat Townsend diese Verhältnisse nochmals ausführlich erörtert in einer Arbeit, auf die ich später genauer zurückkomme.***)

13. Die umbilicare Erzeugung der Flächen F_2 haben unabhängig von einander Salmon und Amiot — die Schreibweise des Namens schwankt zwischen Amyot und Amiot — angegeben.†)

---

*) Fufsnote zu S. 457; Mac Cullagh führt folgende mir nicht zugänglich gewordene Quelle an: Examination Papers of the year 1838, S. XLVI, University Calendar for 1839.

**) Der Büschel, welchen der Flächenbüschel auf der durch S bestimmten Hauptaxenebene ausschneidet, enthält den unendlich kleinen Kreis mit dem Mittelpunkte S. Ein zweiter unendlich kleiner Kegelschnitt des Büschels, dessen Mittelpunkt s angehört, geht in einen Nullkreis über, wenn er parallel zu s auf eine Kreisebene von F_2 projicirt wird. Das einzige reelle Geradenpaar des Büschels gehört dem oben erwähnten Kegel an.

***) Townsend, On a principle in the theory of surfaces of the second order, and its application to M. Jacobi's method of generating the ellipsoid, Camb. Dubl. Journ., Bd. 3 (7), 1848, S. 1—28, 97—108, 148—159.

†) Mac Cullagh erwähnt auf S. 467 der oben [S. 408**] genannten Schrift, Amiot sei nicht der erste, welcher die in der umbilicaren Erzeugung der Flächen F_2 liegende Analogie zu Brennpunkteigenschaften des Kegelschnittes bemerkt habe, und fährt dann (S. 468) fort... „Mr. Salmon had in fact proposed it (das Theorem) for investigation to the students of the University of Dublin, at the ordinary examinations in October, 1842; and it was published, towards the end of that year, in the University Calendar for 1843, some months before the date of M. Cauchy's report, by which the contents of M. Amyot's memoir were first made known. The parallelism of the two given planes to the circular sections of the surface is also stated in the Calendar; but this remarkable relation is not noticed by M. Amyot, nor by M. Cauchy (See the Examination Papers of the year 1842, p. XIV, quest. 17. 18; in the Calendar for 1843.)"

Salmon*) gewann seinen Satz durch Umformung im Polarsystem einer Kugel aus dem Satze: „Ist das Product der Entfernungen einer Ebene π von zwei Punkten S' und S'' constant, so berührt sie eine Rotationsfläche R_2 mit den Brennpunkten S' und S''." Dieser Satz folgt sofort aus dem Umstande, dafs die Fufspunktfläche der Rotationsfläche R_2 bezüglich S' eine Kugel ist. Ist M der Mittelpunkt der Hülfskugel, und sind PQ' und PQ'' die Abstände des — eine Fläche F_2 beschreibenden — Poles P der Ebene π von den Polarebenen der beiden Brennpunkte, so besteht die Gleichung

$$\frac{PM^2}{PQ' \cdot PQ''} = \text{const.}$$

Fällt man nämlich von jedem der beiden Punkte A und B ein Lot $A\mathfrak{A}$ bezw. $B\mathfrak{B}$ auf die Polarebene des anderen nach der Hülfskugel, so besteht die Beziehung

$$\frac{AM}{A\mathfrak{A}} = \frac{BM}{B\mathfrak{B}}.$$

Wenn man erst P und S', hernach P und S'' für A und B einsetzt, so folgt die soeben genannte Relation. Bei dieser Herleitung entsteht natürlich die Frage: Welchen Ort beschreibt der Mittelpunkt M einer Kugel, bezüglich deren zu einer Fläche F_2 eine Rotationsfläche R_2 reciprok ist? Der unendlich ferne Kegelschnitt der letzteren steht offenbar dem Tangentialkegel polar gegenüber, den F_2 aus M empfängt. Dieser Kegel mufs also ein Rotationskegel sein. Die Spitze desselben gehört nach dem Steiner'schen Theorem [XXXV, 2] einem Focalkegelschnitt an.**) Man erhält jedoch eine Rotationsfläche mit imaginären Brennpunkten aus F_2, wenn M einem modularen Focalkegelschnitte angehört. Salmon hat nach Mac Cullagh's Angabe an der oben [S. 410†] genannten Stelle in der That bemerkt, dafs umbilicare Erzeugungen sich gerade an solche Focalkegelschnitte knüpfen, welche bei der modularen Erzeugung nicht in Betracht kommen. Er fügt dann hinzu, dafs die geradlinigen Flächen F_2 die umbilicare Erzeugung nicht zulassen.

Die angeführte Quelle ist mir nicht zugänglich geworden. Man mufs hierzu übrigens bemerken, dafs zwar der erwähnte Bericht Cauchy's, auf den ich unten genauer eingehe, erst in der Sitzung vom 17. April 1843 erstattet wurde. Die Abhandlung ist aber bereits am 26. December 1842 der Pariser Akademie vorgelegt worden, also ebenfalls „gegen Ende des Jahres 1842". Vergl.: Amiot, Sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre, Comptes rendus, Bd. 15, 1842, S. 1196—1197.

*) Salmon, On the Generation of Surfaces of the Second Degree, Proc. Irish Ac., Jahrg. 1845—1847, Bd. 3, 1847, S. 536—538 (Nr. 69, 1846—7).

**) Diese höchst einfache Bemerkung hat anscheinend zuerst Cremona gemacht. Vergl.: Cremona, Solution de la question 545 (voir t. XIX, p. 404), Nouv. Ann. de Math., Bd. 20, 1861, S. 95—96.

14. Amiot*) bemerkt in seiner 1843 veröffentlichten Arbeit, dafs eine umbilicare Erzeugung einer Oberfläche F_2 auf eine Gleichung von der Form

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$$
$$+ k(ax + by + cz + d)(a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1) = 0$$

führe, wobei x_0, y_0, z_0 der feste Punkt S ist, und

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 = 0$$

die beiden in Betracht kommenden Ebenen sind. Die verfügbaren Constanten genügen, um die Identität mit einer gegebenen Gleichung zweiten Grades herbeizuführen. Diese Aufgabe wird durch den Umstand erleichtert, dafs S offenbar einer Hauptaxenebene angehört, zu der die Directrix, die Schnittlinie der beiden zugehörigen Directorebenen („plans directeurs") — in einem Punkte S' — senkrecht steht. Bei den Mittelpunktflächen beschreiben nun S und S' in jeder von zwei Hauptaxenebenen, während die Hülfsebenen sich selbst parallel fortschreiten, zwei reelle Kegelschnitte, welche Amiot als Focale und Synfocale bezeichnet. Für die dritte Hauptaxenebene sind die beiden Kegelschnitte imaginär. Bei dem Ellipsoid und dem zweischaligen Hyperboloid knüpft sich allemal an jeden Punkt der einen Focale eine völlig reelle umbilicare Erzeugung, während bei dem einschaligen Hyperboloid sowohl zu den Punkten der einen als auch der anderen Focale Paare imaginärer Ebenen gehören. Nachdem Amiot analoge Resultate für die Paraboloide, den Kegel und die Cylinder entwickelt hat, legt er zum Schlufs die allgemeinste Gleichung der Fläche F_2 bei der Untersuchung dieser Verhältnisse zu Grunde. Die Directorebenen schneiden bekanntlich die Fläche F_2 in Kreisen. Diese Thatsache hätte Amiot nicht entgehen können, wenn er statt des Punktes S allgemeiner eine Kugel G_2 eingesetzt hätte. Wenn in der That die Tangente PT, welche G_2 oder $K = 0$ aus einem Punkte der Fläche F_2 erhält, zu den Entfernungen PQ' und PQ'' des Punktes P von zwei Ebenen $\pi' = 0$, $\pi'' = 0$ in der Beziehung steht

$$PT^2 = kPQ' \cdot PQ'',$$

so kann die Gleichung von F_2 auf die Form

$$K + \alpha\pi'\pi'' = 0$$

gebracht werden; die Fläche enthält augenscheinlich die Kreise, welche die Kugel mit den Ebenen gemein hat. Bereits 1828 hatte Bobillier sich der soeben erwähnten Darstellung der Fläche F_2 zur Ermittelung ihrer Kreisschnitte bedient [IX, 3].

*) Amiot, Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre, Liouv. Journ., Bd. 8, 1843, S. 161—208.

Cauchy, der sich für Amiot's Arbeit sehr lebhaft interessirt zu haben scheint, hat eine Reihe eigener Entwickelungen teils in den Bericht*) eingeflochten, den er der Pariser Akademie über die Abhandlung erstattete, teils in einigen selbständigen dem Berichte angehängten Noten näher ausgeführt, sodafs, wie wenigstens Poncelet meint**), die Untersuchungsmethode Amiot's nicht mit genügender Deutlichkeit hervortritt. Hervorzuheben ist hier Folgendes: Die definirende Gleichung

$$\frac{PS^2}{PQ' \cdot PQ''} = \text{const.}$$

ergebe eigentlich zwei Oberflächen F_2, F_2'. Erst wenn man jedem der Lote PQ' und PQ'' ein Vorzeichen beilegt, welches beim Durchgang durch die betreffende Ebene wechselt, werde die Fläche eindeutig festgelegt. Allgemeiner stellt (S. 805) eine Gleichung zweiten Grades

$$f(r_1, r_2, \cdots, r_n;\ p_1, p_2, \cdots, p_m) = 0$$

eine Fläche zweiter Ordnung dar, wenn die Gröfsen $r_1, r_2, \cdots, r_n$, die Entfernungen eines laufenden Punktes P von n festen Punkten $O_1, O_2, \cdots, O_n$, nur im zweiten Grade auftreten; $p_1, p_2, \cdots, p_m$ sind die mit Vorzeichen behafteten Entfernungen des Punktes P von m festen Ebenen. Insbesondere zieht Cauchy die Gleichung

$$r^2 = k\,(p_{\text{II}}^2 + p_2^2)$$

in Betracht. Es stellt sich hier — offenbar handelt es sich um Mac Cullagh's modulare Erzeugung — eine völlige Analogie zu Amiot's Erzeugung heraus; man kann auch den Focalen eine geometrische Bedeutung abgewinnen, für deren Punkte die beiden in Amiot's Erzeugung vorkommenden Ebenen conjugirt-imaginär werden. Ferner gilt (S. 816) der Satz: „Schneiden sich in einer Geraden, über welche man einen Punkt P führt, die Directorebenen eines Focalpunktes S der Fläche F_2, so steht die Polarebene von P beständig im Punkte S zu PS senkrecht." Cauchy entwickelt diesen Satz unter Benutzung der allgemeineren Gleichung

$$r^2 = k\Omega,$$

*) Cauchy, Rapport sur un Mémoire de M. Amyot relatif aux surfaces du second ordre, Comptes rendus, Bd. 16, 1843, S. 783—828; Cauchy, Suite des Notes annexées au rapport sur le Mémoire de M. Amyot, ibidem, 1843, S. 885—890.

**) Poncelet, Note relative à la réclamation de M. Amyot, et aux observations de MM. Chasles et Cauchy, qui y ont donné lieu (séances des 19 et 24 avril 1843), ibidem, S. 947—954. Poncelet hebt zunächst hervor, Cauchy habe mit seiner gewöhnlichen Fruchtbarkeit gezeigt, in welcher Weise Amiot's Entwickelungen erweitert werden könnten, fährt dann aber fort (S. 947): „Les amateurs de cette branche de Mathématiques regretteront néanmoins que, sous ces développements, auxquels je suis le premier à rendre justice, les idées de l'auteur du Mémoire et le caractère de sa méthode aient à certains égards disparu. etc."

wobei Ω eine homogene Function zweiten Grades von p_1, p_2 ist. Für den Fall

$$r^2 = kp_1p_2$$

war, wie auch Cauchy hervorhebt, der analoge Satz der Ebene bereits 1838 [XXX, 3] von Chasles entwickelt worden. Auf den Fall der Ebene geht Cauchy noch mit einigen Theoremen, die aber von geringerem Interesse sind, näher ein.

15. An Cauchy's Bericht knüpfte Chasles*) mehrere Bemerkungen, welche für diese Theorie von der gröfsten Bedeutung sind. 1829 [XXIV, 6] und 1838 [XXX, 4] habe er auf verschiedene Weisen gezeigt, dafs die Gleichung

$$PT^2 = kPQ' \cdot PQ''$$

für alle Punkte eines Kegelschnittes erfüllt sei, wenn PT die Tangente bedeutet, welche man von P aus an einen Kreis legen kann, PQ', PQ'' die Abstände des Punktes P von zwei festen Geraden l', l'' sind. Kreis und Kegelschnitt können beliebig gegeben werden, die reellen Geraden l' und l'' enthalten dann ihre Schnittpunkte. Beide Curven weisen für den Schnittpunkt von l' und l'' dieselbe Polare auf. Lasse man jetzt den Radius des Kreises unendlich klein werden, so entstehe das Analogon zu Amiot's Satz in der Ebene. Der Mittelpunkt des unendlich kleinen Kreises sei der Fufspunkt des vom Schnittpunkte der Geraden l', l'' auf dessen Polare gefällten Lotes; l' und l'' sind durch ihren Schnittpunkt eindeutig bestimmt.

Im Raume gilt das allgemeine Theorem: „Wenn eine Kugel G_2 eine Fläche F_2 in zwei Kreisen schneidet, so bestimmt sie an einem beliebigen Punkte P von F_2 eine Potenz PT^2, welche zu dem Product $PQ' \cdot PQ''$ seiner Entfernungen von den Kreisebenen proportional ist.“ Es folgte im Grunde schon aus dem 1838 gegebenen Beweise für den allgemeineren Satz der Ebene. Chasles' Entwickelung führt in der That zu folgender Umformung des Theorems der Ebene: „Trifft ein Kegelschnitt in je zwei Punkten die Kreise, welche die Ebenen π' und π'' aus einer Kugel herausschneiden, so ist für irgend zwei Punkte P und P_0 desselben

$$\frac{PT^2}{PQ' \cdot PQ''} = \frac{P_0T_0^2}{P_0Q_0' \cdot P_0Q_0''}.“$$

Nur die letzte Beobachtung ist jetzt noch zu leisten, dafs alle durch P_0 gelegten Kegelschnitte der betrachteten Art die durch die beiden Kreise und P_0 eindeutig festgelegte Oberfläche zweiter Ordnung erfüllen, um von dem Theorem der Ebene zu dem entsprechenden des

*) Après la lecture de ce Rapport, M. Chasles demande la parole et présente les observations suivantes, ibidem, S. 828—833.

Raumes fortzuschreiten. Diese letzten Schritte hat Chasles, wie er zugiebt (S. 832), 1838 nicht ausgeführt, obwohl er auf räumliche Erweiterungen des Satzes der Ebene hingewiesen habe. Die Kugel des allgemeinen Theorems gehe in einen Focalpunkt Amiot's über, wenn ihr Radius unendlich klein wird. Fasse man aber, wie es nach dieser Entwickelung sein muſs, einen Focalpunkt der Fläche F_2 als den Mittelpunkt einer unendlich kleinen Kugel auf, die zwei Kreise mit F_2 gemein hat, so erkenne man in den Focalen Amiot's Kegelschnitte, die auf Grund anderer Eigenschaften schon eingeführt seien. Zwei Oberflächen zweiter Ordnung, die einer dritten eingeschrieben sind, sie längs Kegelschnitten berühren, durchdringen sich in zwei Kegelschnitten. Erfüllen nun die von P ausgehenden Tangenten von F_2 einen Rotationskegel, so hat jede ihm eingeschriebene Kugel zwei Kreise mit F_2 gemein; seine Spitze ist ein Focalpunkt von F_2. Die Spitzen der F_2 umschriebenen Rotationskegel erfüllen zwei Kegelschnitte, wie zuerst Steiner [XXXV, 2] entwickelt habe; dieselben sind mit Amiot's Focalen identisch. Jede Normale eines Focalkegelschnittes trifft die zu ihrem Fuſspunkte gehörige Directrix, die Schnittlinie der Ebenen der beiden zugehörigen Kreise.

Cauchy's Polareigenschaft folgt ohne weiteres aus Chasles' neuer Auffassung. Denn für jeden Punkt P der Directrix des Focalpunktes S ergeben die Nullkugel um S und die gegebene Fläche F_2 die gleiche zu PS senkrechte und S enthaltende Polarebene. Auf diese Weise tritt aber die frühere im Aperçu gegebene Definition der Focalkegelschnitte mit der neuen in Zusammenhang. Ohne weiteres ergeben sich jetzt noch die beiden im ersten Teile der Note aufgestellten — jedoch 1838 nicht angeführten — Sätze: „Werden zwei Gerade sich selbst parallel so verschoben, daſs ihre Schnittpunkte mit einem Kegelschnitte K_2 einem Nullkreise angehören, so beschreibt der Mittelpunkt desselben einen zu K_2 confocalen Kegelschnitt, der Schnittpunkt der beiden Geraden einen zweiten Kegelschnitt, der einem auch K_2 enthaltenden Büschel angehört.“ Je zwei zusammengehörige dieser Kegelschnitte sind Focale und Synfocale einer Oberfläche F_2, die K_2 zum Hauptschnitte hat.

16. Auf diese Ausführungen nahm einmal Poncelet in der bereits angeführten Note, dann auch Amiot*) selbst Bezug. Amiot betont, von Poncelet unterstützt, daſs seine Untersuchung, deren Hauptresultate er anführt, eine durchaus selbständige gewesen sei, daſs er sich keineswegs der Entwickelungen Chasles' bemächtigt habe, um sie weiter zu bilden. Aus der Poncelet'schen Note hebe ich zwei Punkte hervor. Mit demselben Rechte, mit dem man Amiot's Satz als

*) Remarques de M. Amyot à l'occasion des réflexions présentées par M. Chasles à la séance précédente, ibidem, S. 938—939.

unmittelbare Folge der Chasles'schen Entwickelungen bezeichne, könne man das Theorem auch Sturm zuweisen. Der oben [S. 227*] angeführte Satz ergebe, wenn der eine gegebene Kegelschnitt in einen Kreis, der zweite in ein Geradenpaar übergeht, sofort den Satz von Chasles in der Ebene. Den entsprechenden räumlichen Hülfssatz über drei Flächen F_2, G_2, H_2 eines Büschels habe zwar Sturm nicht gegeben; doch sei diese Erweiterung evident. Bei Benutzung einer Kugel G_2 und eines Ebenenpaares H_2, die sich in Kreisen einer Fläche F_2 durchschneiden, entstehe nun die Verallgemeinerung der Amiot'schen Regel. Aber weder Sturm noch Chasles selbst hätten die angedeuteten Schlüsse wirklich gezogen. Die zweite Bemerkung bezieht sich auf die Homologie-Beziehung. Wolle man eine Fläche F_2 als relief-perspectivisches Bild einer Kugel darstellen, so müsse das Centrum der Beziehung eben in einen der Focalpunkte Amiot's verlegt werden. Aus dieser Bemerkung hätten sich für diese Frage wichtige Folgerungen ziehen lassen. In Anschluſs hieran bringt übrigens Poncelet die schon oben [XIX; 1] erwähnte Äuſserung über Breysig.

17. In seiner Erwiderung hält Chasles*) im Ganzen an den Ausführungen der ersten Note fest. Er habe die Priorität Amiot's für den Raum keineswegs bezweifelt, und nur auf den Zusammenhang der Entwickelungen mit den entsprechenden von ihm für die Ebene gegebenen hingewiesen. Es scheine ihm ferner, als ob Amiot die Bedeutung seiner Relation überschätze, wenn er in ihr das Äquivalent für die Brennpunkteigenschaften des Kegelschnitts erblicke. Um die Analogie zu treffen, müsse man nicht sowohl die einzelnen Focalpunkte, als vielmehr die beiden von ihnen erfüllten Kegelschnitte als den Brennpunkten analoge Gebilde einführen. Die schönen oben [XXXV, 4, 5] besprochenen Entwickelungen berechtigten wohl zu dieser letzten Äuſserung.**)

Nicht unerwähnt darf eine Eigenschaft bleiben, die Chasles in der Fussnote zu S. 1108 angiebt, welche eine Erweiterung eines

---

*) Réponse de M. Chasles au sujet de deux Notes insérées dans les Comptes rendus des séances des 24 avril et 8 mai, tome XVI, pages 938 et 947, ibidem, S. 1105—1110.

**) Poncelet nahm noch einmal das Wort, um auszuführen, daſs durch die neuen Erklärungen Chasles' die Zweifel, zu welchen seine erste Note geführt habe, vollkommen gelöst seien, die Unabhängigkeit der Amiot'schen Untersuchung von der Abhandlung des Jahres 1838 zugegeben sei. Es seien indes, um die Analogie zwischen Oberflächen und Curven zweiter Ordnung zu vervollständigen, noch immer einige Lücken auszufüllen; so bestehe im Raume noch kein Analogon zu dem Satze: „Der Kreis über der Hauptaxe eines Kegelschnittes ist die Fuſspunktcurve desselben hinsichtlich eines jeden der beiden Brennpunkte.“ Vergl.: Après cette lecture, M. Poncelet prend la parole et s'exprime à peu près en ces termes, ibidem, S. 1110—1112. Die genannte Lücke glaubte Chasles übrigens schon ausgefüllt zu haben [Vergl.: S. 402*].

Satzes von Amiot (S. 939) bildet: „Zwei beliebige Punkte S', S'' eines Focalkegelschnittes einer Fläche F_2 sind die beiden Brennpunkte einer bestimmten F_2 eingeschriebenen Rotationsfläche R_2. Die Spitze O des F_2 und R_2 gemeinsamen Tangentialkegels hat bezüglich des Focalkegelschnittes die Polare $S'S''$." Die rein geometrische Ableitung des Satzes aus den früher angegebenen Theoremen ist leicht. Die Brennpunkte einer Rotationsfläche, welche dem von O ausgehenden Tangentialkegel von F_2 eingeschrieben ist, gehören den Focalstrahlen desselben an, also nach dem Satze von Jacobi [XXXV, 4] den Tangenten, die der betrachtete Focalkegelschnitt aus O empfängt. Da jede R_2 eingeschriebene Kugel F_2 in zwei Kreisen schneidet, so sind die Brennpunkte von R_2, als Mittelpunkte ihr eingeschriebener Nullkugeln, zugleich Focalpunkte von F_2; sie müssen deshalb mit den Berührungspunkten S', S'' der Tangenten des Focalkegelschnittes zusammenfallen. Wird ein Punkt P über den Berührungskegelschnitt K_2 geführt, so bleibt, wie Chasles weiter hervorhebt, die Summe oder der Unterschied von PS' und PS'' constant; es fällt ferner beständig die Normale von F_2 mit dem Halbirungsstrahle eines der beiden Winkel zusammen, die PS' und PS'' einschliefsen.

In der Directrix s' von S' für F_2 schneiden sich offenbar ihre Polarebene nach O und die S' für die Rotationsfläche R_2 zugehörige Directrix-Ebene. Zu einem Punkte M von s' gehört nämlich für R_2 und F_2 dieselbe Polarebene, die zu MS' in S' senkrecht steht. Die zu einem Kegelschnitte K_2 von F_2 gehörigen Focalpunkte, die Brennpunkte der längs K_2 berührenden Rotationsfläche, entsprechen also den beiden in der Ebene von K_2 enthaltenen Directrices. Diese Regel gab Amiot, jedoch nur für solche Kegelschnitte, deren Ebenen zu einer Hauptaxenebene von F_2 parallel sind.*) Bereits 1841 hatte übrigens Jellet**) die Entwickelung für diejenigen Kegelschnitte durchgeführt, deren Ebenen eine Hauptaxe enthalten, und hatte daran eine Construction einer Oberfläche F_2 geknüpft, von der ein Focalkegelschnitt und die Endpunkte der zu seiner Ebene senkrechten Hauptaxe vorliegen.

) A. a. O. S. 412. Die Rechnung wird für das Ellipsoid durchgeführt (S. 176, 182), für die übrigen Flächen werden analoge Sätze angegeben. Ähnliche Entwickelungen enthält die Schrift: Amiot, Mémoire sur diverses propriétés des surfaces du deuxième ordre déduites de la théorie des focales, Liouv. Journ., Bd 10, 1845, S. 109—136. Amiot gelangt auf recht verwickelten Wegen zu vielen der oben angeführten Resultate, z. B (S. 126) zu Chasles' Bestimmung des Polarsystems eines Focalkegelschnittes mit Hülfe der Tangentialebenen und Normalen einer zugehörigen Fläche F_2, ferner (S. 131) zu Steiner's Theorem von den F_2 umschriebenen Rotationskegeln.

**) Jellet, A note on some new Properties of Surfaces of the second Order, Proc. Irish Ac., Jahrg. 1840—1844, Bd. 2, 1844, S. 92—94 (Nr. 29, 1841).

18. Der von Chasles aufgestellte Satz schliefst eine weitere bedeutsame Analogie der Focalkegelschnitte zu den Brennpunkten des Kegelschnittes ein. Strahlen, welche einen Focalkegelschnitt treffen, werden an der Fläche F_2 in Strahlen reflectirt, die ihn ebenfalls treffen. Mit dieser Bemerkung schliefst Plücker 1846 sein System der analytischen Geometrie des Raumes ab.*) Der Untersuchung der Focaleigenschaften sind zwei §§ des Hauptabschnittes dieses Werkes gewidmet.**) Plücker führt die Focalpunkte als Spitzen von Rotationskegeln, die F_2 umschrieben sind, in die Betrachtung ein und folgert dann seine Resultate hauptsächlich daraus, dafs auch die Brennpunkte von F_2 eingeschriebenen Rotationsflächen Focalpunkte sind. Seine Rechnung gestaltet sich besonders bei Einführung von Ebenencoordinaten sehr elegant. Eine grofse Reihe der oben entwickelten Beziehungen werden von Plücker nochmals bewiesen. Nach seinen Untersuchungen sind z. B. zwei F_2 umschriebene Rotationskegel, deren Spitzen demselben Focalkegelschnitte angehören, einer Kugel zugleich umschrieben, was auch aus Chasles' Entwickelungen folgen würde. Alle diese Rotationskegel kann man, da ihre Axen den Focalkegelschnitt berühren, hiernach aus einem einzigen von ihnen ableiten.

Chasles hebt in der zuletzt bezeichneten Fufsnote (zu S. 1108) noch hervor, dafs der Berührungskegelschnitt von R_2 und F_2 von S' und S'' aus — wie jeder Kegelschnitt von R_2 — durch je einen Rotationskegel projicirt wird. Dreht man die Ebene des Kegelschnittes um die Directrix s' des Punktes S', so bleibt der eine Brennpunkt S' von R_2 fest; man hat den von Plücker (S. 295) rechnend erwiesenen Satz: „Dreht sich die Ebene eines Kegelschnittes der Fläche F_2 um die Directrix eines Focalpunktes von F_2, so wird er von demselben aus beständig durch einen Rotationskegel projicirt." Diesen Satz, welcher übrigens schon in einem oben [XXXV, 2] angeführten Theorem Bobillier's vorgebildet ist, hat Ingram in folgender Weise verallgemeinert: „Man schneide die Ebene eines Kegelschnitts der Fläche F_2 mit den cyklischen Ebenen des Kegels, welchen

*) A. a. O., S. 350** (S. 334). Der Satz findet sich auch in der Abhandlung: Plücker, Sur la Réflexion de la Lumière, dans le cas des surfaces du second degré, analogue à celle qui aux foyers des sections coniques a donné le nom, Crelle's Journ., Bd. 35, 1847, S. 100—105 (Abh., Bd. 1, S. 456—461). Auf S. 460 findet sich Chasles' Regel für die Ermittelung des Kegelschnittes, längs dessen F_2 die von einem Punkte S' eines Focalkegelschnittes ausgehenden Strahlen nach einem zweiten Punkte S'' desselben hin reflectirt.

**) Rotations-Flächen zweiter Classe. Rotations-Kegel, die einer Fläche zweiter Classe umschrieben sind (§ 10, S. 242—275). Rotations-Kegel, die den Flächen zweiter Ordnung umschrieben sind. Focalpunct und Directrix (§ 11, S. 275—301). Dafs confocale Flächen F_2 mit dem unendlich fernen Kugelkreise in eine Schar gehören, wird in merkwürdig irriger Weise (S. 332) interpretirt. Hieraus komme ich an anderer Stelle zurück.

er an einem Focalpunkte S bestimmt. Diese Geraden schneiden sich auf der Directrix des Punktes S und bestimmen mit derselben die Ebenen zweier Kreise von F_2." Der Satz ist, wie andere von Ingram aufgestellte Sätze, eine unmittelbare Folge des Umstandes, daſs zwei — die beiden im Satze erwähnten — Kreise von F_2 der unendlich kleinen Kugel mit dem Mittelpunkte S angehören.*)

19. Ich wende mich nunmehr zu der oben [S. 410***] erwähnten Arbeit von Townsend zurück. Auch Townsend macht, zunächst ohne von der Entwickelung Chasles' Kenntnis zu haben, den wichtigen Schritt, anstatt der Punkte sowohl bei der modularen als bei der umbilicaren Erzeugung Kugeln einzuführen, die F_2 in zwei Punkten berühren. Ihre Mittelpunkte erfüllen die drei Hauptaxenebenen. Die Kreise, in denen eine Fläche F_2 eine sie doppelt berührende Kugel schneidet, liegen in reellen oder imaginären Ebenen, je nachdem es sich um eine Kugel des einen Systems (mit umbilicarer Erzeugung) oder um eine Kugel eines der beiden anderen Systeme (mit modularer Erzeugung) handelt. Aus dem Satze, daſs zwei sich doppelt berührende Flächen F_2 und G_2 für jeden Punkt der Berührungssehne gleiche Polarebenen besitzen, gewinnt Townsend, indem G_2 in eine unendlich kleine Kugel übergeht, Cauchy's Polareigenschaft und aus ihr folgende Regel: „Eine Ebene π schneide die Directrices s_1, s_2, s_3 dreier Punkte S_1, S_2, S_3 eines Focalkegelschnittes der Fläche F_2 in den Punkten T_1, T_2, T_3. In dem Pole von π nach F_2 schneiden sich die Ebenen, zu denen $S_1 T_1$, $S_2 T_2$, $S_3 T_3$ in S_1, S_2, S_3 senkrecht stehen." Sind S_2 und S_3 die Schnittpunkte der Ebene π mit dem Focalkegelschnitt, so liegen $S_2 T_2$ und $S_3 T_3$ in π selbst, und man erhält als Ort für den Pol die zu π senkrechte Gerade, in welchen die in S_2 und S_3 errichteten Normalebenen zu $S_2 T_2$ und $S_3 T_3$ sich schneiden. Diese Ebenen enthalten aber die Tangenten des Focalkegelschnittes in den Punkten S_2 und S_3; als Ort für den Pol von π ergiebt sich mithin das Lot, welches von dem Pole der Ebene π nach dem Focalkegelschnitt auf die Ebene gefällt ist. Townsend fügt hinzu, daſs ein früherer geometrischer Beweis dieses wichtigen Theorems ihm nicht bekannt geworden sei, nur für den Specialfall, welcher sich auf Normale und Tangentialebene einer Fläche F_2 bezieht, sei ein solcher Beweis von Mac Cullagh gegeben worden (S. 28). In dem zweiten Teile der Schrift wird nun dies näher ausgeführt. Townsend giebt hier eine ganze Reihe der Sätze Chasles' aus dem Jahre 1837, nicht ohne neues hinzuzufügen. Ein Beispiel biete der Satz auf S. 104: „Berühren zwei Oberflächen F_2 und G_2, welche eine Hauptaxenebene gemein haben, sich längs eines Kegelschnittes K_2, so berühren sich

*) Ingram, On certain Properties of the Surfaces of the Second Degree, Proc. Irish Ac., Jahrg. 1845—1847, Bd. 3, 1847, S. 442—444. (No. 65, 1846—7). Ingram, On certain Properties of Curves and Surfaces of the Second Degree, ibidem, S. 502—505 (No. 67, 1846—7).

die in der Hauptaxenebene gelegenen Focalen in zwei Punkten, deren Directrices der Ebene von K_2 angehören."

20. Aus der modularen Erzeugung der Oberflächen F_2 hat Townsend noch einen sehr naturgemäfsen Beweis für das Theorem abgeleitet, das Jacobi 1834 in einem mehrfach bereits erwähnten Schreiben*) an Steiner der Gärtnerconstruction der Ellipse an die Seite gestellt hat. Die Ebene eines der beiden Kreise der Fläche F_2, welche einen Punkt P derselben enthalten, schneide in R_1', R_2', R_3' die Directrices dreier beliebigen Punkte S_1, S_2, S_3 eines modularen Focalkegelschnittes. Es bestehen dann (S. 156) die Gleichungen

$$PS_1 = kPR_1', \quad PS_2 = kPR_2', \quad PS_3 = kPR_3'.$$

Das Dreieck $R_1' R_2' R_3'$ bleibt sich selbst congruent, wenn die Ebene des Kreises sich selbst parallel bewegt wird. Wenn man die Kreisebene auf eine Hülfsebene nach der Regel

$$R_2 R_3 = kR_2'R_3', \quad R_3 R_1 = kR_3'R_1', \quad R_1 R_2 = kR_1'R_2'$$

ähnlich abbildet, so entspricht jedem Punkte P der Fläche F_2 ein Punkt Q in der Ebene des Dreiecks $R_1 R_2 R_3$ nach der Regel

$$R_1 Q = S_1 P, \quad R_2 Q = S_2 P, \quad R_3 Q = S_3 P.$$

Townsend bemüht sich, auch umgekehrt zu zeigen, dafs bei willkürlicher Wahl von S_1, S_2, S_3 und R_1, R_2, R_3 notwendig eine Fläche F_2 mit den modularen Focalpunkten S_1, S_2, S_3 entsteht. Dafs man es überhaupt mit einer Fläche F_2 zu thun habe, folgert Tonwsend aus einer Formel von Salmon

$$a^2 b^2 c^2 - \sum (a^2 (l^2 - m^2)(l^2 - n^2) + a^2 (b^2 + c^2 - a^2) l^2) = 0,$$

welche die Seiten a, b, c eines Dreiecks mit den Entfernungen l, m, n seiner Ecken von einem beliebigen Punkte in der Ebene des Dreiecks verknüpft.**) Man setze nun allgemeiner statt der Entfernungen PS_1, PS_2, PS_3 die Tangenten ein, welche drei Kugeln K_1, K_2, K_3 mit den Mittelpunkten S_1, S_2, S_3 aus P empfangen und construire zunächst zwei zu K_2 und K_3 concentrische Kugeln, K_2' und K_3', aus deren Punkten K_2 und K_3 Tangenten von den Längen $R_1 R_2$ und $R_1 R_3$ empfangen. Dem neuen Orte G_2 gehören die Schnittpunkte von K_1, K_2', K_3' an, zu jedem anderen reellen Punkte von G_2 gehört eine zu K_1 concentrische und sie umschliefsende Kugel. Townsend schliefst daraus, dafs K_1, K_2, K_3 modulare Focalkugeln von G_2 sind und an der Grenze in modulare Focalpunkte S_1, S_2, S_3 von F_2 übergehen.

Die Analogie dieser von Jacobi angegebenen Construction zu

---

*) Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Dr. C. G. J. Jacobi zu Königsberg i. Pr., an den Herrn Prof. Dr. J. Steiner zu Berlin, Crelle's Journ., Bd. 12, 1834, S. 137—140 (Ges. W., Bd. 7, S. 7—10).

**) Vergl. die Fufsnote zu S. 150.

der Gärtnerconstruction der Ellipse und der analogen Construction der Hyperbel tritt sofort hervor, wenn man beachtet, dafs zu jedem Punkte P einer Ellipse mit den Brennpunkten F', F'' ein zwischen F' und F'' gelegener Punkt Q der grofsen Axe $A'A''$ nach der Regel gehört

$$F'P = A'Q; \quad F''P = A''Q.$$

Diese Regel ist nur eine Umschreibung der Entfernungseigenschaft

$$F'P + F''P = A'A''.$$

Bei der Hyperbel greift eine ähnliche Überlegung Platz. Jacobi hebt ferner hervor, dafs P einen Kegelschnitt auch dann beschreibt, wenn Q nicht über $A'A''$, sondern über eine beliebige Gerade l geführt wird. Eine entsprechende Verallgemeinerung ist auch bei dem räumlichen Theorem möglich, was Hermes zuerst ausgeführt hat. Man braucht, um sie in Townsend's Sinne zu begründen, nur anstatt der modularen Focalpunkte reelle modulare Focalkugeln einzuführen. Ich will diese Überlegung, die Townsend selbst übrigens nicht angestellt hat, mit einigen Worten schildern. Es sei jetzt das Dreieck $U_1 U_2 U_3$ aus demjenigen $U_1' U_2' U_3'$, welches die Directrices dreier reellen Focalkugeln desselben modularen Systems auf einer Kreisebene ausschneiden, nach der Regel

$$U_2 U_3 = k U_2' U_3', \quad U_3 U_1 = k U_3' U_1', \quad U_1 U_2 = k U_1' U_2'$$

entstanden. Alsdann sind die Tangenten, welche die Focalkugeln aus einem Punkte P von F_2 erhalten, gleich den Entfernungen eines Punktes Q der Ebene $U_1 U_2 U_3$ von U_1, U_2, U_3. Sind O_1, O_2, O_3 die Mittelpunkte, r_1, r_2, r_3 die Radien der Kugeln, so ist

$$PO_1^2 = QU_1^2 + r_1^2, \quad PO_2^2 = QU_2^2 + r_2^2, \quad PO_3^2 = QU_3^2 + r_3^2.$$

Errichtet man also auf α oder $U_1 U_2 U_3$ Lote $U_1 V_1$, $U_2 V_2$, $U_3 V_3$ von den Längen r_1, r_2, r_3, und wird der Punkt Q in der Ebene α verschoben, so ergeben die Beziehungen

$$PO_1 = QV_1, \quad PO_2 = QV_2, \quad PO_3 = QV_3$$

nach und nach alle Punkte der Fläche F_2.

21. Jacobi selbst hat aber seine Theoreme aus dem Ivory'schen Satze abgeleitet, wie er entschieden hervorhebt. Die Schnittcurve zweier ungleichartigen confocalen Flächen zweiter Ordnung schneidet auf zwei zu ihnen confocalen Flächen der dritten Art acht Paare — je in dem gleichen Octanten gelegener — conjugirter Punkte aus („corresponding points"). Sieht man conjugirte Punkte als entsprechend an, so treten die gleichartigen confocalen Flächen in affine Beziehung Es besteht nun der Ivory'sche Satz*): „Zwei Paare PP' und QQ' con-

*) Ivory, On the Attractions of homogeneous Ellipsoids, Phil. Trans. f. 1809, Part. II, 1809, S. 345—372 (S. 353, 355).

jugirter Punkte liegen so, dafs die Strecken PQ' und $P'Q$ einander gleich sind." Wählt man auf zwei confocalen Ellipsoiden, um etwas bestimmtes vor Augen zu haben, drei feste Paare conjugirter Punkte $W_1 W_1'$, $W_2 W_2'$, $W_3 W_3'$ aus, so bestehen für zwei conjugirte Punkte P, P' die Gleichungen

$$W_1 P' = W_1' P, \quad W_2 P' = W_2' P, \quad W_3 P' = W_3' P.$$

Zieht sich jetzt das eine Ellipsoid um die Focalellipse E_2 zusammen, so dafs nun W_1', W_2', W_3' Punkte innerhalb derselben sind, so gehört zu jedem Punkte P des Ellipsoids ein Punkt P' im Innern der Focalellipse nach der angegebenen Regel. W_1, W_2, W_3 sind beliebige Punkte des Ellipsoids aufserhalb der Ebene der Focalellipse. Die Überlegungen gelten nun genau so wie vorher weiter, auch wenn W_1, W_2, W_3 in Punkte Z_1, Z_2, Z_3 des Hauptschnittes H_2 in der Ebene der Focalellipse E_2 übergehen, nur dafs dann W_1', W_2', W_3' in Focalpunkte S_1, S_2, S_3 übergehen. Die Focalellipse grenzt zugleich — hierin liegt eine weitere Analogie zu der Gärtnerconstruction — das Gebiet ab, dessen Punkten reelle Punkte des Ellipsoids auf Grund der Jacobi'schen Construction entsprechen. Analoge Überlegungen gelten für alle Oberflächen F_2.

Wenn man nach der Methode von Townsend [XXXV, 20] zu jedem Punkte eines Elipsoids den zugehörigen Punkt der Ebene $R_1 R_2 R_3$ construirt, so kommt man ebenfalls nur auf Punkte im Innern einer Ellipse, während die Punkte R_1, R_2, R_3 einer zweiten Ellipse angehören. Bei der erwähnten ähnlichen Transformation entstehen diese Ellipsen aus Schnitten des längs H_2 dem Ellipsoid umschriebenen Cylinders und des zu E_2 gehörigen Directrix-Cylinders. Man gewinnt aus der Vergleichung beider Methoden den Satz: „Der Directrix-Cylinder eines modularen Focalkegelschnittes E_2 einer Fläche F_2 und der ihr längs des zugehörigen Hauptschnittes H_2 umschriebene Cylinder werden von einer Kreisebene der Fläche F_2 in Kegelschnitten H_2' und E_2' geschnitten, die zu H_2 und E_2 ähnlich sind. Das lineare Ähnlichkeitsverhältnis von H_2 und H_2' ist dasselbe wie das von E_2 und E_2' und stellt den Modul der zu Punkten des Kegelschnittes E_2 gehörigen modularen Erzeugungen dar."

22. Zwei Bruchstücke der Untersuchungen Jacobi's über diese schönen Theoreme sind von Hermes herausgegeben worden.*) Das erste von ihnen bietet eine Behandlung der ganz analogen Sätze in der Ebene mit Hülfe des Ivory'schen Theorems. Derartige Entwickelungen hatte, noch ehe die Bruchstücke veröffentlicht waren,

*) Geometrische Theoreme (Bruchstücke aus den hinterlassenen Papieren von C. G. J. Jacobi, mitgetheilt durch Herrn O. Hermes.), Crelle's Journ., Bd. 73, 1871, S. 179—206. Die beiden Bruchstücke selbst (S. 179—187, S. 189—206) sind ohne die Zusätze von Hermes veröffentlicht: Ges. W., Bd. 7, S. 42—68.

Cohn gegeben.*) Er führt zunächst die 1834 von Jacobi gegebenen Andeutungen aus und untersucht dann noch etwas allgemeiner die Verwandtschaft, welche zwischen zwei Ebenen mit den Punktepaaren AB und A_1B_1 durch die Gleichungen

$$PA = P_1A_1; \quad PB = P_1B_1$$

vermittelt wird. Geraden der einen Ebene entsprechen nach Jacobi's Theorem Kegelschnitte der anderen. Ein Kegelschnitt der einen Ebene wird, sobald er einen Kegelschnitt mit den Brennpunkten A und B doppelt berührt, in einen Kegelschnitt transformirt, der einen solchen mit den Brennpunkten A_1 und B_1 doppelt berührt, im allgemeinen gemäfs einem speciellen Falle eines Theorems von Jacobi**) jedoch in eine Curve C_4 übergeführt.

Das zweite von Jacobi hinterlassene Bruchstück setzt nun die entsprechende oben geschilderte Betrachtung für Oberflächen F_2 voraus, welche Hermes einschaltet (S. 187—189). Es behandelt folgende Aufgabe: Sind $Z_1Z_2Z_3$ und $R_1R_2R_3$ beliebige Dreiecke und bleibt von den beiden durch die Gleichungen

$$Z_1P' = R_1Q, \quad Z_2P' = R_2Q, \quad Z_3P' = R_3Q$$

verbundenen Punkte Q und P' der letztere in der Ebene $Z_1Z_2Z_3$, so beschreibt Q eine Fläche F_2. Man kann nämlich in der Ebene $Z_1Z_2Z_3$ ein zu $R_1R_2R_3$ congruentes Dreieck $S_1S_2S_3$ so construiren, dafs die Beziehungen stattfinden

$$Z_2S_3 = Z_3S_2, \quad Z_3S_1 = Z_1S_3, \quad Z_1S_2 = Z_2S_1.$$

Um dieses Dreieck festzustellen, hat man zuerst in den affinen Ebenen $Z_1Z_2Z_3$ und $R_1R_2R_3$ zwei homologe $Z_1Z_2Z_3$ und $R_1R_2R_3$ umschriebene Kegelschnitte von gleicher Brennpunktentfernung festzustellen, bei denen überdies sowohl die Hauptaxen, als auch die Nebenaxen homologe Gerade der affinen Ebenen sind. Bringt man den zweiten Kegelschnitt auf eine der vier möglichen Arten so in die Ebene des ersten, dafs beider Brennpunkte zusammenfallen, so geht $R_1R_2R_3$ in das Dreieck $S_1S_2S_3$ über; die Fläche F_2, welche den $Z_1Z_2Z_3$ umschriebenen Kegelschnitt zum Hauptschnitt, den $S_1S_2S_3$ umschriebenen Kegelschnitt zum Focalkegelschnitt hat, ist zu der dargestellten Fläche congruent. Aber Jacobi giebt andererseits Regeln, nach denen man die Natur der dargestellten Fläche von vorne herein beurteilen kann. Ist z. B.

$$R_2R_3 < Z_2Z_3, \quad R_3R_1 < Z_3Z_1, \quad R_1R_2 < Z_1Z_2,$$

so entsteht (S. 62) ein Ellipsoid oder ein zweischaliges Hyperboloid, je nachdem mit den Strecken $\sqrt{Z_2Z_3^2 - R_2R_3^2}$, $\sqrt{Z_3Z_1^2 - R_3R_1^2}$, $\sqrt{Z_1Z_2^2 - R_1R_2^2}$ ein Dreieck gebildet werden kann oder nicht.

*) Cohn, Über confokale Kegelschnitte, Crelle's Journ., Bd. 54, 1857, S. 329—343.

**) a. a. O. S. 420* (S. 10).

Eine sehr ausführliche Erörterung dieser Verhältnisse, in welcher unter anderem die oben angegebene Erweiterung des räumlichen Theorems begründet und auch auf manche Punkte eingegangen wird, die nach Jacobi's ersten Ausführungen ebenfalls sich auf das Ivory'sche Theorem zurückführen lassen, hat Hermes in einer selbständigen Arbeit gegeben.*)

XXXVI. Ebene und unebene Curven dritter Ordnung.

1. Aus dem Umstande, dafs eine Raumcurve R_3 an jedem ihrer Punkte einen Kegel zweiten Grades bestimmt, leitet Chasles mit Hülfe des Pascal'schen Satzes in der oben [S. 239**] erwähnten Note**) folgendes Theorem (Nr. 3) ab: „Jede Ecke eines aus sieben Punkten einer Raumcurve R_3 gebildeten Siebenecks liegt mit den drei Punkten in einer Ebene, welche die von der Ecke ausgehenden Flächen des Siebenecks mit ihren gegenüberliegenden Kanten gemein haben.“ Ein vorliegendes Siebeneck ist, sobald es zwei dieser Relationen erfüllt, einer Raumcurve R_3 eingeschrieben. Sodann folgen verschiedene Formen des Satzes: „Drei projectivische Ebenenbüschel erzeugen eine Raumcurve R_3.“ Offenbar gleichwertig mit diesem Theorem ist***) der folgende Satz: „Eine Raumcurve R_3 beschreibt die vierte Ecke eines Tetraeders, wenn die von ihr ausgehenden Ebenen sich um feste Gerade drehen und die drei anderen Ecken auf Geraden fortschreiten.“ Ein anderes zur Erzeugung von R_3 benutztes Bewegungsgesetz enthält anders ausgedrückt das Theorem (Nr. 7): „Eine Raumcurve R_3 erzeugen drei Ebenenbüschel, welche drei von einem vierten Ebenenbüschel ausgeschnittene Strahlenbüschel projiciren.“

Dafs eine Raumcurve dritter Ordnung zugleich eine Raumcurve

*) Hermes, Die *Jacobi*sche Erzeugungsweise der Flächen zweiten Grades, Crelle's Journ., Bd. 73, 1871, S. 209—272. Beispielsweise wird (S. 220) Dupin's Satz begründet, nach welchem jeder der beiden Focalkegelschnitte die räumlichen Brennpunkte des anderen enthält. Aufserordentlich leicht liefsen sich auch nach der besprochenen Methode Jacobi's Andeutungen gemäfs für jede Krümmungslinie einer Fläche F_2 Paare reeller oder imaginärer räumlicher Brennpunkte nachweisen; ich bespreche die einschlägigen Arbeiten erst im zweiten Bande dieses Referates.

**) Es wurde bereits hervorgehoben, dafs Chasles diesem Theorem eine irrige Wendung gab. Die Spitzen der Kegel zweiten Grades, welche sechs Punkte projiciren, erfüllen die Weddle'sche Fläche F_4 und nicht eine Raumcurve R_3.

***) Der von Chasles gegebene Satz (Nr. 6) bedurfte einer Verbesserung. Wenn man drei Ecken eines Tetraeders über feste Gerade führt und drei Ebenen desselben um feste Gerade dreht — wobei die sechs Geraden nicht unabhängig voneinander sind — so beschreibt die letzte Ecke eine Raumcurve R_3, die letzte Ebene schmiegt sich hingegen einer zweiten Raumcurve $\mathfrak{R}_3$ an. Chasles verlangt aber, dafs auch diese Ebene einen Büschel beschreiben soll. Entsprechende Bemerkungen sind bei dem dualen Theorem (Nr. 16) zu machen.

dritter Klasse ist, liefs Möbius bereits in dem Theorem hervortreten [XXIII, 9]: „Jede Schmiegungsebene einer Raumcurve R_3 schneidet die übrigen Schmiegungsebenen in Tangenten eines Kegelschnittes.“ Chasles hebt zunächst (Nr. 14) hervor, dafs eine abwickelbare Fläche F_4 eine Raumcurve R_3 zur Cuspidalcurve hat, und läfst dann den Dualismus an Eigenschaften von F_4 hervortreten. Drei projectivische Punktreihen — Chasles bringt (Nr. 18) den besonderen Fall projectivisch-ähnlicher Punktreihen — erzeugen z. B. die Reihe der Tangentialebenen einer Fläche F_4.

Bekanntlich kann man den besprochenen Dualismus mit Hülfe eines Nullsystems evident machen, durch welches jedem Punkte von R_3 seine Schmiegungsebene zugeordnet wird. Auf dieses Nullsystem hat Chasles ausdrücklich, wie schon oben erwähnt, erst 1857 hingewiesen.*) Den Gang seiner Entwickelung erkennt man aus seinem Hülfstheorem (Nr. 41): „Irgend drei Punkte A, B, C einer Raumcurve R_3 liegen mit dem Schnittpunkte P ihrer Schmiegungsebenen in einer Ebene π.“ Wenn man R_3 von P aus auf eine Ebene projicirt, so entsteht eine rationale Curve C_3, deren Wendepunkte von den Strahlen PA, PB, PC ausgeschnitten werden; die Wendelinie von R_3 bestimmt also mit P eine A, B, C enthaltende Ebene. Für solche Schmiegungsebenen einer Raumcurve R_4, welche einen Punkt P derselben enthalten, besteht eine ganz analoge Überlegung, die Chasles bereits 1837 angestellt hat.**)

Chasles weist in der Note des Aperçu nochmals auf das Auftreten von Raumcurven R_3 bei der unendlich kleinen Bewegung eines Körpers hin (Nr. 12) und spricht ferner (Nr. 11) den Satz aus: „Der Mittelpunkt einer Fläche F_2, sowie allgemeiner ihr Pol nach einer beliebigen Ebene durchläuft eine Raumcurve R_3, wenn F_2 einen Büschel beschreibt.“***) Die allgemeinere Form des Satzes kann (Nr. 19) dualistisch umgeformt werden. Bereits Bobillier hatte den ersteren Ort als gemeinsame Curve zweier Oberflächen F_2, F_2' gekennzeichnet. Allein es blieb zweifelhaft, ob er erkannt hatte, dafs beide Flächen noch eine Gerade als einen aufserwesentlichen Bestandteil neben dem betrachteten Orte miteinander gemein haben.†) Chasles giebt ferner (Nr. 20) den Satz: „Bleibt von einer Axe eines Tangentialkegels einer Fläche F_2 ein Punkt fest, so umhüllt die Verbindungsebene der beiden anderen Axen eine abwickelbare Fläche F_4.“

2. Für einige der angeführten Sätze sind rein geometrische Be-

---

*) a. a. O. S. 376† (Nr. 43).

**) Chasles, Aperçu historique, Fufsnote zu S. 249.

***) Wenig später, 1838, gab Chasles über die Mittelpunktcurve eines speciellen Büschels von Flächen F_2, in welchem nämlich eine Kugel vorkommt, mehrere bereits besprochene Sätze [XXX, 8].

†) Vergl. das auf S. 249* angeführte.

weise in den oben geschilderten Entwickelungen Hesse's von 1843 enthalten. Insbesondere gilt dies, wie bereits hervorgehoben*), von Möbius' Satz [XXIII, 9]: „Eine Raumcurve R_3 — definirt als Schnittcurve zweier Kegel zweiten Grades mit einer gemeinsamen Mantellinie — bestimmt an jedem ihrer Punkte einen Kegel zweiten Grades und ist somit durch sechs Punkte A, B, C, D, E, F eindeutig festgelegt." Ferner giebt Hesse [XXXIV, 18] eine allerdings dem Continuitätsprincip unterworfene Begründung des Satzes: „Jeder Punkt des Raumes sendet eine Sehne einer Raumcurve R_3 aus." Hesse lehrt diese Sehne einfach zu construiren, wenn außer dem Punkte P noch sechs Punkte von R_3 vorliegen. An der genannten Stelle war ja der sehr elegante Zusammenhang zwischen den acht Schnittpunkten dreier Oberflächen F_2 aus dem Theorem entwickelt worden: „Irgend zwei von acht associirten Punkten bestimmen eine Sehne der Raumcurve R_3, welche die sechs anderen Punkte festlegen."

3. 1847 gab Seydewitz**) die jetzt in der synthetischen Geometrie übliche Definition: „Diejenigen Punkte, in denen sich homologe Strahlen zweier collinearen Strahlenbündel — mit den Scheiteln S, S' — treffen, erfüllen eine Raumcurve R_3." Das Erzeugnis hat in der That mit einer beliebigen Ebene die drei Doppelpunkte zweier collinearen Felder gemein. Bezeichnet man eine SS' enthaltende Ebene mit α_i oder β_i', je nachdem man sie dem ersten oder dem zweiten Bündel zuweist, so ist jeder Punkt von R_3 der Schnittpunkt von drei Ebenen α_i', β_i und α_i oder β_i'. Die Curve erscheint also als Erzeugnis dreier projectivischen Ebenenbüschel. Die Axe des einen ist SS', die der anderen entsprechen SS', je nachdem man diese Gerade in den einen oder anderen Bündel einordnet. Die Curve ist mithin die Schnittcurve zweier Kegel zweiten Grades mit den Spitzen S und S' und der gemeinsamen Mantellinie SS'.

Ist S'' ein fester Punkt von R_3, so beschreiben, wenn P R_3 durchläuft, die beiden Ebenen PSS'' und $PS'S''$ zwei projectivische Ebenenbüschel der beiden gegebenen Bündel, PS'' durchläuft also einen Kegel zweiten Grades. R_3 wird daher (S. 207) von jedem ihrer Punkte aus durch einen Kegel zweiten Grades projicirt; je zwei Punkte von R_3 sind die Scheitel zweier collinearen R_3 erzeugenden Strahlenbündel. Hiernach ist R_3 durch sechs Punkte eindeutig bestimmt. Nach ihrem Verhalten zur unendlich fernen Ebene kann man die Raumcurven R_3 in vier grofse Klassen einordnen. Die unendlich fernen Punkte können sämtlich reell sein, oder es können zwei von ihnen imaginär werden, oder unter sich oder endlich mit dem dritten Punkte zusammenfallen. Seydewitz bezeichnet (S. 212) die Curve

*) Vergl. die Bemerkung von S. 394**.

**) Seydewitz, Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung, Grunert's Arch., Bd. 10, 1847, S. 203—214.

in diesen vier Fällen als räumliche Hyperbel, räumliche Ellipse, parabolische Hyperbel, räumliche Parabel.*) Seydewitz giebt die entsprechenden Sätze über das Erzeugnis zweier collinearen Strahlenfelder, dessen Identität mit der Raumcurve R_3 er jedoch nicht erkannt zu haben scheint, jedenfalls nicht hervorhebt.

4. Aus Seydewitz' Entwickelungen hätten sich noch manche Eigenschaften der Raumcurve R_3 ableiten lassen, die sich zum Teil in der vorhin [S. 425*] erwähnten Abhandlung Chasles' von 1857 zuerst ausgesprochen finden. Zwei homologe Ebenenbüschel der gegebenen Bündel mit den Axen a und a' erzeugen z. B. ein die Raumcurve R_3 enthaltendes Hyperboloid, denn die beiden Schnittpunkte P, Q von R_3 mit einer a enthaltenden Ebene bestimmen offenbar an S und S' zwei homologe Ebenen der Bündel und also auch der Ebenenbüschel mit den Axen a und a'. Das Hyperboloid wird daher einmal von den Sehnen von R_3 erfüllt, welche die Gerade a treffen, andererseits von den Geraden, welche zu a in den verschiedenen Bündeln homolog sind, die mit dem ersten zusammen R_3 erzeugen. Auf das so entstandene einschalige Hyperboloid weist Chasles in der That hin (Nr. 16), nachdem er (Nr. 6) ein Theorem über die Erzeugung von R_3 durch collineare Strahlenbündel vorangeschickt hat. Aus dem so erhaltenen Satze folgert Chasles ausdrücklich (Nr. 17), daſs von jedem Raumpunkte E genau eine Sehne von R_3 ausgeht. Augenscheinlich ist die Sehne die zweite von E ausgehende Gerade des Hyperboloids, welches R_3 mit der Verbindungslinie des Punktes E mit einem beliebigen ihrer Punkte bestimmt. Wesentlich einfacher kann man freilich die betreffende Sehne als den von E ausgehenden Strahl e bezeichnen, welcher die zu SE oder f und $S'E$ oder g' homologen Strahlen f' und g zugleich trifft, das heiſst als Schnittlinie der beiden homologen Ebenen fg und $f'g'$. Auch wenn sie R_3 nicht in reellen Punkten trifft, ist diese Gerade, da sie in alle R_3 erzeugenden collinearen Strahlenbündel homologe Ebenen entsendet, davon unabhängig, wie man die beiden R_3 erzeugenden Bündel auswählt. Um dies zu erkennen, braucht man nur irgend eine der Regelscharen in Betracht zu ziehen, welche neben e unendlich viele eigentliche Sehnen von R_3 enthalten. Mit irgend drei derselben, e_1, e_2, e_3, bestimmt e an jedem Punkte von R_3 einen Ebenenwurf von demselben Doppelverhältnis.

Aus den Darlegungen von Seydewitz folgt ferner der Satz, den Chasles jetzt (Nr. 27) von allen Einkleidungen frei ausspricht: „Drei beliebige projectivische Ebenenbüschel erzeugen eine Raumcurve R_3" und seine unmittelbare Folge: „Eine Raumcurve R_3 liegt mit

*) Für die Raumcurve R_3 schlägt Seydewitz (S. 207) die nicht eben glückliche Bezeichnung „räumlicher Kegelschnitt dritter Ordnung" vor. Die Raumcurve dritter Klasse bezeichnet er (S. 213) als einen „excentrischen Kegel dritter Klasse".

zwei beliebigen ihrer Sehnen auf einem eindeutig bestimmten Hyperboloid" (Nr. 20). Nach dem ersten Theorem ist eine Raumcurve R_3 durch eine Sehne und fünf Punkte eindeutig bestimmt. Fünf Punkte eines einschaligen Hyperboloids liegen nun in (Nr. 31) zwei ihm angehörigen Raumcurven R_3. Jede der beiden Geradenscharen des Hyperboloids besteht aus Sehnen der einen dieser beiden Curven. Auf jeder dieser Sehnen entsteht, wenn nun R_3 um vier Punkte sich dreht, eine Involution. Hiernach kann man, wie Chasles hervorhebt, leicht die Raumcurven R_3 construiren, welche vier Punkte des Hyperboloids enthalten und eine Gerade desselben berühren, auf ihr eine Strecke von gegebener Länge abschneiden u. s. w. Zum Schlufs erwähnt Chasles noch zwei mit R_3 in Verbindung stehende Regelflächen F_4 und F_6. Erstere besteht (Nr. 56) aus den eine Gerade treffenden Sehnen von R_3, letztere aus den R_3 und zwei Gerade l_1, l_2 treffenden Geraden (Nr. 57). Die Ordnung dieser Fläche vermindert sich um r Einheiten, wenn l_1 und l_2 zusammen r Punkte von R_3 enthalten. Eine Fläche F_4 erzeugen zwei R_3 angehörige projectivische Punktreihen (Nr. 55).

Als ein Theorem von Chasles entwickelt Cayley*) den Satz: „Jeder von zwei homologen Punkten zweier collinearen Räume beschreibt eine Raumcurve R_3, wenn ihre Verbindungslinie einen festen Punkt enthält." Ausdrücklich ausgesprochen hatte Chasles jedoch diesen Satz nur für den Fall ähnlicher Räume [XXII, 4].

5. Sucht man durch eine Einteilung eine Übersicht über die Formen zu gewinnen, die eine ebene Curve dritter Ordnung annehmen kann, so hat man einerseits den durch Projection unveränderlichen Eigenschaften Rechnung zu tragen, und man wird andererseits die Gestaltung der unendlich fernen Äste in Betracht ziehen, wie das die Unterscheidung von Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln bei Curven zweiter Ordnung nahe legt. Man wird also zunächst das anschauliche Resultat Newton's benutzen**), dafs jede Curve C_3 in eine divergirende Parabel C_3' projicirt werden kann, um eine Anzahl von Hauptarten zu erhalten, und wird dann jede dieser Arten in verschiedene Species zerlegen, indem man die Fluchtlinie der Ebene von C_3' in verschiedene Lagen zu dieser Curve bringt. Aus den fünf von Newton unterschiedenen wesentlich verschiedenen Arten divergirender Parabeln erhält man die fünf Arten von Curven C_3: Einteilige und zweiteilige allgemeine Curven C_3 (sechster Klasse), sodann die Curven C_3 mit einem Knotenpunkte, isolirten Punkte oder Rückkehrpunkte. Die unendlich ferne Punktgruppe von C_3 kann nun enthalten: Drei reelle Punkte, einen reellen Punkt und zwei imagi-

*) Cayley, Démonstration d'un théorème de M. Chasles, Liouv. Journ., Bd. 10, 1845, S. 383—384.
**) Vergl. S. 5†††.

näre Punkte, einen reellen und einen zweifachen Punkt oder endlich einen dreifachen Punkt. Auf diese Weise gewinnt man vier verschiedene Species einteiliger und sechs verschiedene Species zweiteiliger Curven C_3, indem die unendlich ferne Gruppe bei den letzteren zwei getrennte oder unendlich nahe Punkte des paren Zuges enthalten kann. Von Curven mit einem Knotenpunkt hat man nach dem analogen Princip neun verschiedene Species zu unterscheiden; die unendlich ferne Gruppe kann sowohl Punkte des paren als auch des unparen Bestandteils enthalten, sie kann auch neben dem Doppelpunkte der Curve einen dem paren oder dem unparen Bestandteile angehörenden oder dem Doppelpunkte unendlich nahen Punkt von C_3 aufnehmen. Hierzu kommen nach dem gleichen Princip fünf Species von Curven mit einem isolirten Punkte und sechs Species von Curven C_3 mit einem Rückkehrpunkte.

6. Will man in dies Salmon-Cayley'sche Schema*) die 72 in Newton's Enumeratio unterschiedenen Formen einordnen, so mufs man dieselben gruppenweise als Varietäten der Species zusammenfassen, wie dies Salmon näher ausführt. Newton fügt nämlich als weiteres unterscheidendes Merkmal das Auftreten von Durchmessern hinzu. Die Halbirungspunkte der zu einer Asymptote parallelen Sehnen von C_3 gehören im allgemeinen einer Hyperbel an, die aber auch in einen Durchmesser und die herausgegriffene Asymptote zerfallen kann. Der unendlich ferne Punkt der letzteren charakterisirt sich alsdann als ein Wendepunkt von C_3. Newton entwickelt ausdrücklich, dafs eine Curve C_3 entweder einen oder drei in einem Punkte zusammenlaufende Durchmesser besitzt.**) Nach dieser Unterscheidung zerfällt jede Species, bei der die unendlich ferne

*) Analytische Geometrie der höheren ebenen Curven von George Salmon. Deutsch bearbeitet von Fiedler, Leipzig 1873, S. 200 ff. Entwickelungen solcher Art, allerdings weniger genau ausgeführt, finden sich bereits in der ersten Auflage von Salmon's Buch. Vergl.: Salmon, A treatise on the higher plane curves: intended as a sequel to a treatise on conic sections, Dublin 1852, S. 131, 132, 143 ff. Eine sehr genaue Untersuchung der Newton'schen Einteilung, ihres Zusammenhangs mit dem oben geschilderten Schema und mit der weiter unten geschilderten Plücker'schen Einteilung wird in der Arbeit gegeben: Cayley, On the Classification of Cubic Curves (Read 18th April, 1864.), Cambridge Trans., Bd. 11, 1871, S. 81—128. Ähnliche Ziele verfolgen zwei Arbeiten von Bellavitis. Vergl.: Bellavitis, Sulla classificazione delle curve della terza classe, Atti. dell' i. r. Ist. Veneto, Ser. 2, Bd. 4, 1853, S. 234—255 und Bellavitis, Sulla classificazione delle curve del terzo ordine (Ricev. il 1°. Agosto 1851) Mem. d. soc. Italiana d. sc. res. in Modena, Bd. 25, Parte seconda, Modena 1855, S. 1—50.

**) De Gua hat [a. a. O. S. 229*, S. 225] ausdrücklich hervorgehoben, dafs er den von ihm als neu bezeichneten allgemeinen Wendepunktsatz aus Newton's Durchmessersatz mit Hülfe der „Théorie des Ombres ou Projections des Courbes" abgeleitet habe. Er bietet dann (S. 313 ff.) eine rechnende Herleitung des Satzes.

Gruppe aus einem reellen und zwei imaginären Punkten besteht, in zwei Varietäten, welche sich durch verschiedene Gestaltung des unparen Zuges unterscheiden; derselbe ist im allgemeinen eine die Asymptote durchsetzende Serpentine, deren unendlich ferne Teile zu verschiedenen Seiten der Asymptote liegen, im besonderen Falle hingegen ein conchoidaler, ganz zu einer Seite der Asymptote liegender Zug. Bei Species mit drei unendlich fernen reellen Punkten hat man entweder zwei oder drei Varietäten nach der Anzahl der möglicher Weise auftretenden reellen Durchmesser anzunehmen.

Newton unterscheidet ferner die Fälle, ob die drei Asymptoten ein Dreieck bilden oder einen Punkt miteinander gemein haben. Als einen besonderen Fall hebt er es ferner hervor, wenn die Curve C_3 eine Ecke des Asymptotendreiecks enthält. Hierbei tritt als besondere Form die zweiteilige Curve C_3 mit Mittelpunkt auf, denn der ihr angehörige Mittelpunkt ist zugleich der Schnittpunkt ihrer Asymptoten. Auch die anderen Formen von Curven C_3 mit Mittelpunkt werden angeführt. Ein weiteres Einteilungsprincip bildet, besonders in dem Falle eines unendlich fernen Wendepunktes, die Lage der Satellite der unendlich fernen Geraden gegen das Asymptotendreieck; diese Unterscheidung hängt damit zusammen, dafs Newton drei Arten hyperbolischer Äste betrachtet, die sich zwei verschiedenen Asymptoten anschliefsen. Ein solcher Ast kann nach Art eines Hyperbelastes verlaufen, eingeschrieben sein. Er kann ferner seine beiden Asymptoten schneiden und ist dann umschrieben, er kann endlich nur eine seiner beiden Asymptoten schneiden. Diese Verhältnisse hängen natürlich von der Lage der Satellite ab. Endlich wird bei einem Zuge mit drei unendlich fernen Wendepunkten unterschieden, ob er in den drei Gebieten verläuft, die den Seiten des Asymptotendreiecks anliegen oder in denjenigen, die übereck gegen dasselbe liegen.

7. Offenbar hat das obige Schema auch bereits Newton vorgeschwebt, der seine Formen zunächst, hauptsächlich nach ihrem Verhalten im Unendlichen, in 14 Genera einordnet, ohne dabei ganz consequent zu bleiben. Newton unterscheidet vier Hauptformen der Gleichung von C_3:

$$xy^2 + ey = f(x), \quad xy = f(x), \quad y^2 = f(x), \quad y = f(x),$$

wobei

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

gesetzt wird. Die zweite Gleichung stellt die Tridentcurve, die vierte die cubische Parabel dar; die unendlich ferne Gerade wird bei der einen und der anderen Curve zur Tangente in einem Knotenpunkte und in einer Spitze. Die dritte Gleichung, welche Curven mit unendlich ferner Wendetangente darstellt, liefert die fünf divergirenden Parabeln. Die 65 anderen Formen leitet Newton aus der ersten Gleichung ab. Die y-Axe fällt mit einer Asymptote zusammen; die

beiden anderen werden durch die x-Axe und eine Parallele zur y-Axe harmonisch getrennt. Man erhält nun, wenn $a > 0$; $a < 0$; $a = 0$, $b \gtrless 0$ ist, Curven mit drei reellen Asymptoten, einer reellen Asymptote oder Curven, welche die unendlich ferne Gerade berühren. Im Falle $a = 0$, $b = 0$ erhält man Curven mit einem unendlich fernen zweifachen Punkte; Newton leitet diese Curven aus Kegelschnitten ab und bezeichnet sie als Hyperbolismen der Ellipse, der Hyperbel oder der Parabel, je nachdem der unendlich ferne zweifache Punkt ein isolirter Punkt, ein Knotenpunkt oder eine Spitze ist. Man erhält eine Curve mit einem Durchmesser, bezw. mit drei Durchmessern, wenn man $e = 0$, bezw. $e = 0$, $b^2 - ac = 0$ setzt u. s. w. Um die Hauptform festzustellen, unter welche eine vorgelegte Curve C_3 fällt, benutzt Newton die Gleichung

$$x \cdot f(x) + \frac{e^2}{4} = 0$$

für die Abscissen der zur y-Axe parallelen, also von einem speciellen Punkte der Curve C_3 ausgehenden Tangenten. Je nachdem dieselbe zwei oder vier reelle Wurzeln besitzt, hat man es mit einer einteiligen oder einer zweiteiligen Curve zu thun. Eine Doppelwurzel weist auf einen isolirten Punkt oder einen Knotenpunkt hin, eine dreifache Wurzel auf eine Spitze.

8. Auf Inconsequenzen in der Einteilung Newton's wurde schon frühzeitig hingewiesen. Schon Stirling*) unterscheidet 76 Formen. Zwei weitere hat Murdoch**), wie Cayley an dem oben [S. 429*] genannten Orte (S. 81) anführt, hinzugefügt. Baur***) gelangt auf Grund einer sehr klaren Darlegung der Newton'schen Entwickelung — der ich in dem obigen gefolgt bin — ebenso wie Cayley zu dem Resultat, daſs eine consequente Durchführung ihrer Principien zu 78 Formen führt. Ein unparer Zug dritter Ordnung kann nämlich, auch wenn er von einem isolirten Punkte oder einem paren Zuge begleitet ist, die unendlich ferne Gerade in drei Wendepunkten schneiden oder dieselbe in einem Wendepunkte schneiden und an anderer Stelle berühren und endlich — anstatt einer — die beiden von Newton unterschiedenen Formen annehmen, wenn ein Wendepunkt und zwei gewöhnliche Punkte desselben im Unendlichen liegen (S. 41). Baur selbst gelangt, da er sieben wesentlich verschiedene divergirende Parabeln annimmt, zu 96 verschiedenen Formen von Curven C_3; hierauf komme ich später zurück.

) a. a. O. S. 6.

) a. a. O. S. 6†††. Eine der Formen führt Murdoch auf Cramer zurück. Wie Cayley an anderer Stelle [a. a. O. S. 445*] angiebt, unterscheidet Murdoch schon drei Arten einzügiger divergirenden Parabeln.

***) Baur, Synthetische Einteilung der ebenen Linien III. Ordnung, Stuttgart 1888 (Anhang, S. 43ff.).

9. 1835 unterschied Plücker*) bei einer Classification der Curven C_3 219 Arten, indem er die Beziehungen der unendlich fernen Geraden zu C_3 viel weiter verfolgte als Newton. Plücker geht davon aus, dafs es in dem Büschel

$$pqr - \mu s = 0$$

der Curven C_3, welche die drei Asymptoten QR, RP, PQ oder $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ in denselben der Satellite $s = 0$ angehörigen Punkten P_1, Q_1, R_1 schneiden, im allgemeinen drei Curven mit Doppelpunkt giebt.**) Die Parameter μ_1, μ_2, μ_3 dieser Curven bilden nun mit den Werten $\mu = 0$ und $\mu = \infty$, für welche sich die Curve auf den Inbegriff der drei Asymptoten oder auf die Satellite reducirt, fünf Intervalle, innerhalb deren sich μ verändern kann, ohne dafs die Curve C_3 ihren Charakter verändert. Mit den drei zu μ_1, μ_2, μ_3 selbst gehörenden Übergangsformen liefert der Büschel also acht verschiedene Formen, allgemeiner, wenn n ($= 0, 1, 2, 3$) voneinander verschiedene reelle Curven mit zweifachem Punkte im Büschel vorkommen, $2n + 2$ Formen. Plücker betrachtet nun alle möglichen Anordnungen der Asymptoten und der Satellite gegen einander. Zunächst unterscheidet er die Fälle, ob letztere einen der Schnittpunkte P, Q, R der Asymptoten — die zunächst ein Dreieck bilden sollen — von den anderen trennt oder nicht; in beiden Fällen kommt noch die Grenzlage hinzu, in denen die Satellite einen der Punkte P, Q, R enthält. In den betreffenden Punkt ge-

*) Plücker, System der analytischen Geometrie, Berlin 1835 (Abschnitt 3, § 5, S. 220 ff.).

**) Dreht man eine Gerade um P_1, so beschreibt der Mittelpunkt der von RP und PQ auf ihr abgegrenzten Strecke eine Hyperbel, deren Asymptoten zu RP und PQ parallel sind. Dieselbe hat mit den beiden entsprechend gebildeten Hyperbeln, wie Plücker nachweist, die „Mittelpunkte" des Büschels, die Doppelpunkte der in ihm enthaltenen rationalen Curven gemeinsam (S. 178—180). Giebt man von einer Curve C_3 die Asymptoten und einen Doppelpunkt, so ist die Satellite der unendlich fernen Geraden eindeutig bestimmt. Zwei von den drei rationalen Curven des Büschels können sich zu einer Curve mit Spitze vereinigen. Dieser Punkt selbst gehört der Ellipse an, welche die Seiten des Dreiecks PQR in ihren Mittelpunkten berührt (S 191). Je drei zusammengehörige Mittelpunkte bilden ein Polardreieck der genannten Ellipse, dessen Schwerpunkt mit demjenigen der Gruppe $P_1 Q_1 R_1$ zusammenfällt (S. 193, 194). Sind alle drei Mittelpunkte reell, so ist der im Innern der Ellipse gelegene ein isolirter Punkt der ihn enthaltenden Curve, die anderen beiden Punkte sind eigentliche Knotenpunkte ihrer Curven. Sollen, während das Asymptotendreieck vorliegt, die beiden Tangenten im Doppelpunkte S einen gegebenen reellen oder imaginären Winkel bilden, so beschreibt S einen Kegelschnitt; alle diese Kegelschnitte haben eine doppelte Berührung; die Berührungssehne ist die Polargerade des Asymptotendreiecks hinsichtlich seines Höhenpunktes. Stehen die Tangenten im Doppelpunkte S aufeinander senkrecht, so gehört S der Berührungssehne an (S. 257). Projectivische Verallgemeinerungen dieser Sätze finden sich in der Arbeit: Cayley, On a Case of the Involution of Cubic Curves (Read 22 February, 1864.) Cambridge Trans., Bd. 11, 1871, S. 39—80.

langt dann auch einer der Mittelpunkte, so daſs der Büschel höchstens sechs verschiedene Formen beiträgt. Kommt eine Curve mit Rückkehrpunkt in dem Büschel vor, so vereinigt sie zwei der drei rationalen Curven des allgemeinen Falles in sich. Die zugehörige Lage der Satellite wird natürlich besonders aufgeführt, ebenso der Fall, daſs nur einer der drei Mittelpunkte reell bleibt. Die analogen Unterscheidungen werden auch in dem Falle gemacht, daſs die Satellite zu einer Asymptote parallel wird und einer der Mittelpunkte sich ins Unendliche entfernt, wobei Plücker insgesamt sechs verschiedene Büschel unterscheidet. Entfernt sich endlich die Satellite ganz ins Unendliche, so kommt in dem Büschel nur noch eine Curve mit Doppelpunkt vor; er liefert vier wesentlich verschiedene Curven. Plücker betrachtet ferner Büschel mit drei gemeinsamen, durch einen Punkt gehenden Asymptoten und macht ganz analoge Unterscheidungen für den Fall, daſs zwei der gemeinsamen Asymptoten imaginär werden. Insgesamt gelangt er zu 158 auf 36 Büschel verteilte und in ebenso vielen Figuren erläuterte Formen. Einzelne Büschel liefern je nur eine Curvenform. Dies tritt z. B. ein, wenn die drei gemeinsamen Asymptoten in Wendetangenten übergehen und einen Punkt miteinander gemein haben.

10. Nach ähnlichen Regeln classificirt nun Plücker diejenigen Curven C_3, welche die unendlich ferne Gerade berühren und osculiren. Im ersten dieser Fälle (Fall 2) zieht er zur näheren Unterscheidung diejenige Parabel heran, welche C_3 in dem zweifachen Punkte ihrer unendlich fernen Gruppe fünfpunktig osculirt. Giebt man von einer Curve C_3 die genannte Parabel und die geradlinige Asymptote, sowie ihre beiden letzten Schnittpunkte mit C_3, deren Verbindungslinie zur Axe der Parabel parallel ist, so beschreibt die Curve C_3 einen Büschel. Als gleichartig betrachtet Plücker zwei Curven des Büschels, welche durch keine zwei von den in ihm enthaltenen zerfallenden oder rationalen Curven getrennt werden. Bei der Aufzählung der in Betracht kommenden Büschel beachtet Plücker die Lage der parabolischen und der geradlinigen Asymptote gegeneinander und gegen die erwähnte Hülfsgerade. Ähnlich behandelt er Büschel von Curven C_3, die eine semicubische Parabel C_3 im Unendlichen siebenpunktig berühren und in zwei Punkten schneiden. Diese Punkte, deren Verbindungslinie den unendlich fernen Wendepunkt von C_3 enthält, können reell oder imaginär sein, mit der Spitze der Curve zusammenfallen u. s. w. (Fall 4). Ähnlich werden Curven mit zwei parallelen Asymptoten behandelt (Fall 3). Zwei Fälle für sich (5 u. 6) bilden die Tridentcurve und die cubische Parabel, bei denen die unendlich ferne Gerade zur Tangente in einem Doppelpunkte oder einer Spitze wird.

11. Euler hatte eine Einteilung der Curven dritter Ordnung in 16 Arten lediglich nach dem Verhalten im Unendlichen ge-

geben.*) Als Revision derselben giebt Plücker an einer anderen Stelle des besprochenen Buches (S. 163) folgende Einordnung der Curven dritter Ordnung in 19 Arten. Die unendlich ferne Punktgruppe einer Curve C_3 kann zuerst aus drei von einander verschiedenen reellen oder einem reellen und zwei imaginären Punkten bestehen, ferner kann eine der Asymptoten in eine Wendetangente übergehen, oder es gilt dies von allen dreien. Dies führt im ganzen auf sechs verschiedene Fälle, von denen Euler den letzten — ein reeller und zwei imaginäre unendlich ferne Wendepunkte — nicht aufführt. Es folgen (Fall 7) zunächst Curven mit einer gewöhnlichen und einer parabolischen Asymptote. Die letztere berührt im Unendlichen sechspunktig, wenn die geradlinige Asymptote im Unendlichen osculirt, was einen besonderen Fall (8) ergiebt. Genau wie Euler unterscheidet Plücker sechs verschiedene Fälle von Curven C_3, bei denen die unendlich ferne Gerade einen zweifachen Punkt und einen von ihm getrennten einfachen Punkt enthält, der auch in einen Wendepunkt übergehen kann (Fälle 9—14); er schliefst seine Einteilung, wie Euler, mit der Tridentcurve und der cubischen Parabel ab (Fälle 18 u. 19). Bei Euler bilden diejenigen Curven, welche die unendlich ferne Gerade zur Wendetangente haben, eine einzige Art (14); Plücker hingegen unterscheidet drei verschiedene Fälle (15—17) solcher Curven, nämlich zunächst semicubische Parabeln, sodann Curven C_3, die mit einer semicubischen Parabel eine siebenpunktige bezw. neunpunktige Berührung eingehen. Diese letzte Unterscheidung wird man vielleicht weniger gerechtfertigt finden. Mit gleichem Rechte könnte man es jedenfalls anmerken, wenn die Curve C_3 in einem einfachen unendlich fernen Punkte eine sechspunktige Osculation mit einem Kegelschnitte, eine neunpunktige Osculation mit anderen Curven C_3 oder endlich eine $3n$-punktige Osculation mit Curven C_n eingeht.

12. Newton's berühmter Satz, nach dem jede Curve C_3 als Schatten einer der fünf divergirenden Parabeln angesehen werden kann, wurde von Nicole**) und Clairaut***) in 1733 veröffentlichten Arbeiten behandelt. Nicole beschränkt sich darauf, an Schnitten eines Kegels, den eine divergirende Parabel an einem festen Punkte bestimmt, verschiedene der von Newton aufgezählten Formen nachzuweisen und führt dies genauer bei den zweiteiligen Curven durch. Clairaut hingegen gründet einen wirklichen Beweis des Satzes auf die Thatsache, dafs eine Curve C_3 nicht mehr als drei — selbstverständlich reelle — Wendepunkte besitzen kann. Die Wendepunkte von C_3 bestimmen an einem beliebigen Punkte S Wendestrahlen („côtés

) a. a. O. S. 6††. Eine Vergleichung derselben mit Newton's 14 genera giebt Bellavitis in der Tabelle auf S. 42, 43 der oben [S. 429] an letzter Stelle genannten Schrift.

) Vergl. die zweite auf S. 6* genannte Abhandlung.

***) Vergl. die auf S. 6** genannte Abhandlung.

d'inflexion") des Kegels, der C_3 von S aus projicirt (S. 491). Man könne, schliefst Clairaut weiter, hieraus ableiten, dafs der Kegel nicht mehr als drei Wendestrahlen aufweist und auch Schnitte mit zwei oder weniger als zwei Wendepunkten im Endlichen besitze. Solche Ebenen sind zu einem oder zwei Wendestrahlen des Kegels parallel, da dieselben auf jeder ebenen Curve des Kegels die Wendepunkte ausschneiden. Auf diese Art kann eine Curve C_3 von einem beliebigen Punkte S aus in eine Curve C_3' projicirt werden, die zwei oder überhaupt keine Wendepunkte besitzt; falls C_3' nicht schon eine divergirende Parabel ist, hat sie die Gleichung

$$xy^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Wenn man den Punkt S zum Anfangspunkt der — schiefwinkligen — Coordinaten macht, und die Längeneinheit passend bestimmt, kann man den C_3 und C_3' projicirenden Kegel durch die Gleichung

$$xy^2 = ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3$$

darstellen; C_3' ist sein Schnitt mit der Ebene $z = 1$. Mit der Ebene $x = 1$ hat der Kegel die divergirende Parabel

$$y^2 = dz^3 + cz^2 + bz + a$$

gemein. Zu dem so offenbar gewonnenen Theorem, dafs eine Curve C_3 von einem beliebigen Punkte aus in eine der fünf divergirenden Parabeln projicirt werden kann, braucht man in Wirklichkeit nur die Voraussetzung: „Jede Curve C_3 besitzt wenigstens einen reellen Wendepunkt." Dies deutet auch Clairaut (S. 493) mit der Bemerkung an: Projicirt man eine divergirende Parabel C_3' von einem beliebigen Punkte aus, so ergeben die beiden ins Unendliche gehenden Äste der Curve solche Teile des Kegels, welche in einem zur Ebene der Curve parallelen Wendestrahle aneinander grenzen. Die zugehörige Wendeebene selbst sei zur Ebene der Parabel parallel. In dieser Bemerkung liegt der Beweis fast vollständig enthalten, den Chasles von Newton's Theorem gegeben hat.*) Will man eine Curve C_3 in eine divergirende Parabel C_3' projiciren, so mufs man die Projectionsebene parallel zu der Ebene nehmen, welche den Projectionspunkt O und eine Wendetangente von C_3 enthält. Um die entstehende Curve C_3' in Newton's Sinne als eine divergirende Parabel nachweisen zu können, hat man nur noch Maclaurin's Resultat [XXIV, 3] zu benutzen: „Je zwei Punkte einer Curve C_3, deren Verbindungslinie einen Wendepunkt W enthält, werden durch W und eine Gerade w harmonisch getrennt." Diese Gerade wird offenbar in einen Durchmesser von C_3' projicirt. Da in der Richtung der Sehnen von C_3', welche der Durchmesser halbirt, offenbar

*) Chasles, Sur la génération des courbes du troisième degré, par les cinq paraboles divergentes, et par les cinq courbes à centre, Aperçu historique, Note 20, S. 348—350.

keine Asymptote vorkommt, so ist C_3' eine divergirende Parabel. Chasles macht sogleich darauf aufmerksam, dafs man jede Curve auch in eine Curve mit Mittelpunkt projiciren könne, man brauche zu diesem Zwecke nur die Polare eines Wendepunktes W — so bezeichnet er die Gerade w — ins Unendliche zu projiciren.

13. Chasles' und Clairaut's Entwickelungen verknüpfte Möbius mit Stetigkeitsbetrachtungen in einer 1852 veröffentlichten Abhandlung, von der eine Anzeige schon 1849 erschien.*) Zur besseren Veranschaulichung projicirt Möbius die Curve C_3 auf eine Kugel von dem Mittelpunkte derselben aus. Aus einem unparen Zuge von C_3 entsteht eine einfache — in sich zurücklaufende — sphärische Curve, welche mit einem gröfsten Kreise der Kugel entweder ein Paar gegenüberliegender Punkte gemein hat, oder deren drei. Hingegen projicirt sich ein parer Zug in zwei Zwillingscurven. Aus Stetigkeitsbetrachtungen schliefst nun Möbius, dafs eine einfache sphärische Curve dritter Ordnung, wenn sie Knotenpunkte oder Spitzen nicht enthält, drei Paare von Wendepunkten enthält, im anderen Falle hingegen nur ein Paar (S. 106 ff.). Eine einfache sphärische Curve enthält (S. 98 ff.) auch im allgemeinsten Falle, wenn sie aus dem unparen Zuge einer Curve C_n entsteht, stets eine ungerade Anzahl von Wendepunktpaaren, und zwar mindestens deren drei, wenn sie frei von Knotenpunkten und Spitzen ist. Eine Zwillingscurve enthält Paare von Wendepunkten in gerader Anzahl, falls sie zu einer Curve dritter Ordnung gehört, überhaupt keine solchen. Hieraus ergeben sich nun fünf Haupttypen von sphärischen Curven dritter Ordnung, welche Möbius dadurch als vorhanden nachweist, dafs er sie in divergirende Parabeln projicirt. Der Kegel, welche die sphärische Curve vom Mittelpunkte der Kugel aus projicirt, besitzt die Gleichung

$$fy^2z + ax^3 + bx^2z + cxz^2 + dz^3 = 0,$$

wobei die y-Axe mit einem Wendestrahle, die (x, y)-Ebene mit der zugehörigen Wendeebene, die (x, z)-Ebene mit der Polarebene des Wendestrahls zusammenfällt. Der Kegel schneidet (S. 121) die Ebene

$$z = \text{const.}$$

in einer divergirenden Parabel

$$y^2 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta.$$

14. Aus den Symmetrieverhältnissen dieser Curven schliefst Möbius, dafs die drei reellen Wendepunkte jeder ebenen Curve C_3

*) Möbius, Über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, Leipz. Abh., Bd. 1, 1852, S. 1—82 (Ges. W., Bd. 2, S. 89—176). Vergl. auch: Herr Möbius berichtete über eine von ihm verfafste Abhandlung über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung, Leipz. Ber. f. 1848, Bd. 2, 1849, S. 12—15 (Ges. W., Bd. 2, S. 177—182).

(ohne Knotenpunkt oder Spitze) in einer Geraden liegen. Diese Wendelinie zerlegt mit den drei Wendetangenten die Ebene in drei Vierecke V_1, V_2, V_3 und in vier Dreiecke D_1, D_2, D_3, D_4, von denen das letzte nur von Stücken der Wendetangenten begrenzt sei. Möbius unterscheidet (S 174ff.) die drei Hauptfälle, dafs der unpare Zug die Vierecke V_1, V_2, V_3 durchzieht, dafs die drei Wendetangenten einen Punkt mit einander gemein haben, oder dafs endlich der unpare Zug die Dreiecke D_1, D_2, D_3 durchzieht. In den beiden ersten Fällen handelt es sich stets um einzügige Curven C_3. In dem letzten Falle hingegen kann der unpare Zug von einem in D_4 gelegenen paren Zuge oder isolirten Punkte begleitet sein. Zwei Arten für sich bilden einerseits die Curven mit einem Knotenpunkte, andererseits diejenigen mit einer Spitze. Auf diese Weise entstehen insgesamt sieben statt der sonst unterschiedenen fünf Arten. Drei derselben bestehen aus einzügigen Curven vom Geschlecht 1. Die Anzahl der reellen Tangenten, welche eine Curve C_3 aus einem Punkte P aufserhalb derselben empfängt, verändert sich bei einer stetigen Bewegung des Punktes P jedesmal um zwei Einheiten, wenn P eine der Wendetangenten oder die Curve C_3 selbst überschreitet. Durchzieht nun die Curve C_3 die drei Gebiete V_1, V_2, V_3, so erreicht die Anzahl der reellen Tangenten den gröfsten überhaupt möglichen Wert, C_3 erhält aus jedem Punkte im Innern des Dreiecks D_4 sechs reelle Tangenten. Hingegen erhält eine einzügige Curve C_3, welche die Gebiete D_1, D_2, D_3 durchzieht, aus keinem Punkte von D_4 reelle, überhaupt aus keinem Punkte mehr als vier Tangenten. Auf diese von Möbius nicht hervorgehobene Unterscheidung hat übrigens Chasles bereits 1829 aufmerksam gemacht.*) Chasles interessirt allerdings vorzugsweise die aus dem Dualitätsprincip folgende Thatsache, dafs eine Curve C_6 äufserlich das Bild einer Curve C_4 darbieten kann. Baur hat in dem oben erwähnten Buche die Einteilung der Curven C_3 in sieben Arten angenommen und gelangt bei consequenter Benutzung der von Newton herangezogenen Unterscheidungscriterien zu 96 verschiedenen Formen von Curven C_3.

15. Möbius untersucht ferner ausführlich die Beziehungen zwischen collinear verwandten Curven C_3 und C_3'. Die Wendetangenten und Wendepunkte sowie die von ihnen ausgehenden Tangenten von C_3 werden in analoge Elemente von C_3' umgeformt; das gleiche gilt von einem etwaigen zweifachen Punkte und den Tangenten desselben. Bei rationalen Curven C_3 und C_3' ist in der That die Zugehörigkeit zu derselben Art auch eine hinreichende Bedingung, um zwischen ihnen eine collineare — selbstverständlich reelle — Beziehung ein-

) Vergl. die zweite oben [S. 238] genannte Schrift und die Bemerkung von S. 431** über Murdoch.

zuleiten; zunächst können zwei Curven C_3 und C_3' mit isolirten Punkten, indem man den drei Wendepunkten von C_3 in irgend einer Reihenfolge diejenigen von C_3' zuweist, offenbar auf sechs Arten in collineare Beziehung gesetzt werden. Enthält jede der Curven C_3 und C_3' einen Knotenpunkt, bezw. eine Spitze, so können sie auf zwei, bezw. auf unendlich viele Arten collinear bezogen werden. Zwei gleichartige Curven C_3 und C_3' vom Geschlecht 1 sind hingegen nur dann collinear verwandt — und können alsdann auf sechs Arten collinear bezogen werden — wenn sie die gleiche „Charakteristik" g besitzen (S. 170). Diese Invariante geht in die Gleichung

$$xyz - \tfrac{1}{27} g^3 (x + y + z)^3 = 0$$

ein, welche die Curve C_3 bei Anwendung eines ganz bestimmten abgekürzten barycentrischen Calcüls darstellt. Das zu Grunde liegende Dreieck wird durch die Wendetangenten von C_3 bstimmt. $x + y + z = 0$ ist die Gleichung der Wendelinie. Bezieht man nun auf die drei Wendepunkte von C_3 diejenigen von C_3' in irgend einer Reihenfolge, weist ferner die Wendelinien einander zu, so ist eine collineare Beziehung eindeutig gegeben. Wenn man in der Ebene von C_3' den analogen barycentrischen Calcül anwendet, wie in derjenigen von C_3, so bestehen für zwei homologe Punkte die Gleichungen

$$x : y : z = x' : y' : z'.$$

Offenbar mufs also die zu C_3 collineare Curve C_3' die gleiche Charakteristik g aufweisen, das heifst in der Form

$$x'y'z' - \tfrac{1}{27} g^3 (x' + y' + z')^3 = 0$$

darstellbar sein. Alle Curven C_3 mit isolirten Punkten besitzen die gleiche Charakteristik 1. Unter sich collinear verwandt sind auch alle Curven C_3, deren reelle Wendetangenten einen Punkt miteinander gemein haben.

1851 hatte Salmon*) einen Satz entwickelt, aus welchem eine Beziehung zwischen zwei collinear aufeinander bezogenen Curven C_3 und C_3' folgt. Wird nämlich der Punkt O, von dem aus man die Tangenten OA, OB, OC, OD an die Curve C_3 gelegt hat, auf derselben unendlich wenig verschoben, so drehen sich die Tangenten zunächst um die Punkte A, B, C, D. Weil der Polarkegelschnitt von O die Punkte A, B, C, D enthält und in O die Curve C_3 berührt, so bleibt der Wurf $O(ABCD)$ zunächst, wenn O unendlich wenig auf C_3 verschoben wird, und demnach auch, wenn O die ganze Curve

*) Salmon, Théorèmes sur les courbes de troisième degré, Crelle's Journ., Bd. 42, 1851, S. 274—276 und Salmon, Higher plane curves, Dublin 1852, S. 150.

durchläuft, zu sich selbst projectivisch. Augenscheinlich können nur solche Curven C_3 und C_3' collinear bezogen werden, welche projectivische Tangentenwürfe aufweisen.

16. In den eben geschilderten Entwickelungen spielt der Satz eine grofse Rolle, dafs eine Curve C_3 nicht mehr als drei Wendepunkte besitzt. Auf demselben beruhte bereits Clairaut's Gedankengang, von Poncelet wird der Satz 1832*) als evident bezeichnet, Chasles sieht ihn 1829 in der oben nochmals erwähnten Notiz [S. 238*] ebenfalls als unbedingt richtig an. Es wurde bemerkt, dafs Möbius den Satz durch Stetigkeitsbetrachtungen gewann. Ich mufs nunmehr die wichtigen Entwickelungen nachtragen, die Plücker in seinem „System der analytischen Geometrie", also 1835, nach dieser Richtung hin gegeben hat. Osculirt eine Curve C_3 die reellen Wendetangenten BC, CA, AB in den Punkten A_1, B_1, C_1, so besteht unter Berücksichtigung der Vorzeichen nach Carnot's Theorem die Gleichung

$$\frac{AB_1^3 \cdot BC_1^3 \cdot CA_1^3}{AC_1^3 \cdot BA_1^3 \cdot CB_1^3} = 1,$$

aus welcher sich (S. 45) die Gleichung

$$\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1} = 1,$$

also das Resultat ergiebt: „Drei reelle Wendepunkte einer Curve C_3 liegen stets in einer Geraden" und ferner „eine Curve C_3 besitzt entweder einen reellen Wendepunkt, oder deren drei, welche einer Geraden angehören".

Aber Plücker gelangt zu dem viel allgemeineren Satze: „Eine allgemeine Curve C_3 enthält neun Wendepunkte, von denen sechs imaginär und drei reell sind." Sind nämlich ξ, η cartesische Coordinaten oder überhaupt Coordinaten von der Art, dafs

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$$

die allgemeinste Gleichung einer Geraden ist, so besteht für einen Wendepunkt der Curve $U(\xi, \eta) = 0$ die Gleichung

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial\xi^2} = 0 \qquad \text{oder} \qquad U_1^2\,U_{22} - 2\,U_1\,U_2\,U_{12} + U_2^2\,U_{11} \equiv V(\xi, \eta) = 0,$$

wobei U_i und U_{ik} erste und zweite Differentialquotienten sind. Wenn man die Gleichung einer Curve C_n auf die Form bringt

$$U(\xi, \eta) \equiv f_n(\xi, \eta) + f_{n-2}(\xi, \eta) = 0,$$

unter $f_n(\xi, \eta) = 0$ den Inbegriff ihrer Asymptoten, also unter $f_{n-2}(\xi, \eta)$ eine Form $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades versteht, so nimmt $V(\xi, \eta)$ folgende Form an

$$f_n(\xi, y)\,f_{2n-4}(\xi, \eta) + f_{3n-6}(\xi, \eta) \equiv V(\xi, \eta),$$

*) a. a. O. S. 227*** (Traité, Bd. 2, Nr. 156).

wobei jeder zugefügte Index den Grad der betreffenden Function andeutet. Die Wendepunkte der gegebenen Curve C_n ergeben sich mithin aus der Gleichung

$$f_{3n-6}(\xi, \eta) - f_{n-2}(\xi, \eta) f_{2n-4}(\xi, \eta) = 0,$$

werden auf C_n von einer Curve $C_{3(n-2)}$ ausgeschnitten. Eine Curve C_n besitzt also $3n(n-2)$ Wendepunkte (S. 264). Bei der Curve C_3 legt Plücker die Asymptotengleichung

$$pqr + \alpha p + \beta q + \gamma r = 0$$

zu Grunde, und behandelt unter Benutzung der Identität

$$p + q + r \equiv k$$

p und q als unabhängige Veränderliche.*) Die Wendepunkte werden alsdann (S. 265) von der Curve dritter Ordnung

$$\alpha p^3 + \beta q^3 + \gamma r^3 - 3\beta\gamma p - 3\gamma\alpha q - 3\alpha\beta r + 2(\beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta)k = 0$$

ausgeschnitten. Diese Curve geht, sobald C_3 einen Doppelpunkt besitzt, in drei von ihm ausgehende Gerade über. Enthält aber C_3 eine Spitze, so fallen zwei der drei Geraden mit der Spitzentangente zusammen. Eine Spitze absorbirt also acht von den neun Wendepunkten einer allgemeinen Curve C_3, ein zweifacher Punkt deren sechs und zwar vier imaginäre und zwei reelle oder sechs imaginäre, je nachdem es sich um einen Knotenpunkt oder einen isolirten Punkt handelt (S. 266).

Dafs eine allgemeine Curve C_3 drei reelle und sechs imaginäre Wendepunkte enthält, sucht Plücker auch allein aus dem Umstande abzuleiten, dafs die Verbindungslinie zweier reellen oder imaginären Wendepunkte stets noch einen dritten enthält (S. 285). Plücker giebt ohne nähere Ausführungen den Satz, dafs eine Gruppe aus mehr als drei reellen Punkten nicht bestehen kann, in der die Verbindungslinie je zweier Punkte einen dritten Punkt aufnimmt, bezeichnet es als unmöglich, dafs vier Paare conjugirt-imaginärer Wendepunkte vorliegen, deren reelle Träger von einem einzigen reellen Wendepunkte ausgehen und behält schliefslich die einzige Möglichkeit übrig, dafs C_3 drei Paare conjugirt-imaginärer Wendepunkte besitzt, deren jedes mit je einem reellen Wendepunkte von C_3 auf einer reellen Geraden liegt.

Nach diesen Entwickelungen kann die Curve C_3 in zwölf Arten durch eine Gleichung von der Form

$$pqr - \alpha s^3 = 0$$

*) Mit Benutzung dieses Coordinatensystems entwickelt Plücker die oben [S. 432**] angeführten Sätze über die Mittelpunkte eines Büschels von Curven C_3 mit gemeinsamen Asymptoten und gemeinsamer Satellite der unendlich fernen Geraden.

dargestellt werden; $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ oder BC, CA, AB sind drei Wendetangenten, deren Wendepunkte A_1, B_1, C_1 der Wendelinie l oder $s = 0$ angehören. Bei vier von den zwölf überhaupt möglichen Darstellungen einer gegebenen Curve C_3 ist die Wendelinie eine reelle Gerade. Plücker erblickt in dem Umstande, dafs die obige Gleichung neun willkürliche Constante aufweist, einen Beweis dafür, dafs jede Curve C_3 einmal oder mehrmal in dieser Form dargestellt werden kann; er knüpft hieran die obigen einer Ergänzung sehr bedürftigen Betrachtungen über die Configuration der Wendepunkte.

17. Ich hebe noch folgende Sätze Plücker's hervor: „Durch einen Punkt P der Ebene geht eine bestimmte der Curven C_3, die drei Gerade in drei einer Wendelinie angehörigen Punkten osculiren. Die Tangente des Punktes P enthält den Schnittpunkt der Wendelinie mit der „Polare" des Punktes P bezüglich des aus den Wendetangenten gebildeten Dreiecks." Der Schnittpunkt dieser Polare mit irgend einer der Wendetangenten trennt den Punkt P von den beiden anderen harmonisch (S. 289). Der zweite Satz (S. 288) lautet: „Die Curven des betrachteten Büschels haben für jeden Punkt der Wendelinie den gleichen Polarkegelschnitt. Derselbe enthält die Ecken des aus den drei Wendetangenten gebildeten Dreiecks und den Pol L desselben hinsichtlich der Wendelinie l. L ist ein isolirter Punkt der durch ihn bestimmten Curve des Büschels. Die Polarkegelschnitte bilden einen Büschel, dessen Geradenpaare zu den drei Wendepunkten gehören." Diese Sätze lassen sich in einfacher Weise mit Theoremen von Bobillier in Verbindung bringen. Die betrachteten Curven gehören in einen Büschel mit den beiden Curven C_3' und C_3'', von denen die erste aus der dreifach zählenden Wendelinie, die zweite aus den drei Wendetangenten besteht. C_3' kann man als Gruppe von drei Strahlen betrachten, die von einem beliebigen Punkte der Wendelinie ausgehen. Demnach hat nach dem Theorem von Bobillier [XXVI, 8] ein Punkt der Wendelinie für jede Curve des Büschels den gleichen Polarkegelschnitt. Da auch C_3'' diesen Polarkegelschnitt bestimmt, enthält derselbe die Schnittpunkte der Wendetangenten und den Punkt L, dessen Polargerade nach C_3'' mit der Wendelinie zusammenfällt. Aus anderen Theoremen von Bobillier [XXVI, 6, 8] folgt leicht, dafs die Polargeraden eines beliebigen Punktes bezüglich der Curven C_3 des Büschels einen Strahlenbüschel bilden. Demselben gehören als Polargeraden von C_3' und C_3'' die Wendelinie und die Polare des Punktes P bezüglich des aus den Wendetangenten gebildeten Dreiecks an. Für die P enthaltende Curve des Büschels geht die Polargerade in die Tangente im Punkte P über, dieselbe verbindet also P mit dem Scheitel des genannten Strahlenbüschels.

18. Für die synthetische Geometrie von besonderer Bedeutung sind noch Ansätze für die projectivische Erzeugung der Curven C_3, welche sich in Plücker's Buch finden. Die Gleichung

$$pqr - \alpha s = 0$$

kann man als Resultat der Elimination von ξ aus den Gleichungen

$$qr - \xi = 0, \quad \alpha s - \xi p = 0$$

darstellen, von denen für jeden Wert von ξ die erste eine bestimmte Hyperbel mit den Asymptoten $q = 0$ und $r = 0$, die zweite einen zugehörigen von dem letzten Schnittpunkte der Asymptote $p = 0$ ausgehenden Strahl darstellt. Die Schnittpunkte M und M_1 eines Strahles und der zugehörigen Hyperbel gehören C_3 an. Der Mittelpunkt von MM_1 halbirt nach einer bekannten Hyperbeleigenschaft zugleich die Strecke, deren Endpunkte die Asymptoten $q = 0$, $r = 0$ auf der Geraden MM_1 ausschneiden. Diese Eigenschaft gestattet, wenn man die drei Asymptoten gegen einander vertauscht, aus einem Punkte einer Curve C_3 eine ihr angehörige Punktmenge abzuleiten (S. 167). Eine ähnliche Bemerkung kann man, wie Plücker hervorhebt, aus dem Umstande ableiten, dafs die Gleichung

$$pqr - \alpha s^2 = 0$$

einer Curve C_3 als Resultat der Elimination von λ aus den Gleichungen

$$pq - \lambda s = 0, \quad \alpha s - \lambda r = 0$$

aufgefafst werden kann (S. 281). Bei veränderlichem λ beschreibt der Kegelschnitt $pq - \lambda s = 0$ einen Büschel, der zwei unendlich ferne Punkte und die Berührungspunkte zweier von ihnen ausgehenden Tangenten, $p = 0$, $q = 0$, von C_3 zu Grundpunkten hat. Der Strahl $\alpha s - \lambda r = 0$ dreht sich um den Berührungspunkt einer von dem dritten unendlich fernen Punkte ausgehenden Tangente $r = 0$ von C_3. Vorzugsweise benutzt aber Plücker diese Gleichungsform zur Untersuchung der zwölf Geraden, welche die unendlich ferne Gerade zur Satellite haben. Mit der projectivisch verallgemeinerten Aufgabe hatte sich, wie oben [XXIV, 3] erwähnt, Maclaurin beschäftigt.

Ich werde später, bei Besprechung der Plücker'schen Gleichungen, auf die überaus wichtigen Schlufsbemerkungen des besprochenen Buches zurückkommen.

19. Steiner hatte die Frage aufgeworfen [XXVII, 17], welchen Ort ein Punkt P beschreibt, wenn seine Polaren nach drei Kegelschnitten einem Büschel angehören, und hatte die Lösung für den Fall angegeben, in dem die drei Kegelschnitte zwei Punkte miteinander gemein haben; dieselben gehören auch dem der Aufgabe nun genügenden Kegelschnitte an. Die naheliegende Betrachtung, mit deren Hülfe man in der synthetischen Geometrie den Ort als eine Curve C_3 erkennt, hat zuerst A. Jacobi*) angestellt (1846). Wenn ein Punkt P

*) a. a. O. S. 317**.

die Gerade l durchläuft, beschreiben seine Polaren nach drei Kegelschnitten K_2, K_2', K_2'' projectivische Strahlenbüschel und erzeugen also drei Kegelschnitte. Dieselben haben drei Punkte miteinander gemein, zu deren jedem für K_2, K_2', K_2'' derselbe Punkt von l conjugirt ist. Daneben schneiden sich je zwei von ihnen in dem Pole eines der drei Kegelschnitte K_2, K_2', K_2'' nach l. A. Jacobi giebt diese Überlegung zunächst für den Fall dreier Geradenpaare (S. 97) und hebt dann ausdrücklich hervor, dafs sie auch für den Fall dreier Kegelschnitte gültig bleibt (S. 102). Um diese Curve C_3 als „Tripelcurve" eines Netzes von Kegelschnitten nachzuweisen und ihre zahlreichen schönen Eigenschaften zu erhalten, brauchte man nur die Resultate aneinander zu reihen, welche Seydewitz über den Kegelschnittbüschel bereit gestellt hatte [XXX, 12]. Zwei für jeden der drei Kegelschnitte K_2, K_2', K_2'' conjugirte Punkte P, Q; P', Q'; P'', Q''; ... sind „Wechselpunkte" für jeden der Büschel K_2', K_2''; K_2'', K_2; K_2, K_2', ferner für jeden weiteren Büschel, den zwei diesen Büscheln beliebig entnommene Kegelschnitte miteinander bestimmen. Aus jeder Ecke O des Polardreiecks, welches die Kegelschnitte irgend eines dieser Büschel miteinander gemein haben, werden daher die Punktepaare PQ, $P'Q'$, $P''Q''$, ... durch die Strahlenpaare einer Involution projicirt. Die Strahlen OP, OQ enthalten — da der vorliegende Ort eine Curve C_3 ist — noch wenigstens ein weiteres Paar P_0Q_0 conjugirter Punkte; für alle Kegelschnitte der betrachteten Mannigfaltigkeit ist mithin nach dem Staudt-Hesse'schen Satze [XXII, 3; XXXVI, 23] der Schnittpunkt O_0 von PQ_0 und P_0Q zu O conjugirt, demnach gehört O der Curve an. Sie ist der Ort der Doppelpunkte aller in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Geradenpaare. Dafs die bisher eingeführten Kegelschnitte eine lineare Mannigfaltigkeit zweiter Stufe, ein Netz bilden, welches den durch zwei seiner Individuen bestimmten Büschel vollständig enthält, kann man aus dem oben angegebenen Gergonne-Bobillier'schen Theorem [XXVI, 1] folgern.

20. Man kann die Curve C_3 nach dem obigen mit Hülfe irgend dreier Paare von Wechselpunkten, die nicht Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits sind, definiren. An jedem ihrer Punkte bestimmen diese drei Paare PQ, $P'Q'$, $P''Q''$ Strahlenpaare einer Involution. Dieser Involution angehörige Tangentenpaare empfangen aus einem Punkte O von C_3 auch Kegelschnitte $\mathfrak{K}_2$; $\mathfrak{K}_2'$; $\mathfrak{K}_2''$ der Scharen, welche durch die Punktepaare $P'Q'$, $P''Q''$; $P''Q''$, PQ; PQ, $P'Q'$ festgelegt sind, ferner beliebige Kegelschnitte der Scharen, welche irgend zwei der schon eingeführten Kegelschnitte bestimmen. Wiederum hat man diese Mannigfaltigkeit als in sich abgeschlossenes lineares System zweiter Stufe, als eine Schar-Schar nachzuweisen. C_3 erweist sich als Ort der in dieser Schar-Schar vorkommenden Punktepaare. Schneiden sich nämlich in O zwei gemeinsame Tangenten a, b der Kegelschnitte $\mathfrak{K}_2$ und $\mathfrak{K}_2'$, so sind a, b; OP, OQ; OP', OQ';

OP'', OQ'' vier Strahlenpaare einer Involution, und O gehört der Curve C_3 an.

Wesentlich auf Grund der letzten Überlegung sprach ich oben [XXV, 2] die Vermutung aus, Chasles habe bereits 1835 den Satz gekannt: „Drei Kegelschnitte U_2, V_2, W_2 empfangen Tangentenpaare, die einer Involution angehören, aus Punkten einer Curve C_3.“ Nach dem Satze von Chasles gehörten einer Curve C_3 gewisse 27 Punktepaare an; die einen waren ausgeartete Curven zweiter Klasse der Scharen, die U_2, V_2, W_2 paarweise bestimmen, die anderen spielten die gleiche Rolle in den neuen Scharen, welche die bereits ermittelten Punktepaare mit den gegebenen Kegelschnitten bestimmen. Wenn man U_2 festhält, V_2 und W_2 beliebig einer Schar entnimmt, so bleiben 18 von jenen 54 Punkten, mithin die Curve C_3 selbst, fest. Man hat deshalb zunächst folgendes, mit dem obigen Satze völlig gleichwertiges Theorem: „Die Ecken eines zwei Kegelschnitten umschriebenen vollständigen Vierseits durchlaufen eine Curve C_3, wenn der eine Kegelschnitt fest bleibt, der andere in einer Schar bewegt wird.“

21. Indessen lange, bevor die eben geschilderten Beziehungen in der synthetischen Geometrie aufgefunden und weiter ausgeführt wurden, waren dieselben von Hesse und Cayley mit den Hülfsmitteln der analytischen Geometrie erwiesen worden. Ich will zunächst Hesse's Entwickelungen, die mit dem Jahre 1844 beginnen, im Zusammenhange schildern. Hesse*) geht bei der Bestimmung der Wendepunkte einer Curve C_n von der Identität aus:

$$f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11} \equiv \frac{n}{n-1} (f_{11} f_{22} - f_{12}^2) f - \frac{x_3^2}{(n-1)^2} \cdot \varphi,$$

welche zwischen einer homogenen Function $f(x_1, x_2, x_3)$ n^{ten} Grades, ihren ersten und zweiten Differentialquotienten und der aus ihren zweiten Differentialquotienten gebildeten Hesse'schen Determinante φ — dieselbe wird schlechthin als Determinante der gegebenen Function bezeichnet — obwaltet.

Diese Formel führt nun, nach dem bereits von Plücker eingeschlagenen Beweisverfahren, sofort zu einer Curve $3(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit einer Curve C_n nur die Wendepunkte gemein hat. Unter der Voraussetzung, daſs x_3 beständig gleich 1 ist, x_1, x_2 aber cartesische Coordinaten sind, hat mit der Curve C_n:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

schon nach Plücker's Entwickelung die Curve C_{3n-4}:

$$f_1^2 f_{22} - 2 f_1 f_2 f_{12} + f_2^2 f_{11} = 0$$

die Wendepunkte — d. h. die Punkte mit unendlich groſsen

*) Hesse, Über die Wendepuncte der Curven dritter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 28, 1844, S. 97—107 (Abh., S. 123—135).

Krümmungsradien — und die Asymptoten gemein. Die Identität zeigt nun, dafs die Curve C_{3n-6}:

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33} \equiv \varphi(x_1, x_2, x_3) = 0$$

nur die Wendepunkte von C_n ausschneidet (S. 131).*) C_{3n-6}, die Hesse'sche Curve von C_n, ist covariant zu C_n; hierin besteht bekanntlich der grofse Fortschritt gegen Plücker's Entwickelung. Ist f, und mit ihr φ, eine Form dritten Grades, so werden Ergebnisse einer vorbereitenden Arbeit**) Hesse's anwendbar. Nach einem Hauptresultate derselben besitzt die Hesse'sche Determinante der Function $f + t\varphi$ die Form $f + T\varphi$, wobei T eine gebrochene Function dritten Grades von t ist (S. 113). Hieraus folgt zunächst das schöne Resultat: „Jede Curve C_3, welche die neun Wendepunkte einer Curve C_3 überhaupt enthält, hat dieselben auch zu Wendepunkten.“ Jede Curve C_3 dieses Büschels hat eine andere Curve desselben zur Hesse'schen Curve und ist ihrerseits die Hesse'sche Curve von drei verschiedenen Curven des Büschels. Eine Gleichung vierten Grades ($T = t$) bestimmt diejenigen Curven des Büschels, deren jede mit ihrer eigenen Hesse'schen Curve zusammenfällt, von denen also eine jede aus drei Geraden

$$y_1 = 0, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0$$

besteht. Die Gleichung jeder Curve des Büschels ist dann

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\varkappa y_1 y_2 y_3 = 0.\text{***})$$

---

*) 1851 [a. a. O. S. 238*** (S. 264 ff.)] giebt Hesse folgende symmetrische Herleitung dieses wichtigen Resultates. Eine homogene Gleichung n^{ten} Grades $f_n(x_1, x_2, x_3) = 0$ stellt, wenn x_1, x_2, x_3 ganze lineare Functionen cartesischer Coordinaten sind, eine Curve C_n dar. Für einen Wendepunkt besteht die Gleichung $\sum \pm x_1\, dx_2\, d^2 x_3 = 0$. Aufserdem waltet noch eine Identität $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \equiv a$ ob. Auch hier ergiebt sich für die Coordinaten der Wendepunkte zunächst eine Gleichung $(3n-4)$ten Grades, die Hesse mit Hülfe der Curvengleichung reducirt. Auch in der unten [S. 446***] genannten Schrift von 1847 bietet Hesse eine Herleitung seines Satzes (S. 147 ff.).

**) Hesse, Über die Elimination der Variabeln aus drei algebraischen Gleichungen vom zweiten Grade mit zwei Variabeln, Crelle's Journ., Bd. 28, 1844, S. 68—96 (Abh., S. 89—122).

***) Hiernach sind von den neun Wendepunkten einer Curve C_3, welche durch die Gleichungspaare

$$y_1 = 0,\ y_2^3 + y_3^3 = 0; \quad y_2 = 0,\ y_3^3 + y_1^3 = 0; \quad y_3 = 0,\ y_1^3 + y_2^3 = 0$$

dargestellt werden (S. 135), drei reell, die übrigen imaginär, sobald C_3 eine reelle Curve ist. $y_1 = 0$ kann man dann als eine reelle Gerade betrachten, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$ sind entweder conjugirt-imaginär oder reell; im ersten Falle enthält $y_1 = 0$ drei reelle Wendepunkte, im zweiten Falle trägt jede der drei Geraden genau einen reellen Wendepunkt. Der geometrische Ausdruck für diese Verhältnisse ist bekanntlich der später zu erörternde Satz: „Je zwei Ecken eines Wendeliniendreiecks sind dreifache Punkte

Von einem dieser Wendeliniendreiecke kann man durch lineare Substitutionen, die Hesse ausführlich erörtert, zu den drei übrigen übergehen (S. 121). Befriedigender als durch die Betrachtung Plücker's, auf den Hesse ausdrücklich (S. 134) verweist, war so die Verteilung der neun Wendepunkte auf die zwölf Wendelinien zum Ausdruck gebracht. Die Verbindungslinie irgend zweier Wendepunkte ist nach diesen Entwickelungen die Seite eines bestimmten Wendeliniendreiecks und enthält mithin noch einen dritten Wendepunkt.*) Sechs von sieben herausgegriffenen Wendepunkten einer Curve C_3 mögen zu zwei und zwei auf drei von dem siebenten Wendepunkte ausgehenden Wendelinien liegen. Dieser bestimmte Punkt der Gruppe ist dann zugleich ein Wendepunkt einer beliebigen Curve C_3', welche die sieben Wendepunkte von C_3 enthält, da seine erste Polare auch für C_3' aus zwei Geraden besteht. Eine ähnliche von Hart angestellte Betrachtung**), welche Salmon mit der vorigen zugleich 1852 mitteilt, erweist den Hesse'schen Satz, dafs die neun Wendepunkte einer Curve C_3' zugleich Wendepunkte jeder Curve C_3 eines Büschels sind.

22. Durch Hesse's Betrachtungen war bereits dargethan, dafs die Auffindung der Wendepunkte einer gegebenen Curve C_3 auf die Auflösung einer Gleichung vierten Grades, zweier Gleichungen dritten Grades und von linearen Gleichungen zurückkommt. In der That gewinnt man nach Auflösung der Gleichung $T = t$ sofort die Gleichungen der Curven G_3', G_3'', G_3''', $G_3^{(4)}$, die in Wendeliniendreiecke ausarten. Die Polarkegelschnitte von G_3' nach drei beliebigen nicht in einer Geraden liegenden Punkten P, Q, R haben nur die drei Ecken des Wendeliniendreieckes G_3' mit einander gemein, woraus man eine Gleichung dritten Grades zu ihrer Bestimmung ableiten kann. Um die Wendepunkte festzulegen, hat man das analoge für G_3'' zu leisten. Hesse spricht dieses Resultat jedoch erst in einer durch Jacobi veranlafsten Arbeit***) ausdrücklich aus, in der er eine allgemeinere

---

einer Involution dritter Ordnung, von der die auf ihrer Verbindungslinie liegenden Wendepunkte eine Gruppe bilden." Einen elementaren rechnenden Beweis dafür, dafs eine divergirende Parabel zwei im Endlichen liegende Wendepunkte besitzt, giebt die Notiz: Cayley, On the inflexions of the cubical divergent parabolas, Quart. Journ, Bd. 6, 1864, S. 199—203.

*) In der That ist es leicht, Hesse's Normalform der Gleichung einer Curve C_3 in die Plücker'sche

$$Y_1\, Y_2\, Y_3 - \mu\, Y^3 = 0$$

zu transformiren. Eine solche Herleitung hat auch Hesse schon gekannt. Vergl.: Abh. von Hesse, S. 692 ff. (Anmerkung zu S. 115). Diese Transformation findet sich in der Arbeit: Cayley, On Cubic Cones and Curves (Read April 18, 1864.), Cambridge Trans., Bd. 11, 1871, S. 129—144 (S. 137).

**) Salmon, Higher plane curves, S. 141 u. 142.

***) Hesse, Algebraische Auflösung derjenigen Gleichungen 9ten Grades, deren Wurzeln die Eigenschaft haben, dafs eine gegebene rationale

Klasse von Gleichungen neunten Grades mit Hülfe einer Gleichung vierten Grades und zweier Gleichungen dritten Grades, also auf algebraischem Wege auflöst. Die eben geschilderte Ueberlegung kann man für den Fall der Wendepunkte einer Curve C_3 als die geometrische Interpretation des Gedankenganges der Abhandlung ansehen.

23. Die oben [S. 444*] genannte Abhandlung Hesse's bringt noch (S. 133) das wichtige Theorem: „Eine Curve C_3:

$$\sum \pm \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = 0$$

enthält die Paare conjugirter Punkte (zugeordnete harmonische Polenpaare), welche drei Kegelschnitte

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = 0$$

miteinander gemein haben.“ Für die ursprünglichen können drei Kegelschnitte der Mannigfaltigkeit

$$k_1 f_1 + k_2 f_2 + k_3 f_3 = 0$$

eintreten. Hesse folgert hieraus die Entstehung der Curve C_3 als Tripelcurve: „Die Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks beschreiben eine Curve C_3, wenn die Ecken desselben auf einem festen Kegelschnitte fortschreiten und stets mit vier festen Punkten zusammen einem beweglichen Kegelschnitte angehören.“ Soll diese Curve mit der Hesse'schen Curve einer gegebenen Curve C_3

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

zusammenfallen, so braucht man nur (S. 133)

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad f_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad f_3 = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

zu setzen.

Eine Curve C_3 ist die Hesse'sche Curve dreier Curven C_3', C_3'', C_3''' und enthält deshalb auch drei Systeme von Paaren conjugirter Punkte. Aus zwei Paaren PQ und $P_1 Q_1$ conjugirter Punkte desselben Systems kann man nach dem Satze vom vollständigen Vierseite, den Hesse schon 1840 aufgestellt hatte [XXXIV, 16] und jetzt am Anfange (S. 159) einer neuen Abhandlung*) rechnend erweist, ein drittes Paar conjugirter Punkte des Systems linear ableiten. Für jeden Kegelschnitt mit den beiden Paaren PQ, $P_1 Q_1$ conjugirter Punkte sind auch die Schnittpunkte

---

und symmetrische Function $\Theta(x_\lambda, x_\mu)$ je zweier Wurzeln x_λ, x_μ eine dritte Wurzel $x_\varkappa$ giebt, so dafs gleichzeitig: $x_\varkappa = \Theta(x_\lambda, x_\mu)$, $x_\lambda = \Theta(x_\mu, x_\varkappa)$, $x_\mu = \Theta(x_\varkappa, x_\lambda)$, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 193—208 (Abh., S. 137—154).

*) Hesse, Über Curven dritter Ordnung und die Kegelschnitte, welche diese Curven in drei verschiedenen Puncten berühren, Crelle's Journ., Bd. 36, 1848, S. 143—176 (Abh. S. 155—192).

PP_1, QQ_1 und PQ_1, P_1Q zueinander conjugirt. Zunächst ergeben sich hier die drei Systeme von C_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseiten. Man erkennt ferner, indem P_1 und Q_1 an P und Q heranrücken, dafs je zwei conjugirte Punkte den gleichen Tangentialpunkt besitzen. Da C_3 aus einem ihrer Punkte vier Tangenten empfängt, aus denen man auf drei Arten zwei Paare bilden kann, so ergiebt sich noch eine Bestätigung dafür, dafs C_3 genau drei Systeme von Paaren conjugirter Punkte enthält.

Bereits Maclaurin hatte, wie oben [XXIV, 3] angeführt, die drei Systeme von C_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseiten aufgedeckt. Van Rees hatte dann bei der Quetelet-van Rees'schen Focale ein bestimmtes dieser Systeme, von dem die beiden unendlich fernen Kreispunkte ein Paar bilden, näher untersucht [XXV, 1].

24. Hesse behandelt nun Kegelschnitte, welche C_3 in drei Punkten P, P_1, P_2 berühren. Aus dem allgemeinen Satze (S. 178): „Zu sechs Schnittpunkten einer Curve C_3 mit einem Kegelschnitte sind in jedem ihrer drei Systeme sechs einem Kegelschnitte angehörige Punkte conjugirt" folgt, wenn der erste Kegelschnitt zunächst in eine Doppelgerade, hernach in ein Geradenpaar ausartet, dafs es drei Systeme von Kegelschnitten der betrachteten Art giebt, und dafs die sechs Berührungspunkte zweier Kegelschnitte desselben Systems einem Kegelschnitte angehören. Bei jedem Kegelschnitte, welcher C_3 in drei Punkten P, P_1, P_2 berührt, liegen die Schnittpunkte Q, Q_1, Q_2 von P_1P_2, P_2P, PP_1 mit C_3 auf einer Geraden l. Es gehört also jeder Kegelschnitt der bezeichneten Art thatsächlich in ein bestimmtes der betrachteten drei Systeme. Q, Q_1, Q_2 sind die zu P, P_1, P_2 conjugirten Punkte. Dafs nur diese drei Systeme von Kegelschnitten der betrachteten Art existiren, folgt auch daraus, dafs die Tangentialpunkte von P, P_1, P_2 stets einer Geraden angehören. Indem man die Gerade l zuerst in eine Tangente, dann in eine Wendetangente von C_3 übergehen läfst, gelangt man zu drei Systemen von Kegelschnitten, die C_3 an einer Stelle vierpunktig, an einer anderen Stelle zweipunktig berühren, und zu drei Gruppen von je neun Punkten, in deren jedem C_3 von einem Kegelschnitte sechspunktig berührt wird. Jeder dieser 27 Punkte hat einen Wendepunkt zum Tangentialpunkt. Zwei von diesen 27 Punkten liegen, je nachdem sie der gleichen Gruppe oder zwei verschiedenen Gruppen angehören, mit einem Wendepunkte oder einem Punkte der dritten noch übrigen Gruppe in einer Geraden. Es giebt also 81 Gerade, deren jede mit C_3 drei Osculationspunkte fünfter Ordnung gemein hat. Hesse weist hier auf eine Abweichung von einem Lehrsatze hin, den Steiner*) kurze Zeit vorher etwa in folgender Weise aufgestellt hatte: „Mit Hülfe einer

*) Steiner, Geometrische Lehrsätze, Crelle's Journ., Bd. 32, 1846, S. 182—184 (Ges. W., Bd. 2, S. 369—373).

algebraisch auflösbaren Gleichung kann man 27 Punkte einer Curve C_3 — 9 reelle und 18 imaginäre — ermitteln, in deren jedem sie von einem Kegelschnitte sechspunktig berührt wird. Es giebt 108 Gerade, deren jede drei von diesen 27 Punkten enthält.“ Zur Erläuterung fügt Steiner bei, dafs die neun reellen Punkte zu drei und drei auf neun Geraden verteilt sind, drei bestimmte unter ihnen haben einen Punkt miteinander gemein. Offenbar enthält jede von ihnen die Berührungspunkte der Tangenten, die von einem Wendepunkte ausgehen. Ohne Zweifel hat Steiner die Überlegung, dafs zu jeder der zwölf Wendelinien eine Gruppe von neun Geraden gehört, zu jener falschen Anzahl 108 geführt. Augenscheinlich kommt aber jede der ausgezeichneten Geraden in vier Gruppen vor, und man hat $12 \cdot 6 + 9 = 81$ verschiedene Gerade der genannten Art.

25. Auch die Angaben über die Realitätsverhältnisse treffen nur für die zweizügige Curve C_3 zu. Die einzügige Curve C_3 besitzt offenbar 3 reelle und 24 imaginäre Osculationspunkte der bezeichneten Art; weitere Modificationen würden bei den rationalen Curven C_3 eintreten. Hierauf hat Plücker aufmerksam gemacht.*) Aus der Gleichungsform einer Curve C_3:

$$f_1 f_2 - \mu g_1^3 = 0$$

schliefst Plücker einen bereits von Poncelet**) angegebenen Hülfssatz: „Berührt ein Kegelschnitt ($f_2 = 0$) eine Curve C_3 zweimal dreipunktig, so schneidet die Verbindungslinie dieser Berührungspunkte ($g_1 = 0$) einen Wendepunkt ($f_1 = 0$, $g_1 = 0$) der Curve C_3 aus.“ Hiernach sind die gesuchten Punkte die Berührungspunkte von Tangenten, welche die Wendepunkte von C_3 aussenden.***) Nach Besprechung der Realitätsverhältnisse fügt Plücker noch hinzu, dafs die Auffindung der betrachteten Punkte auf eine algebraisch auflösbare Gleichung dann und nur dann führe, wenn das entsprechende von den Wendepunkten gelte. Das sei aber bisher noch nicht als möglich erwiesen. Der Zufall fügte es, dafs diese kritischen Bemerkungen und die Abhandlung Hesse's, welche den erforderlichen Nachweis erbringt, in demselben Bande des Crelle'schen Journals erschienen. Die oben geschilderte Art, in der man jetzt Hesse's Satz zu begründen pflegt, und die auch Steiner in Anwendung gebracht haben wird, war schon fast vollständig in Hesse's Abhandlung von 1844 enthalten.

*) Plücker, Über Curven dritter Ordnung und analytische Beweisführung, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 329—336 (Abh., Bd. 1, S. 404—412).

) Vergl. a. a. O. S. 227* (Traité, Bd. 2, Nr. 161).

***) Insbesondere hat eine Curve C_3, wenn sie eine Parabel im Unendlichen sechspunktig berührt, noch einen unendlich fernen Wendepunkt. Plücker hatte diese Bemerkung bereits 1835 gemacht [XXXVI, 11].

26. Daſs Steiner bei Entwickelung seiner Sätze den von Plücker bezeichneten Ausgangspunkt genommen hat, scheint aus einem Theorem hervorzugehen, das er an einer anderen Stelle mitteilt:*) „Es giebt neun Kegelschnitte, welche eine Curve C_3 dreipunktig berühren, und überdies drei Punkte A, B, C derselben enthalten; drei derselben sind reell. Es giebt 12 Kegelschnitte, — unter ihnen vier reelle —, welche auſser A, B, C drei dieser Osculationspunkte enthalten. Zu einer Gruppe von Osculationspunkten gehören unendlich viele Gruppen ABC. Jeder Kegelschnitt, der die drei reellen Osculationspunkte P, Q, R enthält, oder in einem derselben osculirt, schneidet drei derartige Punkte auf C_3 aus.“ Hiernach enthält C_3 auch Gruppen von neun Punkten, in deren jedem drei Punkte A, B, C vereinigt liegen. Eine Gerade, welche aus jeder der beiden Gruppen einen Punkt enthält, schneidet — das war Plücker's Theorem — einen Wendepunkt von C_3 aus. Steiner giebt freilich auch (S. 380) Poncelet's Theorem über C_3 fünfpunktig berührende Kegelschnitte [XXIV, 8] und kann auch von ihm aus zu dem Theorem über sechspunktig berührende Kegelschnitte übergegangen sein.

Augenscheinlich rühren die letzten Theoreme aus einer quadratischen Transformation her. Bei einer Transformation durch reciproke Radien entsteht z. B. aus einer Ellipse, die den Pol O der Transformation enthält, eine circulare Curve C_3, welche O zum isolirten Punkt hat. Ihren drei Wendetangenten entsprechen drei Krümmungskreise der Ellipse, die den Punkt O enthalten. Die Wendelinie von C_3 geht in einen Kreis über, welcher die Osculationspunkte der drei Krümmungskreise mit O verbindet. Dieses Theorem stellt Steiner (S. 377) einer ganzen Reihe von Sätzen voran. In analoger Weise werden, wenn zwei Curven C_3 und C_3' durch eine quadratische Transformation auseinander entstehen und also die Hauptpunkte A, B, C bezw. A', B', C' ihrer Ebenen enthalten, die Geraden der ersten bezw. zweiten Ebene in Kegelschnitte transformirt, welche die Punkte A', B', C' bezw. A, B, C enthalten. Aus den Wendetangenten und Wendelinien von C_3' entstehen die Kegelschnitte der oben betrachteten Gruppe. In ähnlicher Weise erweitert Steiner sein bekanntes Schlieſsungstheorem (S. 371 ff): „Es giebt entweder unendlich viele oder überhaupt keine einer Curve C_3 eingeschriebene einfache $2n$-Ecke, deren Seiten abwechselnd zwei feste Punkte P und Q von C_3 enthalten.“**) Statt der Seiten können Kegelschnitte eintreten.

*) Steiner, Sätze über Curven zweiter und dritter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 32, 1846, S. 300—304 (Ges. W., Bd. 2, S. 375—380).

**) Steiner giebt für die Fälle $n = 2, 3, 5$ das unter den Punkten P und Q bestehende Gesetz an. Er scheint das Theorem benutzt zu haben: „Gehen die Seiten eines C_3 eingeschriebenen einfachen $2n$-Ecks abwechselnd durch P und Q hindurch, so kann man zwei in P und Q n-punktig berührende Curven der Ordnung $\frac{1}{2}(n+r)$ construiren, welche C_3 noch in denselben r $(= 1, 2, 3)$ Punkten treffen.“ Hiernach erhält man be-

die drei feste Punkte von C_3 und daneben abwechselnd die Punkte P und Q enthalten (S. 373). Gehen ferner C_3' und C_4 mittels einer quadratischen Verwandtschaft aus einander hervor, so dafs C_3' zwei Hauptpunkte P' und Q' ihrer Ebene enthält und C_4 die beiden entsprechenden Hauptpunkte P, Q zu Doppelpunkten hat, so ergiebt sich sofort Steiner's Satz, dafs C_4 entweder unendlich viele oder überhaupt keine einfache $2n$-Ecke eingeschrieben werden können, deren Seiten abwechselnd die Punkte P oder Q enthalten.

Neun im Sinne Steiner's zusammengehörige Osculationspunkte enthält nun, wie Hesse hervorgehoben hat, jede der drei Gruppen, auf welche er [XXXVI, 24] die Orte sechspunktiger Berührung einer Curve C_3 mit Kegelschnitten verteilte. Jedem Dreieck eines zu der Gruppe gehörigen C_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseits können neun Kegelschnitte umschrieben werden, die in den bezeichneten Punkten dreipunktig berühren.

27. Die bisherigen Resultate Hesse's können nun dem Dualitätsprincip unterworfen werden. In einer neuen Arbeit definirt Hesse*) die Curve $\mathfrak{K}_n$ n^{ter} Klasse durch eine Gleichung n^{ten} Grades

$$f(a,\ b,\ c) = 0$$

unter den Coefficienten — Liniencoordinaten — einer an ihr gleitenden Geraden

$$ax + by + c = 0;$$

es zeigt sich dann, dafs die Tangenten von Punkten mit dem Krümmungsradius O, also die Tangenten der Spitzen von $\mathfrak{K}_n$, die Gleichung

$$\sum \pm f_{11} f_{22} f_{33} = 0$$

erfüllen. Die Curve $\mathfrak{K}_3'$ dritter Klasse, welche auf diese Weise aus einer gegebenen Curve $\mathfrak{K}_3$ entsteht, wird als Hüllcurve der Paare conjugirter Strahlen erkannt, welche drei Kegelschnitte miteinander gemein haben. Hesse stellt nun (S. 199) den vorher entwickelten Eigenschaften der Curve C_3 die entsprechenden Eigenschaften der Curve $\mathfrak{K}_3$ gegenüber. Es folgt ein Beweis für Cayley's Satz: „Schneidet eine Gerade eine Curve C_3 beständig in zwei conjugirten Punkten desselben Systems, so umhüllt sie eine Curve $\mathfrak{K}_3$", dem das duale Theorem gegenübertritt [Vergl.: XXXVI, 28]. Enthält nämlich die Gerade

kanntlich Gruppen von n bezw. — wenn C_3 zweiteilig und n gerade ist — $2n$ reellen Punkten, von denen je zwei ein Punktepaar der gesuchten Art bilden. Für den Fall $n = 3$ weist Steiner (S. 372) auf eine solche Gruppe von drei reellen Punkten P, Q, R hin. Die Bedingung, dafs QR, RP, PQ dieselben Punkte auf C_3 ausschneiden sollen, wie die Tangenten in den Punkten P, Q, R, charakterisirt in der That (S. 379) zugleich drei Osculationspunkte von Kegelschnitten, die drei Punkte A, B, C von C_3 miteinander gemein haben.

*) Hesse, Ueber Curven dritter Classe und Curven dritter Ordnung, Crelle's Journ., Bd. 38, 1849, S. 241—256 (Abh., S. 193—210).

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 + b_3 y_3 = 0$$

ein Paar conjugirter Punkte der Curve C_3

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6\pi y_1 y_2 y_3 = 0,$$

so bestehen (S. 203, 205) die drei Gleichungen:

$$p^3 + 3p^2\pi + \tfrac{1}{2} = 0,$$
$$p^3 + \tfrac{3}{2} p\Pi - \tfrac{1}{4} = 0,$$
$$b_1^3 + b_2^3 + b_3^3 + 6\Pi b_1 b_2 b_3 = 0.$$

Mit Hülfe der beiden ersten Gleichungen kann man aus π drei Werte von Π ableiten. Für jeden derselben stellt die letzte Gleichung eine der drei genannten Curven $\mathfrak{K}_3$ dar. Ihre Rückkehrtangenten schneiden sich (S. 206) zu drei und drei in den Ecken der Wendeliniendreiecke von C_3. Man übersieht hiernach sogleich, daſs eine gegebene Curve $\mathfrak{K}_3$ auch umgekehrt aus drei Curven C_3 abgeleitet werden kann, und hätte dann den Satz: „Eine Curve $\mathfrak{K}_3$ kann auf drei Arten als Ort der Geraden dargestellt werden, auf denen die Kegelschnitte eines Netzes Punktepaare einer Involution ausschneiden, oder, was dasselbe ist, als Hüllcurve der Geradenpaare dieses Netzes." Der dual gegenüberstehende Satz würde die bestimmtere von Cayley gegebene Fassung des oben angeführten Satzes von Chasles sein: „Jede Curve C_3 ist auf drei Arten der Ort der Punkte, aus denen Kegelschnitte einer Schar-Schar einer Involution angehörende Tangentenpaare empfangen." Diese nahe liegenden Schlüsse hat Hesse nicht gezogen; jedoch stellt er nach eingehender Untersuchung noch folgendes wichtige Theorem auf: „Eine Curve C_3 empfange aus einem ihrer Punkte P die Tangenten PA, PB, PC, PD. Die Geradenpaare BC, AD; CA, BD; AB, CD sind dann Paare conjugirter Tangenten dreier Curven $\mathfrak{K}_3$" (S. 210).

Hesse beschäftigt sich nun in einer letzten hier zu nennenden Arbeit*) mit der Configuration der Wendepunkte einer Curve C_3. Die Ecken der Wendelinien-Dreiecke liegen zu vier und vier auf neun Geraden verteilt, welche ihrerseits die Rückkehrtangenten einer Curve $\mathfrak{K}_3$ sind. Von diesen neun Geraden enthält offenbar jede einzelne die Berührungspunkte der von einem Wendepunkte von C_3 ausgehenden Geraden, sie gehen zu drei und drei durch zwölf Punkte hindurch.

28. Mit Hesse's Entwickelungen hängen diejenigen Cayley's, welche ebenfalls 1844 einsetzen, aufs engste zusammen. Cayley entwickelt**) zunächst den Satz: „Je zwei gegenüberliegende Ecken

*) Hesse, Eigenschaften der Wendepuncte der Curven dritter Ordnung und der Rückkehrtangenten der Curven dritter Classe, Crelle's Journ., Bd. 38, 1849, S. 257—261 (Abh., S. 211—216).

**) Cayley, Mémoire sur les courbes du troisième ordre, Liouv. Journ., Bd. 9, 1844, S. 285—293.

eines einer Curve C_3 eingeschriebenen Vierseits haben denselben Tangentialpunkt; die drei so entstehenden Tangentialpunkte liegen auf einer Geraden." Cayley benutzt die Darstellung

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+\frac{\delta}{s}=0$$

der Curve C_3, wobei $p=0$, $q=0$, $r=0$, $s=0$ die Seiten eines derartigen Vierseits sind. In sehr anschaulicher Weise wird der erwähnte Satz an den ebenen Curven C_3 einer Fläche F_3 mit vier Knotenpunkten entwickelt. Die Verbindungslinien dieser Knotenpunkte schneiden die Ecken eines auf C_3 gelegenen vollständigen Vierseits aus. Die drei anderen Geraden der Fläche, welche einer Ebene angehören, schneiden die drei Tangentialpunkte aus. Bezeichnet man zwei Paare gegenüberliegender Ecken eines C_3 eingeschriebenen Vierseits als einander entsprechend, so folgert Cayley (S. 287) den Satz: „Entsprechen zwei Punktepaare von C_3 einem und demselben dritten Punktepaare, so entsprechen sie auch einander" aus dem Theorem: „Eine Curve C_3 enthält die Punkte, von denen aus drei Punktepaare durch Strahlenpaare einer Involution projicirt werden." In der That schreitet infolge der Relation

$$\begin{aligned}&(\operatorname{tg}(BP,l)-\operatorname{tg}(C_1P,l))\,(\operatorname{tg}(CP,l)-\operatorname{tg}(A_1P,l))\,(\operatorname{tg}(AP,l)-\operatorname{tg}(B_1P,l))\\=\;&(\operatorname{tg}(B_1P,l)-\operatorname{tg}(CP,l))\,(\operatorname{tg}(C_1P,l)-\operatorname{tg}(AP,l))\,(\operatorname{tg}(A_1P,l)-\operatorname{tg}(BP,l))\end{aligned}$$

— l fällt mit der x-Axe zusammen — ein Punkt P, an dem die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1 Strahlenpaare einer Involution bestimmen, auf der Curve C_3

$$pqr-\alpha p_1q_1r_1=0$$

fort, wobei

$$p=0,\;\; p_1=0;\qquad q=0,\;\; q_1=0;\qquad r=0,\;\; r_1=0$$

die Geraden BC_1, B_1C; CA_1, C_1A; AB_1, A_1B darstellen. Aufser den Punktepaaren AA_1, BB_1, CC_1 enthält also C_3 noch die drei Schnittpunkte BC_1, B_1C; CA_1, C_1A; AB_1, A_1B. Da man in der zu Grunde gelegten metrischen Relation A und A_1, B und B_1, C und C_1 miteinander vertauschen kann, so bestimmen je zwei der zu Grunde gelegten Punktepaare ein C_3 eingeschriebenes Vierseit, wie es der erste Satz verlangt.

Nach der obigen Entwickelung kann eine Gleichung von der Form

$$\frac{\alpha}{p}+\frac{\beta}{q}+\frac{\gamma}{r}+\frac{\delta}{s}=0,$$

wobei p, q, r, s ganze lineare Functionen der Coordinaten x, y sind, auf unendlich viele Weisen in eine Gleichung von der Form

$$\frac{\alpha_1}{ep+e'q}+\frac{\beta_1}{fp+f'q}+\frac{\gamma_1}{gr+g's}+\frac{\delta_1}{hr+h's}=0$$

transformirt werden, und es entspricht dann jedes Punktepaar

$$ep + e'q = 0, \quad gr + g's = 0; \qquad fp + f'q = 0, \quad hr + h's = 0$$

dem festen Punktepaare

$$p = 0, \quad q = 0; \qquad r = 0, \quad s = 0.$$

Indem Cayley diese Transformation wirklich durchführt, zeigt sich, dafs die Verbindungslinie zweier conjugirten Punkte — welche eines jener eingeführten Paare bilden — eine Curve dritter Klasse berührt, da die Coefficienten ihrer Gleichung in eine homogene Gleichung dritten Grades eingehen.

29. In der zweiten Arbeit*) leitet nun Cayley den Satz: „Drei Kegelschnitte empfangen aus Punkten einer Curve C_3 Tangentenpaare, die sich in Involution befinden," zunächst aus dem specielleren Falle, wo die Kegelschnitte in Punktepaare ausarten, durch Einführung einer Schar-Schar in der Art ab, wie ich es oben [XXXVI, 20] andeutete. Er giebt aber sodann einen höchst eleganten directen Beweis des Satzes. Geht die homogene Gleichung

$$f_i(x, y, z) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

zweiten Grades durch die Annahme $z = 1$ in die Gleichung des i-ten der drei Kegelschnitte über, so geht die Gleichung

$$f_i(x, y, z)\, f_i(x_0, y_0, z_0) - \left(x_0 \frac{\partial f_i}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f_i}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f_i}{\partial z}\right)^2 = 0$$

durch die Annahmen $z = 1$, $z_0 = 1$ in die Gleichung

$$\psi_i(x - x_0, y - y_0) = 0$$

des von dem Punkte $(x_0, y_0, (z_0 = 1))$ ausgehenden Tangentenpaares dieses Kegelschnittes über. Aus der Identität

$$\mu_1 \psi_1 + \mu_2 \psi_2 + \mu_3 \psi_3 \equiv 0,$$

die für jeden Punkt $(x_0, y_0, (z_0 = 1))$ der betrachteten Curve besteht, ergiebt sich nun die Gleichung der Curve C_3 in Determinantenform.

Aus einer leichten Umformung des specielleren Theorems entspringt die folgende lineale Erzeugung der Curve C_3, die Grafsmann**)

---

*) Cayley, Nouvelles remarques sur les courbes du troisième ordre, Liouv. Journ., Bd. 10, 1845, S. 102—108.

**) Grafsmann, Grundzüge zu einer rein geometrischen Theorie der Curven, mit Anwendung einer rein-geometrischen Analyse, Crelle's Journ., Bd. 31, 1846, S. 111—132 (S. 125). Grafsmann beweist zunächst nur, dafs die oben erwähnte Definition stets eine Curve C_3 liefert. Erst später hat er ausgeführt, dafs jede Curve C_3 in dieser Weise erzeugt werden kann; er führt die Ergänzung darauf zurück, dafs entsprechende Seiten der Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ sich in drei Punkten $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$ der Curve schneiden, begnügt sich dann allerdings mit dem Zusatz, es sei möglich, solche einer Curve C_3 eingeschriebene Dreiecke zu finden, deren Seiten drei vorgeschriebene Punkte derselben enthalten. Vergl.: Grafsmann,

neben anderen minder anschaulichen Entstehungsweisen giebt. „Ein Punkt P beschreibt eine Curve C_3, wenn seine Verbindungslinien PA, PB, PC mit den Ecken eines Dreiecks auf den Seiten $B_1 C_1$, $C_1 A_1$, $A_1 B_1$ eines zweiten drei in einer Geraden liegende Punkte $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ ausschneiden. Die Dreiecke ABC und $A_1 B_1 C_1$ sind C_3 eingeschrieben.“ In der That werden, da $A\mathfrak{A}$, $B\mathfrak{B}$, $C\mathfrak{C}$ Paare gegenüberliegender Ecken eines vollständigen Vierseits sind, die Punktepaare AA_1, BB_1, CC_1 von jedem Punkte der bezeichneten Curve aus durch Strahlenpaare einer Involution projicirt.

XXXVII. Ebene algebraische Curven.

1. Plücker hat Euler's Versuch*), die Curven vierter Ordnung nach der Art ihres Verhaltens im Unendlichen zu classificiren, weiter ausgebildet. Die erste 1836 verfafste Arbeit**) erfuhr mannigfache Modificationen, nachdem Plücker 1839 allgemeiner diese Verhältnisse bei Curven C_n untersucht hatte, jedoch wesentlich mit Rücksicht auf Curven C_4.***) Hierbei stieg die Anzahl der zu unterscheidenden Arten unter consequenter Berücksichtigung der Unterscheidungscriterien von 135 auf 152. Versteht man allgemein unter $\Omega_\mu(x, y)$ eine Form μ^{ten} Grades, so haben die beiden Curven C_n und C_n'

$$\Omega_n + \Omega_{n-\varkappa} = 0 \; (\varkappa \geqq 2), \quad \Omega_n = 0$$

die Asymptoten miteinander gemein. Bei passender Bestimmung von $\Omega_{n-\varkappa}$ kann nun die Curve C_n' in Einzelcurven zerfallen. Sie kann zunächst die geradlinigen Asymptoten von C_n und eine Anzahl von Ellipsen enthalten, von denen jede C_n in zwei conjugirt-imaginären einfachen unendlich fernen Punkten berührt. Endlich wird C_n' für jeden m-fachen Punkt der unendlich fernen Gruppe von C_n noch eine „Asymptote m^{ter} Ordnung“ aufnehmen können, eine Curve C_m, welche nur diesen einen unendlich fernen Punkt aufweist und m unendlich nahe Asymptoten von C_n vertritt. Eine Asymptote zweiter Ordnung ist entweder eine Parabel oder ein Paar paralleler Geraden; als eine Asymptote dritter Ordnung kann man entweder eine Curve C_3

Über die Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch gerade Linien, und über geometrische Definitionen dieser Curven, Crelle's Journ., Bd. 36, 1848, S. 177—182 (S. 180). Selbstverständlich komme ich auf die wichtigen Entwickelungen Grafsmann's, welche mit der Erzeugung der algebraischen Curven durch projectivische Büschel von Curven niedrigerer Ordnung aufs genaueste zusammenhängen, an anderer Stelle in aller Ausführlichkeit zurück.

*) Vergl. a. a. O. S. 6††, Cap. 11.

**) Plücker, Énumération des courbes du quatrième ordre, d'après la nature différente de leurs branches infinies, Liouv. Journ., Bd. 1, 1836, S. 229—252 (Abh., Bd. 1, S. 302—322. Man vergleiche die von Schönflies zugefügten Anmerkungen (S. 604—607)).

***) Plücker, Theorie der algebraischen Curven, gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie, Bonn 1839 (S. 14—154).

mit unendlich fernem oder im Endlichen gelegenen zweifachen Punkte oder drei parallele Gerade einführen. Hiernach unterscheidet Plücker (S. 136 ff) bei Curven C_4 folgende acht Fälle: Die unendlich ferne Gruppe besteht 1) aus vier imaginären Punkten, 2) aus zwei reellen und zwei imaginären Punkten, 3) aus vier reellen Punkten, 4) aus einem zweifachen und zwei imaginären Punkten, 5) aus einem zweifachen und zwei reellen Punkten, 6) aus zwei zweifachen Punkten, 7) aus einem dreifachen und einem einfachen Punkte, 8) aus einem vierfachen Punkte. Auf imaginäre Asymptoten nimmt Plücker, ebenso wie Euler keine Rücksicht; er führt im ersten Falle z. B. nur eine Form auf. Jede von zwei einfachen Asymptoten kann unabhängig von der anderen zwei, drei oder vier aufeinanderfolgende unendlich ferne Punkte von C_4 enthalten. Es sind deshalb im zweiten Falle, da die imaginären Asymptoten nicht in Betracht gezogen werden, sechs Arten zu unterscheiden.

2. Im dritten Falle würden auf den ersten Anblick 15 Arten möglich sein; jedoch berührt die letzte Asymptote mindestens dreipunktig oder genau vierpunktig, wenn das gleiche von den drei ersten gilt. Von den zehn so bleibenden Arten, die Euler auch wirklich anführt (Geschlecht 15—24), schliefst Plücker noch diejenige aus, bei welcher C_4 von zwei Asymptoten im Unendlichen dreipunktig, von zwei anderen vierpunktig berührt werden würde. Es liegen hier (S. 36 u. S. 29) die beiden allgemeinen Gesetze zu Grunde: „Berührt eine Curve C_n im Unendlichen m Asymptoten n_1-, n_2-, ..., n_m-punktig, und sind einzelne der n_i von n verschieden, so ist

$$\sum_{i=1}^{m} n_i < nm - \tfrac{1}{2}(m-1)(m-2)\text{“}$$

und: „Enthält eine jede von m Asymptoten mindestens $n-m+2$ aufeinanderfolgende unendlich ferne Punkte von C_n, so kann keine andere Asymptote C_n im Unendlichen $(n-m+1)$-punktig berühren.“ Das erste Gesetz folgt sofort aus dem Jacobi'schen Schnittpunkttheorem; das zweite Theorem, welches mit dem Cayley'schen Schnittpunkttheorem in Zusammenhang steht, leitet Plücker aus der Gleichung

$$p_1 p_2 p_3 \cdots p_m (p_0 \cdot \Omega_{n-m-1} + \Omega_{n-m-\alpha}) + \Omega_r = 0 \qquad (\alpha \geq 2,\ r \leq m-2)$$

ab. Die dargestellte Curve C_n hat mit jeder der Asymptoten $p_1 = 0$, $p_2 = 0, \ldots, p_m = 0$ mindestens $n-m+2$ aufeinanderfolgende Punkte im Unendlichen gemeinsam. Von den Schnittpunkten der Asymptote $p_0 = 0$ liegen $2, 3, \ldots, n-m-1$ unendlich fern, wenn α die Werte $2, 3, \ldots, n-m-1$ annimmt. Reducirt sich $\Omega_{n-m-\alpha}(\alpha = n-m)$ auf eine Constante, so berührt die Asymptote im Unendlichen $(n-m)$-punktig, und, falls diese Constante den Wert 0

annimmt, wenigstens in $n - m + 2$ aufeinanderfolgenden Punkten. An zahlreichen Beispielen — bis zu $n = 8$ hinauf — erläutert Plücker diese Regeln. Ähnliche Verhältnisse greifen auch dann Platz, wenn mehrere der Asymptoten von C_n parallel werden oder sich ins Unendliche entfernen. Es besteht ferner ein Zusammenhang zwischen den Ordnungen, mit denen eine Curve C_n geradlinige und parabolische Asymptoten oder allgemeiner Asymptoten m^{ter} Ordnung im Unendlichen osculirt.

3. Im vierten Falle unterscheidet Plücker, indem er auf die imaginären Asymptoten keine Rücksicht nimmt, zwölf verschiedene Arten, von denen Euler nur sieben angeführt hatte. C_4 besitzt entweder eine parabolische Asymptote oder einen unendlich fernen Doppelpunkt mit imaginären, reellen oder zusammenfallenden Tangenten. Im zweiten dieser Unterfälle entstehen, da jeder der beiden Curvenzweige seine Tangente berühren oder osculiren kann, drei Arten. Im dritten Unterfalle kann es sich um eine unendlich ferne Spitze oder um zwei sich berührende oder osculirende Curvenzweige handeln, die in beiden Fällen reell oder imaginär sein können. Noch specieller kann schliefslich einer von den zwei oder drei aufeinanderfolgenden Doppelpunkten in eine Spitze übergehen, wobei man dann eine unendlich ferne Spitze zweiter oder dritter Art erhält. Drei von den so entstehenden zwölf Arten hat Plücker erst 1839 hinzugefügt.

Bezüglich eines zweifachen Punktes ihrer unendlich fernen Gruppe mufs sich nun C_4 auf eine der zwölf beschriebenen Arten verhalten, während sie zu zwei reellen unendlich fernen Punkten eine der sechs erwähnten Beziehungen haben kann. Doch ist jede Combination der einen Art immer nur mit einigen Zusammenstellungen der anderen Art verträglich. Plücker gelangt infolge der im vierten Falle gemachten Unterscheidungen 1839 zu 47 Arten des fünften Falles, während er 1836 nur deren 39 aufgeführt hatte. Ferner wird eine zu Unrecht in die erste Bearbeitung aufgenommene Form gegen eine andere in ihr übersehene Form vertauscht. Bereits Euler hatte zwei von den $42 = 7 \cdot 6$ Arten, die nach seinem Einteilungsprincip im fünften Falle auftreten würden, ausgeschlossen und ausdrücklich hervorgehoben, es möchten bei genauerer Untersuchung sich noch andere Arten als unmöglich erweisen. Plücker's Angabe von 1836, nach der noch acht der Euler'schen Arten auszuschliefsen sein würden, bedarf nach Schönflies' Bemerkung einer Modification. 1836 führt Plücker ferner 35, 1839 hingegen 38 Arten von Curven C_4 auf, deren unendlich ferne Punktgruppe aus zwei zweifachen Punkten besteht. Hierbei ist jedoch, wie Schönflies hervorhebt, eine Curvenform übersehen, die einen unendlich fernen Knotenpunkt mit zwei osculirenden Asymptoten besitzt, während sich in dem anderen unendlich fernen Punkte zwei Zweige berühren. Die entsprechende Form mit zwei im Endlichen liegenden zweifachen Punkten führt Plücker an anderer Stelle (S. 192, Nr. XII) auf.

Ein dreifacher Punkt der unendlich fernen Gruppe von C_4 kann entweder ein Wendepunkt oder ein zweifacher Punkt mit unendlich ferner Tangente oder endlich ein dreifacher Punkt von C_4 sein. Im ersten Unterfalle erhält man als Asymptote dritter Ordnung eine semicubische Parabel, bei welcher die Ordnung der Osculation zwischen den Grenzen sechs und elf schwankt, während gleichzeitig die geradlinige Asymptote zwei-, drei- oder vierpunktig im Unendlichen berühren kann. Von den acht verschiedenen Arten, die Plücker bei einer vorbereitenden Überlegung ins Auge gefafst hatte (S. 114), zählt er bei der definitiven Classification nur drei Hauptarten auf, wobei er allein auf die geradlinige Asymptote Rücksicht nimmt. Insgesamt giebt Plücker 1839 hier 24 Arten an, denen er noch 15 Arten — gegenüber 12 Arten der ersten Einteilung — von Curven C_4 hinzugesellt, deren unendlich ferne Gruppe ein vierfacher Punkt ist. Wiederholt nimmt Plücker hierbei noch auf Euler Bezug, der diese letzten Fälle sehr summarisch behandelt hatte.

4. Ein folgender Abschnitt des Buches bietet eine mit ziemlich primitiven Mitteln durchgeführte Discussion der mehrfachen Punkte einer Curve C_n. Insbesondere giebt Plücker Regeln, nach welchen man Spitzen erster, zweiter und dritter Art unter sich und von Punkten unterscheiden kann, in denen sich zwei Curvenzweige berühren, bezw. osculiren. Dann folgt eine weniger ausführliche Besprechung der dreifachen Punkte. Nachdem hierauf die bei einer Curve C_4 möglichen Paare von zweifachen Punkten ausführlich erörtert sind — was eine Verallgemeinerung des Einteilungsgeschäftes ist — stellt Plücker Curven C_4 mit drei zweifachen Punkten (S. 194) in der Form

$$\alpha q^2 r^2 + \beta r^2 p^2 + \gamma p^2 q^2 + pqru = 0$$

dar, wobei $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ die Verbindungslinien der zweifachen Punkte sind, $u = 0$ eine Gerade bedeutet. Da jeder der drei zweifachen Punkte imaginäre, reelle oder zusammenfallende Tangenten aufweisen kann, unterscheidet Plücker zehn verschiedene Fälle. Er entwickelt dann (S. 196) den Satz: „Die sechs Tangenten einer rationalen Curve C_4 in ihren drei Doppelpunkten berühren in jedem Falle einen Kegelschnitt." Ein specieller von Plücker hervorgehobener Fall ist der von Chasles [XXIV, 5] aus Transversalensätzen, von Steiner [XXVII, 11] mit Hülfe einer quadratischen Verwandtschaft abgeleitete Satz: „Bei einer Curve C_4 mit drei Rückkehrpunkten haben die Tangenten der letzteren einen Punkt miteinander gemein." Man kann mit Hülfe einer quadratischen Verwandtschaft*) auch leicht den allgemeinen Satz ableiten, ebenso wie

) Solche Beweise giebt Salmon in der zweiten Auflage seines oben [S. 429] genannten Buches (S. 319—320), während er in der ersten Auflage den Beweis Plücker's reproducirt. Beide Sätze hängen mit dem aus

das zweite Theorem: „Die sechs Tangenten von C_4, welche die Doppelpunkte enthalten, aber aufserhalb derselben berühren, sind Tangenten eines Kegelschnitts," welches Cayley rechnend entwickelt hat.*)

5. Unter den Curven C_4 vom Geschlecht 1 sind insbesondere die bicircularen Curven, welche die unendlich fernen Kreispunkte zu Doppelpunkten haben, hervorzuheben. Viele der von alters her untersuchten Curven, die Pascal'sche Schnecke, das Cartesische Oval, die Lemniscate gehören dieser grofsen Klasse an, auf deren Besonderheit zuerst Chasles hingewiesen hat.**) Zunächst finde hier Steiner's einfache Construction der Tangente einer allgemeinen Lemniscate Erwähnung.***) Jeder Punkt der Lemniscate halbirt die Strecke, welche auf seiner Tangente die auf seinen Brennstrahlen in den Brennpunkten selbst errichteten Lote abschneiden. Bicirculare Curven C_4 zeichnen sich ferner durch einfache Brennpunkteigenschaften aus.

6. Um bei algebraischen Curven zur Definition der Brennpunkte zu gelangen, legt Plücker†) für eine Curve n^{ter} Klasse $\mathfrak{K}_n$ eine Gleichung n^{ten} Grades

$$f(v, w) = 0$$

in Liniencoordinaten v, w zu Grunde, d. h. er betrachtet $\mathfrak{K}_n$ als Hüllcurve der Geradenschar

$$y + vx + w = 0.$$

Eine Gerade mit den Coordinaten v und w schneidet auf der y-Axe die Strecke $-w$ ab, für ihren Neigungswinkel φ gegen die x-Axe — das Coordinatensystem der x, y ist rechtwinklig — hat man die Beziehung

$$-v = \operatorname{tg} \varphi.$$

Poncelet'schen Transversalensätzen folgenden Theorem zusammen: „Die sechs Tangenten eines Kegelschnittes, welche die Ecken eines Dreieckes enthalten, schneiden die Seiten desselben in sechs Punkten eines zweiten Kegelschnittes." (Vergl. a. a. O. S. 161**, S. 271.)

*) Cayley, Note on a family of curves of the fourth order, Camb. Dubl. Journ., Bd. 5 (9), 1850, S. 148—152 (S. 150). Cayley giebt noch den Satz: „Liegen drei von den sechs Berührungspunkten der Tangenten zweiter Art in einer Geraden, so gilt dasselbe von den drei anderen." Cayley geht von der Mannigfaltigkeit der Kegelschnitte aus, die drei Punkte enthalten und eine Gerade berühren. Der Ort ihrer Mittelpunkte — Cayley bezieht sich auf Hearn, anstatt auf Gergonne [IV, 2] — oder auch ihrer Pole nach einer beliebigen Geraden ist eine unicursale Curve C_4.

**) Chasles, Aperçu historique, S. 250 (Fufsnote 2).

***) Steiner, Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate, Crelle's Journ., Bd. 14, 1835, S. 80—82 (Ges. W., Bd. 2, S. 19—23).

†) Plücker, Über solche Puncte, die bei Curven einer höhern Ordnung als der zweiten den Brennpuncten der Kegelschnitte entsprechen, Crelle's Journ., Bd. 10, 1833, S. 84—91 (Abh., Bd. 1, S. 290-297).

Die Neigungswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ der Tangenten, welche $\mathfrak{K}_n$ aus dem Punkte x_0, y_0 empfängt, werden offenbar mit Hülfe der Gleichung

$$\psi(v) \equiv f(v, -y_0 - vx_0) \equiv g_n + g_{n-1}v + g_{n-2}v^2 + \cdots + g_0 v^n = 0$$

festgelegt. $g_1, g_2, \ldots, g_n$ sind dabei symmetrische Functionen der Gröſsen $-\operatorname{tg}\varphi_1, -\operatorname{tg}\varphi_2, \ldots, -\operatorname{tg}\varphi_n$. Als Brennpunkt einer Curve $\mathfrak{K}_n$ bezeichnet nun Plücker einen Punkt (x_0, y_0), aus dem sie zwei Tangenten mit den Neigungswinkeln $\pm\psi = \pm \operatorname{arctg}\sqrt{-1}$ empfängt. Dieser Bedingung genügen die Schnittpunkte der beiden Curven C_n' und C_n'':

$$g_0 - g_2 + g_4 - g_6 \pm \cdots = 0,$$
$$g_1 - g_3 + g_5 - g_7 \pm \cdots = 0.$$

Da die Gleichung besteht

$$\operatorname{tg}(\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n) = \frac{g_1 - g_3 + g_5 - g_7 \pm \cdots}{g_0 - g_2 + g_4 - g_6 \pm \cdots},$$

so senden Punkte von C_n' und C_n'' Tangentengruppen aus, die bezw. den Bedingungen genügen (k' und k'' sind ganze Zahlen):

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \frac{2k'+1}{2}\pi, \quad \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = k''\pi.$$

Für den speciellen Winkel ψ gilt aber die Beziehung

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \operatorname{tg}\psi.$$

Die eingeführten Brennpunkte sind deshalb vom Coordinatensystem unabhängig. Die beiden trigonometrischen Beziehungen definiren, wie auch die Coordinatenaxen liegen, zwei die Brennpunkte — deren Anzahl also n^2 ist — enthaltende Curven C_n. Hält man das Coordinatensystem fest, so wird die einzelne Curve durch die Gleichung

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_n = \text{const.}$$

dargestellt.

Plücker spricht nochmals (S. 291) ausdrücklich eine sehr merkwürdige Anschauung aus, zu der er bei der analogen Behandlung der Brennpunkte des Kegelschnittes gelangt war.*) Die Aussage, daſs die Tangenten eines Kegelschnittes C_2, die von einem Brennpunkte F ausgehen, mit einer beliebigen Geraden die Winkel $\pm\psi$ einschlieſsen, kommt mit Poncelet's Definition überein, nach welcher ein Brennpunkt ein (ideeller) Schnittpunkt zweier Tangenten ist, die C_2 mit einem um F beschriebenen Kreise gemeinsam hat, oder das Centrum einer zwischen beiden Curven obwaltenden Homologie-Beziehung. Plücker folgert aus seiner Definition das Resultat, daſs zwei conjugirt-imaginäre, von F ausgehende Tangenten durch zwei in F sich senkrecht schneidende Gerade harmonisch getrennt werden; dies ist nur ein anderer

*) Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831, S. 64.

Ausdruck für das de la Hire'sche Resultat [VI, 3], aus dem Poncelet seine Definition ableitete [XVIII, 2]. Aus der Anschauung heraus, dafs bei der Umdrehung eines festen Winkels (ψ) um seinen Scheitel beide Schenkel die ganze Ebene überdecken, zieht nun Plücker die Folgerung, dafs „jede durch den Brennpunkt gehende (imaginäre) gerade Linie eine Tangente des Kegelschnittes ist". Auch 1835*) und 1847**) ist Plücker auf diese Äufserung zurückgekommen, bei der „ihn das Bewufstsein der analytischen und geometrischen Continuität, das ihn sonst nie verliefs, im Stiche liefs," wie es Schönflies ausdrückt.***)

7. Salmon gab Plücker's Definition die uns jetzt geläufige Wendung†): „Die Brennpunkte einer Curve $\mathfrak{K}_n$ sind die Schnittpunkte der Tangentengruppen, welche sie aus den unendlich fernen Kreispunkten empfängt; eine reelle Curve $\mathfrak{K}_n$ besitzt deshalb n reelle und $n(n-1)$ imaginäre Brennpunkte." Er entwickelt aus dieser Anschauung mehrere Sätze über die Brennpunkte circularer Curven C_3 und bicircularer Curven C_4, welche er in Gemeinschaft mit Hart gefunden hatte. Vier der n^2 Brennpunkte von $\mathfrak{K}_n$ sind, wenn sie die beiden unendlich fernen Kreispunkte aufnimmt, in dem Schnittpunkte der ihnen zukommenden Tangenten vereinigt. Jede von ihnen enthält ferner noch $n-2$ Punkte, deren jeder zwei Brennpunkte des allgemeinen Falles aufnimmt; endlich weist $\mathfrak{K}_n$ noch $n-2$ reelle und $(n-2)(n-3)$ imaginäre einfache Brennpunkte auf, von deren jedem zwei Tangenten von $\mathfrak{K}_n$ ausgehen, welche die unendlich fernen Kreispunkte enthalten, aber nicht in ihnen selbst berühren. Bei einer circularen Curve C_3 — sechster Klasse — liegen die 16 einfachen Brennpunkte zu vier und vier auf Kreisen verteilt (S. 173). Im Sinne des Continuitätsgesetzes ist das Theorem offenbar eine Umformung des bereits erwähnten Satzes [XXXVI, 15]: „Die Gruppe der Tangenten, welche eine Curve C_3 aus einem sie durchlaufenden Punkte empfängt, bleibt zu sich selbst projectivisch." Auf vier Arten kann man also den Tangenten, welche eine circulare Curve C_3 aus einem unendlich fernen Kreispunkte erhält, diejenigen projectivisch zuordnen, welche von dem anderen ausgehen. Die vier Brennpunkte, in deren jedem

*) System der analytischen Geometrie (S. 102).

) a. a. O. S. 395† (Nr. 13) (Abh., Bd. 1, S. 428). In ganz analoger Weise gelangt Plücker zu der merkwürdigen Anschauung, dafs eine Fläche F_2 aus jeder Tangente eines ihrer Focalkegelschnitte unendlich viele imaginäre Tangentialebenen empfange, da eine von einer solchen Tangente ausgehende Tangentialebene mit irgend einer reellen Ebene den Winkel ψ einschliefst [Vergl. S. 418].

***) Man vergleiche hierzu die Anmerkungen von Schönflies (Plücker's Abh., Bd. 1, S. 603—604).

†) Salmon, Higher plane curves, Dublin 1852, S. 119 ff. Man vergleiche auch die oben [S. 438*] genannte Abhandlung aus dem Jahre 1851.

zwei entsprechende Tangenten solcher Gruppen sich schneiden, gehören einem der vier Hart'schen Kreise an. Salmon hebt ausdrücklich hervor, daſs das Bestreben, diesen Satz naturgemäſs zu erweisen, ihn und Hart zu dem Theorem vom Doppelverhältnis der allgemeinen Curve C_3 geführt habe (Fuſsnote zu S. 151).

Bei einer Transformation durch reciproke Radien gehen offenbar die einfachen Brennpunkte einer circularen Curve C_3 in einfache Brennpunkte einer bicircularen Curve C_4 über. Auch eine bicirculare Curve C_4 besitzt mithin 16 einfache Brennpunkte, die zu vier und vier Kreisen angehören. Sind A, B, C drei Brennpunkte desselben Kreises und α, β, γ passend gewählte Constante, so besteht (S. 125) für jeden Punkt P von C_4 die Relation

$$\alpha PA + \beta PB + \gamma PC = 0.$$

Ein naturgemäſser Beweis dieses ziemlich umständlich abgeleiteten Theorems*) ergiebt sich bekanntlich, wenn man die bicirculare Curve C_4 als Hüllcurve eines Kreisbüschels zweiter Ordnung darstellt.**) Diese metrische Darstellung ist, wenn imaginäre Bestimmungsstücke nicht zugelassen werden, nur bei zweiteiligen bicircularen Curven C_4 möglich; bei einzügigen Curven der genannten Art verteilen sich die vier reellen Brennpunkte auf verschiedene der Hart-schen Kreise. Salmon erörtert dies an der circularen Curve C_3, in welche die bicirculare Curve C_4 unter der Annahme $\alpha \pm \beta \pm \gamma = 0$ übergeht (S. 172 ff.). Artet eine bicirculare Curve C_4 in eine Curve mit zwei unendlich fernen Spitzen, also in ein Cartesisches Oval aus, so geht noch einer ihrer vier reellen einfachen Brennpunkte in den reellen Schnittpunkt der Spitzentangenten über. Die drei anderen reellen Brennpunkte liegen auf einer Geraden, in welche einer der Hart'schen Kreise ausartet. Bereits Chasles***) hat in

---

) Nach Salmon's Angabe [vergl. die erste auf S. 438 genannte Schrift] hat Hart seinen Satz aus dem Umstande abgeleitet, daſs bei einer durch die Gleichung $\alpha PA + \beta PB + \gamma PC = 0$ dargestellten Curve sich noch ein vierter Punkt D ergiebt, der für einen der Punkte A, B, C eintreten kann und mit denselben auf einem Kreise liegt.

**) Vergl. z. B. Salmon-Fiedler, Ebene Curven, Leipzig 1873, S. 304 ff.

***) Chasles, Sur les ovales de Descartes, ou lignes aplanétiques, Aperçu historique, Note 21, S. 350—353 (S. 352). Chasles giebt zunächst die oben [XXV, 3] erwähnten Quetelet'schen Sätze über das Cartesische Oval wieder und schlieſst daran folgende Umformung seiner ursprünglichen Definition: „Durchlaufen die Punkte P_1 und P_2 zwei Kreise derart, daſs P_1P_2 beständig einen Punkt O der Verbindungslinie ihrer Mittelpunkte M_1, M_2 enthält, so beschreibt der Schnittpunkt P von M_1P_1 und M_2P_2 ein Cartesisches Oval.“ Dieselbe findet sich übrigens schon in der Abhandlung: Sur les lignes dirimantes à deux foyers conjugués, Quet. Corr., Bd. 5, 1829, S. 116—120 (S. 118). Zum Schluſs hebt Chasles nochmals hervor, daſs die Curve zwei unendlich ferne Doppelpunkte besitze, also von der achten Klasse sei. Nach einer Angabe von Salmon (Higher plane curves, Dublin 1852, Fuſsnote zu S. 203) hat erst Cayley darauf aufmerksam gemacht,

der That darauf aufmerksam gemacht, dafs zu den beiden ursprünglichen Brennpunkten F_1 und F_2 eines Cartesischen Ovals, auf welche sich seine definirende Gleichung

$$\alpha_1 PF_1 + \alpha_2 PF_2 = 2a$$

bezieht, noch ein dritter Brennpunkt hinzutritt, der für einen der ersteren eintreten kann. Salmon reproducirt einen von Cayley herrührenden Beweis und giebt (S. 124) für den dritten Brennpunkt F_3 die Relation

$$F_1 F_2 (\alpha_1^2 F_1 F_3 + \alpha_2^2 F_2 F_3) = 4a^2.$$

8. Die beiden Tangenten, welche eine Curve $\mathfrak{K}_n$ mit unendlich ferner $(n-1)$-facher Tangente aus den beiden Kreispunkten empfängt, beschreiben, wenn $\mathfrak{K}_n$ eine Schar mit den Grundtangenten $t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}$ durchläuft, projectivische Strahlenbüschel; der einzige Brennpunkt von $\mathfrak{K}_n$ beschreibt also einen Kreis. Derselbe enthält den Brennpunkt jeder Curve $\mathfrak{K}_{n-1}$ mit $(n-2)$-facher unendlich ferner Tangente, welche irgend $2n-2$ der Geraden $t_1, t_2, \ldots, t_{2n-1}$ berührt. Eine solche Curve $\mathfrak{K}_{n-1}$ bildet mit dem unendlich fernen Punkte der letzten Grundtangente eine Curve der Schar. Die $2n$ Kreise, welche in der beschriebenen Art zu je $2n-1$ von $2n$ festen Geraden gehören, haben einen Punkt miteinander gemein, den Brennpunkt der eindeutig bestimmten Curve $\mathfrak{K}_n$ mit $(n-1)$-facher Tangente, welche jene $2n$ Gerade berührt. Durch diese — allerdings erst 1871 — von Clifford*) angestellte Betrachtung entsteht folgende Reihe von Theoremen: „Die vier den Dreiecken eines Vierseits umschriebenen Kreise haben einen Punkt miteinander gemein. Die fünf den Vierseiten eines Fünfseits auf diese Art entsprechenden Punkte gehören einem Kreise an. Die sechs Fünfseite eines Sechsseits ergeben auf die beschriebene Weise sechs Kreise mit einem gemeinsamen Punkte u. s. w." Bereits Lambert [VI, 7] hatte den einem Dreieck umschriebenen Kreis als Ort der Brennpunkte der ihm eingeschriebenen Parabeln erkannt. Poncelet und Steiner hatten diesen Satz mit den Mitteln der synthetischen Geometrie auf naturgemäfse Art erwiesen und sofort dann den ersten Schritt des obigen Theorems gethan [XXVIII, 2]. Das auf das Fünfseit bezügliche Teiltheorem ist in folgendem Satze Miquel's**) enthalten: „Die Endpunkte jeder Seite eines einfachen

---

dafs die Curve die unendlich fernen Kreispunkte zu Spitzen hat, demnach nur noch von der sechsten Klasse ist. Vergl. Cayley, Addition au Mémoire sur quelques transmutations des lignes courbes, inséré dans le volume précédent, Liouv. Journ., Bd. 15, 1850, S. 351—356 (S. 354). Der von Salmon aufgenommene Beweis für die Existenz des dritten Brennpunktes des Cartesischen Ovals findet sich am Schlusse der Abhandlung.

*) Clifford, Synthetic proof of Miquel's theorem, Messenger of Math., Bd. 5, 1871, S. 124—141 (Abschn. III u. IV).

**) Miquel, Mémoire de géométrie (Deuxième partie), Liouv. Journ., Bd. 10, 1845, S. 347—350. Miquel giebt (S. 349) einen Satz für die Kugel, aus welchem der oben angeführte durch stereographische Projection hervorgeht.

Fünfecks verbinde man mit dem Schnittpunkte der ihr angrenzenden Seiten durch einen Kreis, zwei einander folgende dieser Kreise schneiden sich, aufser in einer Ecke des Fünfecks, noch in einem zweiten Punkte. Die fünf so entstehenden Punkte gehören einem Kreise an."

9. Poncelet hatte sich eingehend [XXI, 1] mit den Beziehungen zwischen zwei in Bezug auf einen Kegelschnitt polarreciproken Curven C_n und C_m beschäftigt. Die Zahl m gab zugleich die Anzahl der Tangenten, welche C_n aus einem Punkte empfängt, und war daher im allgemeinen gleich $n(n-1)$. Poncelet hob ferner hervor, dafs die Polarcurve P_{n-1} eines beliebigen Punktes P nach C_n einen jeden zweifachen Punkt von C_n enthält. Jeder eigentliche Knotenpunkt, wie auch jeder isolirte Punkt vermindert deshalb augenscheinlich die Anzahl der von P ausgehenden Tangenten um zwei Einheiten. Über den Einflufs einer Spitze von C_n ist Poncelet weniger im Klaren, doch bemerkt er, dafs auch sie die Ordnungszahl von C_m um wenigstens zwei Einheiten herabmindert.*) Poncelet spricht ferner aus, dafs aus den Doppeltangenten und Wendetangenten von C_n Doppelpunkte und Spitzen von C_m sich ergeben, und dafs mit Hülfe der so entstandenen zweifachen Punkte es sich erkläre, dafs ihr C_n und nicht eine Curve von der Ordnung $m(m-1)$ polar gegenüberstehe.

Die vollständige Ausbildung dieses Gedankenganges ist Plücker's Verdienst. Zunächst bemerkt Plücker, dafs man zu einer Aufklärung der Frage nicht gelangt mit der Annahme, dafs jeder zweifache Punkt der einen von zwei polarreciproken Curven C_n und C_m die Ordnungszahl der anderen nur um zwei Einheiten vermindert. Hierzu müfste die Anzahl der zweifachen Punkte bei einer von beiden Curven die überhaupt mögliche Grenze $[\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ bezw. $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)]$ überschreiten.**) 1835 erzielte Plücker***) einen wesentlichen Fortschritt mit der Erkenntnis, dafs die Polare P_{n-1} eines beliebigen Punktes P in einem zweifachen Punkte von C_n mit getrennten Tangenten eine von beiden verschiedene Gerade berührt, hingegen in jedem Rückkehrpunkt von C_n auch die Tangente mit C_n gemein hat (S. 243—247). Besitzt also C_n δ Doppelpunkte und $\varkappa$ Spitzen, so ist

$$m = n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa.$$

Eine von Doppelpunkten und Spitzen freie Curve C_n besitzt nun $3n(n-2)$ Wendepunkte. Eine gleiche Anzahl von Rückkehrpunkten

*) Hiernach ist das oben angeführte zu corrigiren. Es mufs [S. 170, Z. 10 v. o.] heifsen „eine Spitze um wenigstens zwei Einheiten".

**) Plücker, Analytisch-geometrische Entwicklungen, Bd. 2, Essen 1831 (Fufsnote zu S. 288). Plücker hebt das Bedenken an dem Specialfalle der Curven C_3 hervor.

***) Plücker, System der analytischen Geometrie etc., Berlin 1835.

besitzt C_m und daneben eben so viele (τ) Doppelpunkte, als C_n Doppeltangenten aufweist; es gilt also die Formel

$$n = n(n-1)\big(n(n-1)-1\big) - 9n(n-2) - 2\tau,$$

nach welcher eine allgemeine (von Doppelpunkten und Spitzen freie) Curve C_n $\tau = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ Doppeltangenten besitzt. Mit diesem wichtigen Resultat schlofs Plücker sein System der analytischen Geometrie ab (S. 290—292).*)

10. In seinem 1839**) erschienenen Buche begründet Plücker zunächst durch Stetigkeitsbetrachtungen ausführlicher, dafs in zwei bezüglich eines Kegelschnittes polarreciproken Curven nicht blofs Doppelpunkte und Doppeltangenten, sondern auch Wendepunkte und Spitzen einander entsprechen. Er läfst einen Curvenbogen durch eine drehende Bewegung seiner Tangente entstehen, mit der sich ein Fortschreiten des Drehpunktes auf der Tangente verbindet. Beim Überschreiten eines Wendepunktes ändert nur die drehende Bewegung der Tangente, hingegen beim Überschreiten einer Spitze nur die fortschreitende Bewegung des Punktes ihre Richtung, so dafs zwischen beiden Singularitäten vollkommene Dualität besteht. Einer Spitze zweiter Art, in der bei der drehenden und der fortschreitenden Bewegung die Richtung sich umkehrt, steht nach dieser Anschauung eine Singularität gleicher Art dual gegenüber. Plücker läfst zur Erläuterung dieser Verhältnisse zunächst Polygonzüge an Stelle der Curvenbogen eintreten (S. 202 ff). Die Anzahl der Wendepunkte verringert sich aber durch das Auftreten von Doppelpunkten und Spitzen. Jeder Doppelpunkt absorbirt sechs, jede Spitze acht Wendepunkte, denn (Fufsnote zu S. 208): „Was in der 300. Nummer des Systems zunächst für den Fall der Curven dritter Ordnung bewiesen worden ist, gilt offenbar bei Curven jeder beliebigen Ordnung.“ Hiernach bestehen (S. 211) zwischen Ordnungszahl n und Klassenzahl m einer Curve und den Anzahlen δ, $\varkappa$, τ, ι ihrer Doppelpunkte, Spitzen, Doppeltangenten und Wendetangenten die Beziehungen, welche als Plücker'sche Gleichungen eine grofse Rolle in der Wissenschaft spielen:

$$\begin{aligned} m &= n(n-1) - 2\delta - 3\varkappa, \\ n &= m(m-1) - 2\tau - 3\iota, \\ \iota &= 3n(n-2) - 6\delta - 8\varkappa, \\ \varkappa &= 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota. \end{aligned}$$

*) Dieses Resultat findet sich ohne Beweis auch schon angegeben in der Notiz: Plücker, Solution d'une question fondamentale concernant la théorie générale des courbes, Crelle's Journ., Bd. 12, 1834, S. 105—108 (Abh., Bd. 1, S. 298—301). Plücker hebt hier Poncelet's erste Ansätze zur Lösung der Aufgabe ausdrücklich hervor. Nur scheint es ihm entgangen zu sein, dafs Poncelet die Dualität zwischen Wendepunkten und Rückkehrpunkten bereits hervorgehoben hatte.

**) Plücker, Theorie der algebraischen Curven, Bonn 1839.

Diese Gleichungen, von denen jede die Folge der drei übrigen ist, formt Plücker in mannigfacher Weise um. Es möge die Beziehung

$$m - n = \frac{1}{3}(\iota - \varkappa)$$

hier Platz finden und die Formel, welche die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve C_n mit δ Doppelpunkten und $\varkappa$ Spitzen angiebt:

$$\tau = \frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9) - (2\delta + 3\varkappa)(n(n-1)-6) + 2\delta(\delta-1) + \frac{9}{2}\varkappa(\varkappa-1) + 6\delta\varkappa.$$

Eine Reihe von Zahlenbeispielen für seine Gleichungen ($n \leqq m \leqq 10$) stellt Plücker tabellarisch zusammen (S. 214). Eine 1837 erschienene Abhandlung enthält vorläufige Angaben über diese wichtigen Formeln*). Plücker bestrebte sich, auch Singularitäten höherer Art in seinen Gleichungen zu berücksichtigen. Beispielsweise wird gezeigt, dafs ein α-facher Punkt mit voneinander verschiedenen Tangenten genau wie der Inbegriff von $\frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ einfachen Doppelpunkten zu behandeln ist, das heifst, die Klassenzahl um $\alpha(\alpha-1)$ Einheiten vermindert und $6 \cdot \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)$ Wendepunkte absorbirt. Die oben eingeführte Hülfscurve [XXXVI, 16], welche mit C_n die Asymptoten gemein hat und ihre Wendepunkte ausschneidet, enthält (S. 224) den genannten Punkt $(3\alpha-4)$-fach und berührt in ihm die C_n zukommenden Tangenten. Für den Fall $\alpha = 2$ ist hierin ein ausdrücklicher Beweis dafür enthalten, dafs ein Doppelpunkt sechs Wendepunkte absorbirt. Eine entsprechende Entwickelung für die Spitze erster Art hat Plücker nicht gegeben, obwohl er über den Einflufs von Spitzen zweiter und dritter Art auf die Anzahl der Wendepunkte sich Rechenschaft zu geben sucht.

Auch aus dem Verhalten der Hesse'schen Curve kann man den Einflufs eines Doppelpunktes oder einer Spitze auf die Anzahl der Wendepunkte ermitteln. Die Hesse'sche Curve enthält jeden Doppelpunkt von C_n ebenfalls zweifach und berührt auch seine Tangenten. Eine Spitze von C_n ist ein dreifacher Punkt der Hesse'schen Curve; die Tangente der Spitze zählt als Tangente der Hesse'schen Curve zweifach. Ersteres hat Hesse aus folgendem Theorem geschlossen: „Wenn eine homogene Form n^{ten} Grades von x, y, z an einer Stelle zugleich mit ihren ersten Differentialquotienten verschwindet, so gilt dasselbe von ihrer Hesse'schen Determinante; das Verhältnis der Werte, welche entsprechende zweite Differentialquotienten der beiden Functionen an der betreffenden Stelle annehmen, ist constant**)." Beide Sätze finden sich in einer etwas früher liegenden Abhandlung von Cayley.***)

*) Plücker, Note sur les points singuliers des Courbes, Liouv. Journ., Bd. 2, 1837, S. 11—15 (Abh., Bd. 1, S. 334—338).

**) Auszug zweier Schreiben des Prof. Hesse an den Herrn Prof. Jacobi und eines Schreibens des Prof. Jacobi an Herrn Prof. Hesse, Crelle's Journ., Bd. 40, 1850, S. 316—318 (Abh., S. 257—261 (S. 258)).

***) Cayley, Recherches sur l'élimination, et sur la théorie des courbes, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 30—45 (S. 43).

11. Die Definition der synthetischen Geometrie für die Hesse'sche Curve findet sich in einer kurzen, aber inhaltreichen Note von Steiner.*) Nach Anführung der Plücker'schen Gleichungen, die jedoch merkwürdiger Weise nicht auf ihren Autor zurückgeführt werden, folgt zunächst der Satz über Polarenveloppen: „Die m^{te} Polare einer Curve C_n nach einem Punkte, welcher eine Curve C_r durchläuft, umhüllt eine Curve $C_{r(r+2m-3)(n-m)}$.“ Hieran schliefst sich der „allgemein bekannte“ Plücker'sche Satz von der gemischten Polare [XXVI, 9] und, ausdrücklich auf ihn zurückgeführt, das neue Theorem: „Hat die m^{te} Polare eines Punktes P nach einer Curve C_n einen Doppelpunkt Q, so enthält die $(n-m-1)^{te}$ Polare von Q nach C_n den Punkt P zweifach.“ Steiner stellt nun weiter die Sätze auf: „Eine Curve $C_{3(n-2)^2}$ beschreibt der Punkt, dessen erste Polare nach C_n einen Doppelpunkt besitzt; der Ort dieses Doppelpunktes selbst ist eine Curve $C_{3(n-2)}$, welche die Wendepunkte von C_n ausschneidet.“ Steiner hebt hervor, dafs die ersten Polaren aller Punkte der Ebene ein Netz bilden, dafs ferner ein Büschel sich in P berührender ersten Polaren eine Curve enthält, die P zum Doppelpunkt hat. Die Curve $C_{3(n-2)}$ kann also als Ort der Punkte definirt werden, in denen zwei Curven C_{n-1}, die aus zwei festen Büscheln erster Polaren entnommen sind, sich berühren. Man erhält bekanntlich, von dieser Definition ausgehend, sehr leicht zwei projectivische Büschel von Curven der Ordnung $2n-3$, deren Erzeugnis aus der Hesse'schen Curve, der ersten Polarcurve eines Hülfspunktes und aus einer Hülfsgeraden besteht.**) Fafst man die Hesse'sche Curve als Ort des Punktes auf, dessen Polarkegelschnitt nach C_n in zwei Gerade zerfällt, so erkennt man in ihren Schnittpunkten mit C_n sofort die Wendepunkte dieser Curve. Als unmittelbaren Ausdruck dieser Definition erkannte Salmon***) die Gleichung der Hesse'schen Curve, nachdem er entwickelt hatte, dafs der Polarkegelschnitt eines Wendepunktes die Wendetangente enthält und also zerfällt. Für den Fall der Curven C_3 hatte schon Hesse seine Curve als Ort der Doppelpunkte der Geradenpaare erkannt, die in einem Kegelschnitt-Netze auftreten; aber er hob nicht hervor, dafs das Netz sich aus den Polarkegelschnitten von C_3 zusammensetzt.

*) Steiner, Allgemeine Eigenschaften der algebraischen Curven, Berliner Ber., 1848, S. 310—316 (Crelle's Journ., Bd. 47, 1854, S. 1—6, Ges. W., Bd. 2, S. 493—500).

**) Steiner giebt (S. 500) den allgemeineren Satz: „Ein Punkt, in dem sich zwei, festen Büscheln entnommene Curven C_p und C_q berühren, beschreibt eine Curve $C_{2p+2q-3}$“. Offenbar als specielle Fälle dieser Curve führt er einmal die Hesse'sche Curve einer Grundcurve, dann die Jacobi'sche Curve eines Netzes von Curven C_n mit $\frac{1}{2}n(n+3)-2$ gemeinsamen Punkten ein (S. 499). Ebenda findet sich die Angabe, dafs in einem Büschel $3(n-1)^2$ Curven mit Doppelpunkt vorkommen.

***) Salmon, Higher plane curves, Dublin 1852, S. 71.

12. Nachdem es ihm gelungen war, die Anzahl der Doppeltangenten einer Curve C_n festzustellen, war bei Plücker der Wunsch natürlich, die Curven C_4, bei denen Doppeltangenten, an Zahl 28, zuerst auftreten, in dieser Beziehung zu untersuchen. Versteht man unter p_1, q_1, r_1, s_1 Formen ersten Grades, unter f_2 eine Form zweiten Grades, so stellt die Gleichung

$$p_1 q_1 r_1 s_1 - \alpha f_2^2 = 0$$

eine Curve C_4 mit den vier Doppeltangenten $p_1 = 0$, $q_1 = 0$, $r_1 = 0$, $s_1 = 0$ dar, deren Berührungspunkte dem Kegelschnitt $f_2 = 0$ angehören. Da die Form vierzehn willkürliche Constante enthält, kann jede Curve C_4 in der beschriebenen Art dargestellt werden. Plücker schlofs nun*), dafs die Berührungspunkte von irgend drei beliebigen der 28 Tangenten mit denen einer vierten Tangente auf einem Kegelschnitt liegen. Späteren Untersuchungen blieb es vorbehalten, die aus diesem zu weit gefafsten Theorem entspringenden Irrtümer zu beseitigen. Hingegen behauptete einen dauerden Platz die Überlegung, durch welche Plücker die Existenz von Curven C_4 mit 28 reellen Doppeltangenten nachwies, von denen auch eine jede in reellen Punkten C_4 berührt (S. 247). Die Curve

$$(y^2 - x^2)(x-1)\left(x - \tfrac{3}{2}\right) - 2\,(y^2 + x(x-2))^2 + k = 0$$

geht für $k = 0$ in eine Curve mit drei Knotenpunkten über und besteht deshalb für sehr kleine k von einem bestimmten Vorzeichen aus vier getrennten Zügen, von denen jeder den anderen ausschliefst, und, weil sich die vierteilige Curve im ganzen derjenigen mit drei Knotenpunkten nahe anschliefst, notwendig eine durch zwei Wendepunkte ermöglichte Einbiegung besitzt. Augenscheinlich ergeben sich also 24 Doppeltangenten, von denen jede zwei verschiedene Züge von C_4 berührt, und vier, von denen jede einen der vier Züge zweimal berührt.

13. Oben [XXIV, 9, 12] sind Poncelet's metrische Definitionen für die Polargerade und die erste Polare eines Punktes nach einer Curve C_n geschildert worden. In analoger Weise hat lange vor der Veröffentlichung der zweiten, allerdings schon 1830 entstandenen, Poncelet'schen Entwickelung die ganze Kette der Polaren eines Punktes nach einer Curve C_n oder einer Oberfläche F_n Grafsmann**) definirt. Auf einer Geraden l kann man aus einer ihrer Gruppen $A_1 A_2 \ldots A_n$ einen harmonischen Mittelpunkt erster Ordnung, zwei harmonische Mittelpunkte zweiter Ordnung, drei harmonische Mittelpunkte dritter Ordnung, ... bezüglich eines Punktes S von l mit Hülfe der Gleichungen (für P) ableiten

*) Plücker, Algebraische Curven, Bonn 1839 (S. 228ff.).

**) Grafsmann, Theorie der Centralen, Crelle's Journ., Bd. 24, 1842, S. 262—282, S. 372—380; Bd. 25, 1843, S. 57—73.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{PA_k}{SA_k}=0,\quad \sum_{k>l\geq 1}^{n\geq k>l}\sum\frac{PA_k\cdot PA_l}{SA_k\cdot SA_l}=0,$$

$$\sum_{k>l>m\geq 1}^{n\geq k>l>m}\sum\sum\frac{PA_k\cdot PA_l\cdot PA_m}{SA_k\cdot SA_l\cdot SA_m}=0,\ldots$$

Offenbar hat man das Theorem: „Ist R ein harmonischer Mittelpunkt m^{ter} Ordnung von $A_1A_2\ldots A_n$ bezüglich Q, so ist zugleich Q ein harmonischer Mittelpunkt $(n-m)^{\text{ter}}$ Ordnung von $A_1A_2\ldots A_n$ bezüglich R." Wenn jetzt die Gerade l um S gedreht wird, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ihre Schnittpunkte mit einer Fläche F_n sind, so beschreiben die harmonischen Mittelpunkte m^{ter} Ordnung eine Fläche S_m, die m^{te} Centrale von S bezüglich F_n. Versteht man unter $f_k(x,y,z)$ eine homogene Function k^{ten} Grades, so besitzt (S. 270, 276) die Fläche F_n:

$$\sum_{k=0}^{n}f_k(x,y,z)=0$$

für den Anfangspunkt S der Coordinaten als m^{te} Centrale die Fläche S_m:

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{m_k}{n_k}f_k(x,y,z)=0,\qquad (m=1,2,\ldots,n-1)$$

wobei m_k und n_k k^{te} Binomialcoefficienten bedeuten. In der Reihe der Flächen $F_n, S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_1$ ist S_m die m^{te} Centrale nicht nur von F_n, sondern auch von $S_{n-1}, S_{n-2}, \ldots, S_{m+1}$. Aus der Definition folgt augenscheinlich: „Gehört Q der m^{ten} Centrale von P an, so liegt P umgekehrt auf der $(n-m)^{\text{ten}}$ Centrale von Q." Grafsmann spricht seinen Satz für den Fall $m=1$ aus, der auf ganz analoge Weise bei ebenen Curven in der 1866 veröffentlichten Arbeit von Poncelet erledigt wird. Genau nach der oben geschilderten Schlufsweise Poncelet's entwickelt Grafsmann, dafs die $(n-1)^{\text{ten}}$ Centralen einer Curve C_n nach Punkten einer Geraden einen Büschel bilden, dafs folglich eine Gerade die erste Centrale von $(n-1)^2$ Punkten, den Grundpunkten des zugehörigen Büschels $(n-1)^{\text{ter}}$ Centralen ist. Entsprechend bilden die $(n-1)^{\text{ten}}$ Centralen einer Fläche F_n nach den Punkten einer Ebene einen Bündel; die Ebene ist die erste Centralebene jedes der $(n-1)^3$ Grundpunkte des Bündels. Rückt der Punkt S auf der z-Axe ins Unendliche hinaus, so gilt nunmehr für einen Punkt P der ersten, zweiten, dritten ... Centrale die Gleichung:

$$\sum_{k=1}^{n}PA_k=0,\quad \sum_{k>l\geq 1}^{n\geq k>l}\sum PA_k\cdot PA_l=0,$$

$$\sum_{k>l>m\geq 1}^{n\geq k>l>m}\sum\sum PA_k\cdot PA_l\cdot PA_m=0,\cdots.$$

Die so entstehenden zur Richtung der z-Achse gehörigen Centralen besitzen (S. 374) für die Fläche F_n:

$$\sum_{k=0}^{n} f_{n-k}(x, y) z^k = 0$$

die Gleichungen

$$\sum_{l=0}^{m} (n-l)_{m-l} f_{m-l}(x, y) z^l = 0. \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Im Falle der Ebene kommt man offenbar auf Cramer's „diamètres curvilignes". [XXIV, 1] Unterscheiden sich die Gleichungen von F_n und F'_n nur in Gliedern, deren Dimension geringer ist als $n - m$, so haben beide für jeden unendlich fernen Punkt dieselbe erste, zweite, ..., m^{te} Centrale, sie sind in Bezug auf die unendlich ferne Ebene concentral im m^{ten} Grade (S. 376). Durch collineare Transformation entstehen aus ihnen Flächen, die in Bezug auf eine Ebene im Endlichen concentral im m^{ten} Grade sind.

14. Grafsmann benutzt nun (S. 377 ff.) folgende beiden Sätze: „Von den m harmonischen Mittelpunkten m^{ter} Ordnung einer Gruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$ nach einem ihrer Punkte A_i ist der eine mit A_i identisch; die anderen sind harmonische Mittelpunkte $(m-1)^{ter}$ Ordnung von $A_1 A_2 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n$ nach A_i" und „Enthält eine Gruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$ einen ihrer harmonischen Mittelpunkte m^{ter} Ordnung hinsichtlich eines Punktes S, so ist der betreffende Punkt A_i zugleich ein harmonischer Mittelpunkt m^{ter} Ordnung der nach Ausscheidung von A_i verbleibenden Gruppe $A_1 \ldots A_{i-1} A_{i+1} \ldots A_n$ bezüglich S." Da eine Gruppe von r Punkten mit der Gruppe ihrer r^{ten} harmonischen Mittelpunkte für jeden Punkt ihres Trägers zusammenfällt, so sind insbesondere etwaige mehrfache Punkte einer Gruppe $A_1 A_2 \ldots A_n$ harmonische Mittelpunkte $(n-1)^{ter}$ Ordnung derselben bezüglich irgend eines Punktes ihres Trägers. Hiernach sind bei einer Fläche F_n die $(n-1)^{te}$ Centrale und die erste Polare eines Punktes S, andererseits die erste Centrale und die Polarebene von S identisch. Entsprechendes gilt bei Curven C_n. Man hat z. B. die Sätze: „Jeder der Punkte, in welchen die Polargerade eines Punktes S nach einer Curve C_3 dieselbe schneidet, trennt mit S zusammen zwei Punkte der Curve harmonisch" und „Jeder Punkt des Polarkegelschnittes einer Curve C_3 nach einem ihr angehörigen Punkte S trennt zwei Punkte der Curve von S harmonisch." Mit dem ersten Theorem in Zusammenhang steht auch folgender von Cayley*) gelegentlich aufgestellter Satz: „Man schneide eine jede von n Geraden einer Ebene mit

*) Cayley, Sur quelques théorèmes de la géométrie de position. Suite du mémoire tome XXXI p. 213, Crelle's Journ., Bd. 34, 1847, S. 270—275 (S. 274).

der Polargeraden eines festen Punktes S bezüglich der aus den $n-1$ übrigen Geraden bestehenden Curve C_{n-1}. Die n so entstandenen Punkte liegen alsdann auf der Polargeraden des Punktes S bezüglich der aus den n Strahlen zusammengesetzten Curve C_n." Bei mehreren von Plücker gegebenen Wendepunkteigenschaften der Curven C_3 kam die nach dem Falle $n = 3$ dieses Satzes entstandene Gerade in Betracht [XXXVI, 17]. Im dritten Teile seiner Abhandlung giebt Grafsmann zunächst eine Polarentheorie für Flächen n^{ter} Klasse und deutet dann zum Schlufs auf eine Verallgemeinerung der Definitionsgleichung für harmonische Mittelpunkte hin, mit deren Hülfe man neue einer Fläche F_n bezüglich eines Poles zugeordnete Flächen definiren kann.

15. Als Jacobi'schen Satz bezeichnet man bekanntlich folgende Erweiterung des oben [XXVI, 3] angegebenen Cramer-Plücker'schen Theorems: „$\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ von den Schnittpunkten zweier Curven C_n und C_m sind $(n \geq m)$ durch die $nm - \frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ übrigen eindeutig bestimmt." Jacobi*) beweist denselben (S. 336 ff.) durch folgende Betrachtung: Sind $f_n(x, y) = 0$ und $f_m(x, y) = 0$ die Gleichungen zweier Curven C_n und C_m, und ist $g_{n-m}(x, y)$ eine beliebige Form $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades, so ist

$$f_n(x, y) + g_{n-m}(x, y) f_m(x, y) \equiv g_n(x, y) = 0$$

die Gleichung einer Curve C_n', welche die mn Schnittpunkte von C_m und C_n enthält. Bezeichnet man jetzt $\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$ mit $\varphi(r)$, so kann man $\varphi(n-m)$ von den $\varphi(n) - 1$ wesentlichen willkürlichen Constanten, die $g_n(x, y)$ an sich enthält, bei passender Bestimmung der Constanten von g_{n-m} vernichten. Die mn Schnittpunkte von C_m und C_n werden daher von einer Curve C_n mit nur $\varphi(n) - \varphi(n-m) - 1$ willkürlichen Constanten ausgeschnitten;

$$\varphi(m-3) = mn - \varphi(n) + \varphi(n-m) + 1$$

von den mn Schnittpunkten beider Curven sind deshalb durch die übrigen bestimmt. Zwischen den mn Schnittpunkten der beiden Curven C_m und C_n bestanden nach einer vorangegangenen Arbeit Jacobi's**) die Gleichungen

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta}{\frac{\partial f_n}{\partial x}\frac{\partial f_m}{\partial y} - \frac{\partial f_m}{\partial x}\frac{\partial f_n}{\partial y}} = 0, \qquad (\alpha+\beta \leq m+n-3)$$

wobei die Summation sich über alle mn Schnittpunkte erstreckt.

---

*) Jacobi, De relationibus, quae locum habere debent inter puncta intersectionis duarum curvarum vel trium superficierum algebraicarum dati ordinis, simul cum enodatione paradoxi algebraici, Crelle's Journ., Bd. 15, 1836, S. 285—308 (Ges. W., Bd. 3, 1884, S. 329—354).

**) Jacobi, Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum inter duas variabiles propositarum, Crelle's Journal, Bd. 14, 1835, S. 281—288 (Ges. W., Bd. 3, S. 285—294).

In dem an sich wichtigsten Teile der Entwickelung, auf den jedoch hier nicht einzugehen ist, weist nun Jacobi nach, dafs alle diese Gleichungen, wenn C_m vorliegt, aus $\varphi(m-3)$ von ihnen abgeleitet werden können, wie es der Jacobi'sche Satz verlangt.

16. In analoger Weise stellt (S. 344ff.) die Gleichung

$$f_n(x, y, z) + g_{n-m}(x, y, z) f_m(x, y, z) \equiv g_n(x, y, z) = 0,$$

wenn $g_{n-m}(x, y, z)$ eine willkürliche Form $(n-m)^{\text{ten}}$ Grades ist, eine Fläche G_n dar, welche die Schnittcurve zweier Flächen F_n und F_m oder $f_n(x, y, z) = 0$ und $f_m(x, y, z) = 0$ enthält $(n \geq m)$. Wenn man unter $\psi(r)$ die Zahl $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$ versteht, so kann man bei passender Wahl von g_{n-m} die Anzahl der wesentlichen willkürlichen Constanten von g_n auf $\psi(n) - \psi(n-m) - 1$ reduciren. Die gleiche Anzahl von Punkten auf F_m genügt deshalb, um ihre Schnittcurve mit einer Fläche F_n festzulegen. Man sieht also: „Alle Flächen F_n, welche $\psi(n) - \psi(n-m) - 1$ Punkte einer Fläche F_m enthalten, schneiden dieselbe in einer festen Raumcurve R_{mn}".

17. Die Gleichung

$$f_n(x, y, z) + g_{n-m}(x, y, z) f_m(x, y, z) + g_{n-l}(x, y, z) f_l(x, y, z) \equiv g_n(x, y, z) = 0$$

stellt, wie man auch die willkürlichen ganzen Functionen $g_{n-m}(x, y, z)$ und $g_{n-l}(x, y, z)$ vom $(n-m)^{\text{ten}}$ und $(n-l)^{\text{ten}}$ Grade bestimmt, eine Fläche G_n dar, welche die nml Schnittpunkte der Flächen F_n, F_m, F_l oder $f_n(x, y, z) = 0$, $f_m(x, y, z) = 0$, $f_l(x, y, z) = 0$ enthält $(n \geq m \geq l)$. Die Function $g_n(x, y, z)$ weist, wenn $n < m + l$ ist, nach passender Bestimmung von g_{n-m} und g_{n-l} noch

$$\chi_1 = \psi(n) - \psi(n-m) - \psi(n-l) - 1$$

wesentliche willkürliche Constante auf. Wenn $n \geq m + l$ ist, besitzt die Function $g_n(x, y, z)$ jedoch noch

$$\chi_2 = \psi(n) - \psi(n-m) - \psi(n-l) + \psi(n-m-l) - 1$$

wesentliche willkürliche Constante, da man jetzt für das Flächennetz die Darstellung

$$f_n(x, y, z) + (g_{n-m}(x, y, z) + g_{n-m-l}(x, y, z) f_l(x, y, z)) f_m(x, y, z) + (g_{n-l}(x, y, z) - g_{n-m-l}(x, y, z) f_m(x, y, z)) f_l(x, y, z) \equiv g_n(x, y, z) = 0$$

geben kann, wobei $g_{n-m}, g_{n-l}, g_{n-m-l}$ willkürliche ganze Functionen $(n-m)^{\text{ten}}$, $(n-l)^{\text{ten}}$, $(n-m-l)^{\text{ten}}$ Grades sind. Man folgert also: „Eine Fläche G_n enthält alle nml Schnittpunkte dreier Flächen F_n, F_m, F_l $(n \geq m \geq l)$, sobald nur χ_1 oder χ_2 erste dieser Punkte ihr angehören." Jacobi erörtert auch im Raume den Zusammenhang der Schnittpunktsätze mit einem Systeme von Gleichungen:

$$\sum \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{R} = 0, \qquad (\alpha+\beta+\gamma \leq m+n+l-4)$$

wobei R die Functionaldeterminante der drei Functionen f_n, f_m, f_l ist, die Summation aber über sämtliche Schnittpunkte der drei Flächen $f_n = 0$, $f_m = 0$, $f_l = 0$ zu erstrecken ist.

18. Eine geometrische Wendung hat den obigen Sätzen Plücker*) gegeben, der sie unabhängig von Jacobi entwickelte und mit dem Satze von den notwendigen Punkten beim Büschel algebraischer Curven bezw. Bündel algebraischer Flächen in Verbindung brachte [XXVI, 3]. Wenn nämlich $\varphi(n) - \varphi(n-m) - 1$ von $\varphi(n) - 2$ einen Büschel von Curven C_n festlegenden Punkten einer Curve C_m angehören, so besteht aus C_m und der Curve C_{n-m}, welche die aufserhalb C_m gelegenen $\varphi(n-m) - 1$ Grundpunkte enthält, eine Curve C_n, welche neben den gegebenen $\varphi(n) - 2$ Punkten auch die zugehörigen $\varphi(n-3)$ notwendigen Punkte aufnehmen mufs; unter diesen befinden sich $\varphi(m-3)$ oder $mn - \varphi(n) + \varphi(n-m) + 1$ Punkte von C_m, gemäfs Jacobi's Satz. Ganz entsprechend folgt der zweite soeben angeführte Satz Jacobi's.

Den dritten Jacobi'schen Satz erweist Plücker durch folgende Betrachtung: Auf der Schnittcurve der Flächen F_m und F_l nehme man $\psi(n) - \psi(n-m) - \psi(n-l) - 1$ Punkte willkürlich an, auf den Flächen F_m und F_l, aber aufserhalb ihrer Schnittcurve, $\psi(n-l) - 1$ bezw. $\psi(n-m) - 1$ Punkte, welche zwei Flächen G_{n-l} und G_{n-m} festlegen. Die Flächen-Aggregate $F_m G_{n-m}$ und $F_l G_{n-l}$ gehören dann einem durch $\psi(n) - 3$ Grundpunkte festgelegten Bündel an, in welchen man zwei beliebige die erste Punktgruppe enthaltende Flächen F_n' und F_n'' aufnehmen kann. Eine Fläche F_n hat also mit zwei Flächen F_m und F_l nml feste Punkte gemein, sobald sie $\psi(n) - \psi(n-m) - \psi(n-l) - 1$ erste Punkte ihrer Schnittcurve enthält. Plücker teilt freilich dieses Resultat ohne die Beschränkung $n < m + l$ mit. Erst 1846 giebt er das richtige Resultat für den Fall $n \geqq m + l$, wobei er den oben gegebenen Beweis von Jacobi reproducirt.**) Doch läfst sich auch der geschilderte Beweis modificiren, gemäfs einer Bemerkung, die Salmon bei der

*) Plücker, Théorèmes généraux concernant les équations d'un degré quelconque entre un nombre quelconque d'inconnues, Crelle's Journ., Bd. 16, 1837, S. 47—57 (Abh., Bd. 1, S. 323—333).

) Plücker, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf, (1846), 1852. Einleitende Betrachtungen, § 3, das Zählen der Constanten, S. 36—46 (Abh., Bd 1, S. 607—610). Analoge Correcturen sind an den Sätzen von 1837 über die Wertgruppen anzubringen, für welche vier ganze Functionen von vier Veränderlichen zugleich verschwinden. Plücker spricht in der betreffenden Arbeit übrigens anstatt von Schnittpunkten algebraischer Flächen von den Wertetripeln, für welche drei ganze Functionen dreier Veränderlichen zugleich verschwinden und wendet eine analoge Umschreibung auch für den Fall der Ebene an. Dafs er den 1837 gemachten Fehler 1846 corrigirt habe, hebt Plücker auf eine Äufserung Cayley's hin in der oben [S. 272*] angeführten Arbeit nochmals hervor (Abh., Bd. 1, Fufsnote zu S. 415).

Begründung des Cayley'schen Schnittpunkttheorems der Ebene gemacht hat.

Auf den Fall der Ebene kam Plücker bereits 1839 zurück.*) Er verweist (S. 12) hier nachdrücklich auf seine oben [XXVI, 3] angeführten Sätze über notwendige Punkte beim Büschel algebraischer ebenen Curven und beim Bündel algebraischer Flächen und bemerkt, dafs Jacobi nur Euler nenne. Seine eigene 1837 veröffentlichte Arbeit sei übrigens gleichzeitig mit der besprochenen Arbeit Jacobi's in Crelle's Händen gewesen, obwohl in einem späteren Bande des Crelle'schen Journals erschienen; in der That ist die Arbeit vom 5ten März 1836 datirt.

19. Cayley**) gewann das nach ihm benannte Schnittpunkttheorem als eine Frucht von Jacobi's Entwickelungen. Der Inbegriff von ebenen Curven C_n, welche die ml Schnittpunkte zweier Curven C_m und C_l oder $f_m(x, y) = 0$ und $f_l(x, y) = 0$ enthalten, kann $(n \geqq m \geqq l)$ in der Form dargestellt werden:

$$f_n(x, y) \equiv g_{n-m}(x, y) f_m(x, y) + g_{n-l}(x, y) f_l(x, y) = 0;$$

$g_{n-m}(x, y)$ und $g_{n-l}(x, y)$ sind hierbei willkürliche Formen $(n - m)^{\text{ten}}$ und $(n - l)^{\text{ten}}$ Grades. Ist jetzt $n \geqq m + l$, so hat man bei Einführung einer neuen willkürlichen Function $g_{n-m-l}(x, y)$ für das betrachtete Curvennetz die Darstellung:

$$\begin{aligned} f_n(x, y) \equiv & (g_{n-m}(x, y) + g_{n-m-l}(x, y) f_l(x, y)) f_m(x, y) \\ & + (g_{n-l}(x, y) - g_{n-m-l}(x, y) f_m(x, y)) f_l(x, y), \end{aligned}$$

$f_n(x, y)$ enthält daher (einschliefslich einer multiplicativen Constante) entweder $(n < m + l)$

$$\varphi(n - m) + \varphi(n - l) = \varphi(n) - ml + \varphi(m + l - n - 3)$$

oder $(n \geqq m + l)$

$$\varphi(n - m) + \varphi(n - l) - \varphi(n - l - m) = \varphi(n) - ml$$

willkürliche Constante. Daraus folgt — da $\varphi(-1)$ und $\varphi(-2)$ verschwinden — Cayley's Satz: „Ist $m + l - 3 \geqq n \geqq m \geqq l$, so enthält eine Curve C_n im allgemeinen sämtliche Schnittpunkte zweier Curven C_m und C_l, sobald sie $ml - \varphi(m + l - n - 3)$ derselben aufweist. Hingegen sind die ml Schnittpunkte für Curven voneinander unabhängig, deren Ordnungszahlen den Wert $m + l - 3$ übersteigen.“ Hiernach enthält z. B. eine Curve C_n entweder alle $(m + 1)(n - m + 2)$ Punkte, in denen zwei Gruppen C_{m+1} und C_{n-m+2} von $m + 1$ bezw. $n - m + 2$ Geraden sich durchschneiden,

*) Plücker, Algebraische Curven, Bonn 1839 (Einleitende Bemerkungen, S. 1—13).

**) Cayley, On the intersection of curves, Camb. Journ., Bd. 3, 1843, S. 211—213.

oder sie enthält mehr als einen von diesen Punkten nicht. Wenn alle Geraden der zweiten Gruppe sich ins Unendliche entfernen, so entsteht Plücker's oben [XXXVII, 2] erwähnter Asymptotensatz.

20. Es leuchtet ein — und Salmon*) hat eine solche Überlegung durchgeführt —, wie man nach Plücker's Vorgang einen geometrischen Beweis des Theorems zu gestalten hat. Man wähle $\varphi(n) - \varphi(n-l) - \varphi(n-m) = lm - \varphi(m+l-n-3)$ Schnittpunkte zweier Curven C_m und C_l zusammen mit $\varphi(n-l) - 1$ bezw. $\varphi(n-m) - 1$ Punkten von C_m und C_l, welche Curven C_{n-l} und C_{n-m} festlegen, zu Grundpunkten eines Büschels von Curven C_n; offenbar kommen die zerfallenden Curven $C_m C_{n-m}$ und $C_l C_{n-l}$ in demselben vor. Unter den Punkten, welche alle Curven des Büschels noch miteinander gemein haben, befinden sich auch die $\varphi(m+l-n-3)$ letzten Schnittpunkte von C_m und C_l. Jede die erste Punktgruppe enthaltende Curve C_n nimmt dieselben auf, da sie in einen solchen Büschel eingeordnet werden kann. Diese Schlufsweise gilt aber, wie Salmon ausdrücklich hervorhebt, nur, wenn $n < m + l$ ist. Denn die durch $\varphi(n-l) - 1$ Punkte von C_m bestimmte Curve C_{n-l} zerfällt, sobald $n - l \geqq m$ ist, in C_m und eine Curve C_{n-l-m}. Hiermit ist aber auch der Grund aufgedeckt, aus dem der letzte Jacobi'sche Flächensatz verschiedene Formen hat, je nachdem $n < m + l$ oder $n \geqq m + l$ ist. Man würde Plücker's geometrischen Beweis für den zweiten Fall in folgender Weise umwandeln müssen. Man verbinde zwei Gruppen von $\psi(n-l) - \psi(n-l-m) - 1$ bezw. $\psi(n-m) - \psi(n-m-l) - 1$ Punkten, die man auf zwei Flächen F_m und F_l aufserhalb ihrer Schnittcurve angenommen hat, mit $\psi(n-l-m)$ festen Punkten aufserhalb F_m und F_l durch Flächen F_{n-m} und F_{n-l}. Die genannten Punkte bestimmen dann mit $p = \psi(n) - \psi(n-l) - \psi(n-m) + \psi(n-m-l) - 1$ Punkten der Schnittcurve von F_m und F_l einen Bündel von Flächen F_n, in dem die zerfallenden Flächen $F_l F_{n-l}$ und $F_m F_{n-m}$ auftreten; unter den $n^3 - \psi(n) + 3$ übrigen Grundpunkten des Bündels finden sich noch $lmn - \psi(n) + \psi(n-l) + \psi(n-m) - \psi(n-l-m) + 1$ oder $lmn - p$ Punkte der Schnittcurve von F_l und F_m. Sie sind allein durch die p ersten Punkte bestimmt, da man irgend zwei sie enthaltende Flächen F_n und F_n' in einen Bündel der beschriebenen Art einordnen kann.

21. Die weitere an sich selbstverständliche Ausführung des Jacobi'schen Gedankens gab Cayley 1847.**) Versteht man unter $\chi(n)$ die Anzahl der Terme in einer ganzen Function n^{ten} Grades von m Veränderlichen, setzt man $\chi(o) = 1$ und $\chi(-r) = 0$, so enthält die Function

*) Salmon, Higher plane curves, Dublin 1852 (S. 24).

**) Cayley, On the theory of involution in geometry, Camb. Dubl. Journ., Bd. 2 (6), 1847, S. 52—61.

$$g_1 f_1 + g_2 f_2 + \cdots + g_\alpha f_\alpha$$

wenn $f_1, f_2, \ldots, f_\alpha$ gegebene Functionen $n_1^{\text{ten}}, n_2^{\text{ten}}, \ldots, n_\alpha^{\text{ten}}$ Grades, $g_1, g_2, \ldots, g_\alpha$ aber willkürliche Functionen $(n - n_1)^{\text{ten}}, (n - n_2)^{\text{ten}}, \ldots, (n - n_\alpha)^{\text{ten}}$ Grades der m Veränderlichen sind, folgende Anzahl willkürlicher Constanten:

$$\begin{aligned}\chi(n - n_1) + \chi(n - n_2) + \cdots + \chi(n - n_\alpha) - \chi(n - n_1 - n_2)\\ - \chi(n - n_1 - n_3) - \cdots - \chi(n - n_{\alpha-1} - n_\alpha)\\ + \chi(n - n_1 - n_2 - n_3) + \cdots + \chi(n - n_{\alpha-2} - n_{\alpha-1} - n_\alpha)\\ \pm \cdots + (-1)^{\alpha-1}\chi(n - n_1 - n_2 - \cdots - n_\alpha).\end{aligned}$$

Als specielle Folgerung wird angeführt: „Die $n_1 n_2 n_3$ Schnittpunkte dreier Flächen $F_{n_1}, F_{n_2}, F_{n_3}$ sind für jede Fläche, deren Ordnungszahl gröfser als $n_1 + n_2 + n_3 - 4$ ist, voneinander unabhängig. Hingegen sind für eine Fläche F_n, deren Ordnungszahl kleiner als $n_1 + n_2 + n_3 - 3$ ist, einzelne der $n_1 n_2 n_3$ Punkte von den anderen abhängig. Man hat aber mehrere Unterfälle zu unterscheiden."

Die synthetische Geometrie machte sich vorzugsweise die Schlufsweise Plücker's zu eigen, wobei jedoch etwas schwankendes insofern in die Resultate eindrang, als z. B. die $\varphi(n) - 2$ gegebene Punkte enthaltenden Curven C_n nicht immer einen Büschel, sondern unter besonderen Umständen ein lineares System zweiter oder höherer Stufe bilden. Diese Unsicherheit übertrug sich natürlich auf die abgeleiteten Sätze. Viele wichtigere Resultate freilich hingen nicht direct von dem Jacobi'schen Satze ab, sondern von dem Theorem: „Liegen ml von den mn Schnittpunkten zweier Curven C_m und C_n auf einer Curve C_l, so gehören die übrigen einer Curve C_{n-l} an," von dem der Fall $m = n$ bereits von Gergonne aufgestellt war [XXVI, 1], während den auf eine Gruppe von m Geraden bezüglichen Satz Poncelet erwähnt hatte [XXIV, 9]. Man pflegte diesen Satz nach einer Schlufsweise, die Salmon*) auf den Gergonne'schen Fall anwendete, aus dem Jacobi'schen Schnittpunkttheorem abzuleiten. Späteren Untersuchungen blieb die Erkenntnis vorbehalten, dafs man zuerst den Restpunktsatz in der erwähnten Form erweisen könne, und hiervon ausgehend, die Gültigkeitsgrenzen des Jacobi'schen Theorems zu untersuchen habe. Sowohl die synthetische, wie auch die analytische Geometrie hatten mit der Vertiefung der geschilderten Beweismethoden vollauf zu thun.

*) Salmon, Higher plane curves, S. 22.

Autoren-Register.

Bei einigen Autoren ist auf Lehrsätze oder Gebilde hingewiesen, die nach denselben benannt sind. Der Übersichtlichkeit wegen sind in einigen Fällen nicht alle die Stellen aufgeführt, in welchem ein Autor nur in dem genannten Zusammenhange erwähnt wird. Genau gekennzeichnet sind diejenigen Noten, welche ausführliche Angaben über selbständige Druckwerke enthalten.

Abkürzungen.

Bei jedem auf einen Band einer Zeitschrift bezüglichen Citat ist neben der Bandzahl (Bd.) die Jahreszahl seines Haupttitels angeführt. Dieselbe wird auch in den Zeitangaben des Referats benutzt. Auf die Datirung einzelner Hefte von Zeitschriftenbänden oder der Abhandlungen selbst bin ich nur in einigen Fällen eingegangen. Hinweise auf Abhandlungen, die sich entweder auf die Seiten (S.) oder die Artikelnummern (Nr.) beziehen, sind in runde, Verweisungen auf das Referat selbst in eckige Klammern eingeschlossen worden.

Die Bezeichnungen: (ebene) Curve C_n, Raumcurve R_n, Fläche F_n, G_n, ... beziehen sich auf Gebilde n^{ter} Ordnung Gebilde n^{ter} Klasse werden in entsprechender Weise mit deutschen Buchstaben bezeichnet. Wegen des an einigen Stellen gebrauchten Zeichens [St.] vergl. man: S. 65**.

Abh. d. Ak. z. Berlin = Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Berlin.

Abh. der Götting. Ak. = Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Göttingen.

Acta ac. sc. imp. Petropolitanae, pro anno = Acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae pro anno ..., St. Petersburg.

Annali di Mat. = Annali di matematica pura ed applicata, Rom.

Ann. de l'éc. norm. = Annales scientifiques de l'école normale supérieure, Paris.

Ann. d. sc. del regno Lombardo-Veneto = Annali delle scienze del regno Lombardo-Veneto, Padua.

Astronomische Nachrichten von Schumacher = Astronomische Nachrichten, herausgegeben von Schumacher, Altona.

Atti dell' J. R. Ist. Veneto = Atti delle adunanze dell' i. r. istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, Venedig.

Berliner Ber. = Bericht über die zur Bekanntmachung geeigneten Verhandlungen der Königl. Preufs. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre ..., Berlin.

Bull. de Férussac = Bulletin des sciences mathématiques, physiques, et chimiques, 1re section du bulletin universel, publié ... sous la direction de ... Férussac, Paris.

Bull. de l'Ac. de Bruxelles = Bulletins de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles.

Bull. de la soc. mathém. de France = Bulletin de la société mathématique de France, Paris.

Camb. Dubl. Journ., Bd. n ($n + 4$) = The Cambridge and Dublin mathematical journal, vol. n (being vol. $n + 4$ of the Cambridge mathematical journal), Cambridge.

Camb. Journ. = The Cambridge mathematical journal, Cambridge.

Cambridge Trans. = Transactions of the Cambridge philosophical society, Cambridge.

Comptes rendus = Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris.

Crelle's Journ. = Journal für die reine und angewandte Mathematik, begründet 1826 von Crelle, Berlin.

Corr. de l'éc. pol. = Correspondance sur l'école polytechnique, à l'usage des élèves de cette école, herausgegeben von Hachette: Bd. 1, 1804—1808, Paris 1813 (in zweiter Auflage); Bd. 2, 1809—1813, Paris 1813; Bd. 3, 1814—1816, Paris 1816.

Gerg. Ann. = Annales de mathématiques pures et appliquées, herausgegeben von Gergonne (Bd. 1 u. 2 von Gergonne und Lavarnède), Nismes.

Grunert's Arch. = Archiv der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten, begründet 1841 von Grunert, Greifswald (Bd. = Theil)

Hist. de l'Ac., Berlin = Histoire de l'académie royale des sciences et belles-lettres, Berlin.

Hist. de l'Ac., Paris = Histoire de l'académie royale des sciences, Paris.

Journ. de l'éc. pol. = Journal de l'école polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cet établissement, Paris.

Isis = Isis von Oken, Jena.

Leipz. Abh. = Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, Leipzig.

Leipz. Ber. = Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Leipzig.

Liouv. Journ. = Journal de mathématiques pures et appliquées, begründet 1836 von Liouville, Paris.

Mém. de l'Ac. d. sc. de Turin = Mémoires de l'académie royale des sciences de Turin, Turin.

Mém. de l'Ac. d. St. Pétersbourg = Mémoires de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg, St. Petersburg.

Mém. de l'Ac. depuis 1666—1699 = Mémoires de l'académie royale des sciences. Depuis 1666 jusqu'à 1699, Paris.

Mém. de l'Ac. roy. d. sc. de l'Inst. de France = Mémoires de l'académie royale des sciences de l'institut de France, Paris.

Mém. de l'Inst. nat. d. sc. = Mémoires de l'institut national des sciences et arts. Sciences mathématiques et physiques, Paris.

Mém. de Math. et de Phys. prés. à l'Ac. roy. d. sc. par divers savants = Mémoires de mathématiques et de physiques présentés à l'académie royale des sciences, par divers savans, & lûs dans ses assemblées, Paris.

Mem. di Bologna = Memorie della accademia delle scienze dell' istituto di Bologna, Bologna.

Mem. di mat. e fis. d. soc. Ital., Verona, parte mat. = Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze, parte (I) contenente le memorie di matematica, Verona.

Mem. d. soc. Italiana d. sc. res. in Modena, parte mat. = Memorie di matematica e di fisica della società italiana delle scienze residente in Modena, parte contenente le memorie di matematica, Modena.

Messenger of. Math. = The Oxford, Cambridge, and Dublin messenger of mathematics, Cambridge.

Monatl. Correspondenz f. Erd- und Himmelskunde = Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde, herausgegeben von Zach, Gotha.

Nouv. Ann. de Math. = Nouvelles annales de mathématiques, Paris.

Nouv. Bull. d. sc., par la Soc. Philomatique de France = Nouveau bulletin des sciences, par la société philomatique de Paris, Paris.

Nouv. Mém. de l'Ac. de Bruxelles = Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres de Bruxelles, Brüssel.

Nouv. Mém. de l'Ac. d. sc., Berlin = Nouveaux mémoires de l'académie royale des sciences et belles-lettres, Berlin.

Nova acta ac. sc. imp. Petropolitanae, f. . . . = Nova acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae. Praecedit historia ejusdem academiae ad annum . . ., St. Petersburg.

Novi comment. ac. sc. imp. Petropolitanae = Novi commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae, St. Petersburg.

Nuovi Saggi della acc. di Padova = Nuovi saggi della imperiale regia accademia di scienze lettere ed arti in Padova, Padua.

Phil. Mag. = The philosophical magazine, London. Zu diesem ursprünglichen Titel der Zeitschrift treten wechselnde Zusätze; er lautet zuletzt: „The London, Edinburgh, and Dublin philosophical magazine and journal of science." Folgende Serien sind zu unterscheiden: Bd. 1—68, 1798—1826; Bd. 1—11, 1827—1832 (New and united series of . . .); Bd. 1—37, 1832—1850 (New and united series of . . .); Bd. 1—50, 1851—1875 (fourth series); Bd. 1— . . ., 1876— . . . (fifth series). In den Citaten ist immer nur die Bandzahl und die Jahreszahl des Erscheinens, hingegen nicht die Seriennummer angegeben.

Phil. Trans. = Philosophical transactions, London.

Proc. Irish Ac. = Proceedings of the royal Irish academy, Dublin.

Quart. Journ. = The quarterly journal of pure and applied mathematics, London.

Quet. Corr. = Correspondance mathématique et physique, herausgegeben von Quetelet (Bd. 1 u. 2 in Gent herausgegeben von Garnier und Quetelet), Brüssel.

Trans. of the Irish Ac. = The transactions of the royal Irish academy. (Science), Dublin.

Vierteljahrschr. d. Züricher Naturf. Gesellschaft = Vierteljahrschrift der Naturforscher-Gesellschaft in Zürich, Zürich.

Berichtigungen.

S. 5, Z. 23 v. o. lies „divergirend" statt „semicubisch". (Gleiche Correctur: S. 6, Z. 5. v. o.)
S. 11, Z. 1 v. o. lies „sechs" statt „sieben".
S. 11, Z. 22 v. o. lies „$2n - 2$" statt „$2n - 1$"
S. 14, Z. 18 v. o. lies „$(A_1 B B' C_2)$" statt „$(A_1 B B' C_1)$".
S. 14, Z. 21 v. o. lies vor „von" A statt B.
S. 20, Z. 2 v. u. lies „1865" statt „1864".
S 24, Z. 24 v. o. lies „$(v - a)(v - a')A + (v - b)(v - b')B + (v - c)(v - c')C$."
S. 30, Z. 11 v. o. und Z. 2 v. u. lies „Nicollic" statt „Nicolle".
S. 31, Z. 23 v. o, lies „so bestimme man etwa auf den Geraden BC, CA Punkte A_0 und B_0 derart, dafs . . ."
S. 40, Z. 1 v. u. lies „[S. 35*]" statt „[II, 12]".
S. 42, Z. 5 v. u. lies „[III, 1]" statt „[II, 1]".
S. 44, Z. 16 v. o. lies „finden wir zuerst [Vergl. S. 226*] die Strahleninvolution erwähnt, in Verbindung gebracht . . ."
S. 54, Z. 32 v. o. lies „(liber VIII, Prop. 25)" statt „(liber VII, Prop. 25)"
S. 56, Z. 7 v. u. schalte vor „Heft 10" ein: „Journ. de l'éc. pol.,"
S. 57, Z. 22 v. o. schalte vor „proportional" ein „für jeden Punkt des Kegelschnittes".
S. 60, Z. 2 v. u. lies „Nouveau Bulletin" statt „Bulletin".
S. 62, Z. 1 v. o. lies „Brennpunkte" statt „Kegelschnitte".
S. 68, Z. 18 v. o. lies „aus welchen sich die bekannte Gleichung

$$\begin{vmatrix} a_{11} - t, a_{12}, a_{13} \\ a_{12}, a_{22} - t, a_{23} \\ a_{13}, a_{23}, a_{33} - t \end{vmatrix} = 0$$

S. 74, Z. 28 v. o. lies „Für den Fall $b = c$" statt „Im Fall des gleichseitigen Hyperboloids".
S. 77, Z. 2 v. o. lies „Auf Bobillier und Poncelet [Vergl.: XXI, 5; XXVII, 9] ist eine besondere Erzeugung des einschaligen Hyperboloids zurückzuführen als Ort der . . ."
S. 79, Z. 6 v. o. lies „dritte" statt „zweite".
S. 83, Z. 2 v. u. lies „(Brüssel 1837) Paris 1875" statt „Paris 1837".
S. 90, Z. 12 v. o. lies „Kugelkreis" statt „Kreis".
S. 92, Z. 8 v. u. lies „[XI, 2]" statt „[XII, 2]".
S. 100, Z. 29 v. o. lies „circularen" statt „bicircularen",
S. 101, Z. 2 v. u. lies „Huygens" statt „Huyghens".
S. 103, Zweiter Absatz. Man vergleiche noch die Entwickelungen von Magnus [XXXII, 7; XXXI, 17].
S. 117, Z. 16 v. o. lies „Berührungskreise" statt „bestimmte".
S. 120, Z. 24 v. o. lies „Erwähnung verdient noch die Arbeit von Mertens***), in welcher".

S. 123, Z. 9 v. u. lies „Staudt“ statt „Paulus“.
S. 124, Z. 15 v. o. lies „n, o, p, . . ., m“ statt „m, n, o, . . .“
S. 135, Z. 1 v. u. lies „1865“ statt „1862“.
S. 139, Z. 11 v. o. lies „ein Paar“ statt „die Doppelpunkte“.
S. 153, Z. 21 v. o. schalte vor „Polartetraeders“ ein „allen Flächen des Büschels gemeinsamen“.
S. 170, Z. 10 v. o. lies „eine Spitze um wenigstens zwei Einheiten“
S. 171, Zweiter Absatz. Von den hier aufgeführten Sätzen finden sich thatsächlich nur die auf Büschel und Scharen von Flächen zweiter Ordnung bezüglichen bei Poncelet. Der Irrtum konnte entstehen, weil Poncelet zuerst von den Flächen zweiter Ordnung spricht, die eine Curve, hernach von denjenigen, die acht Punkte mit einander gemein haben, beide Male jedoch den Büschel meint.
S. 172, Z. 28 v. o. streiche „trigonometrischen“.
S. 203, Z. 11 v. o. schalte hinter „gegeben“ ein „nachdem die einfachsten Ebenencoordinaten zuerst in einer 1832 erschienenen Abhandlung [Vergl.: S. 351*] gebraucht worden waren“.
S. 238, Z. 9 v. u. lies „(Brüssel 1837) Paris 1875“ statt „Paris 1837“.

Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. gr. 8. geh. I. Band. 1891. Im Auftrage des Vorstandes hrsg. von G. Cantor, W. Dyck und E. Lampe. 1892. n. ℳ 7.60.

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1891, sowie die auf der Versammlung in Halle a. S. gehaltenen Vorträge [IV u. 78 S.], ferner
W. F. Meyer: Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie. [V u. S. 81—292.]

——— ——— II. Band. 1892. Hrsg. von G. Cantor, W. Dyck und E. Lampe. 1893. n. ℳ 4.50.

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1892, sowie die auf der Versammlung in Nürnberg gehaltenen Vorträge [III u. 74 S.], ferner
Fr. Kötter: Die Entwickelung der Lehre vom Erddruck. Mit zwei Figurentafeln. [S. 75—156.]

——— ——— III. Band. 1893. Hrsg. von W. Dyck und E. Lampe. 1894. n. ℳ 16.—

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1893, sowie die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge. [IV u. 106 S.] Mit 12 Figuren im Text, ferner
A. Brill u. M. Noether: Die Entwickelung der Theorie der algebraischen Functionen in älterer und neuerer Zeit. [XXIII u. S. 109—566.]
L. Henneberg: Über die Entwickelung und die Hauptaufgaben der Theorie der einfachen Fachwerke. Mit zwei Figurentafeln. [S. 567—601.]

——— ——— IV. Band. 1894. 1895. Hrsg. von A. Wangerin und A. Gutzmer. 1897. n. ℳ 16.—

Enthaltend: Chronik der Vereinigung für die Jahre 1894 und 1895, sowie die auf den Versammlungen in Wien und Lübeck gehaltenen Vorträge [V u. 174 S.], ferner
D. Hilbert: Die Theorie d. algebraischen Zahlkörper. [XVIII u S. 177—546.]

——— ——— V. Band. 1896. Hrsg. von A. Wangerin und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1901. n. ℳ 21.60.

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1896, sowie die auf der Versammlung in Frankfurt a. M gehaltenen Vorträge. [94 S.] 1897. n. ℳ 2.80.
2. — E. Kötter: Die Entwickelung der synthetischen Geometrie. In zwei Teilen. I. Teil. 1. Lieferung. [128 S.] 1897. n. ℳ 4.40.
2. Lieferung. [XXVIII u. S. 129—486.] 1901. n. ℳ 14.40.
[Der II. Teil erscheint in einem späteren Bande.]

——— ——— VI. Band. 1897. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1899. n. ℳ 8.—

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1897, sowie die auf der Versammlung in Braunschweig gehaltenen Vorträge. [142 S.] 1898. n. ℳ 4.—
2. — S. Finsterwalder: Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie. Mit 19 Figuren im Text. [41 S.]
S. Finsterwalder: Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation. Mit 33 Figuren im Text. [S. 43—90.]
G. Bohlmann: Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit. [S. 91—110.]
[IV u. 110 S.] 1899. n. ℳ 4.—

——— ——— VII. Band. 1898. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1899. n. ℳ 12.80.

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1898, sowie die auf der Versammlung in Düsseldorf gehaltenen Vorträge. [159 S.] 1899. n. ℳ 4.80.
2. — E. Czuber: Die Entwickelung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. [VIII u. 279 S.] 1899. n. ℳ 8.—

——— ——— VIII. Band. 1899. Hrsg. von G. Hauck und A. Gutzmer. 2 Hefte. 1900. n. ℳ 16.—

1. Heft: Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899, sowie die auf der Versammlung in München gehaltenen Vorträge. Mit den Bildnissen von C. L. Gerhardt, Sophus Lie, E. v. Lommel, Friedr. Meyer, H. Schapira, Karl Schober. [IV u. 231 S.] 1900. n. ℳ 8.—
2. — A. Schoenflies: Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Mit 8 Figuren im Text. [IV u. 251 S.] 1900. n. ℳ 8.—

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

IX. Band. 2 Hefte. Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes von K. Hensel in Berlin und A. Gutzmer in Jena. [IV u. 140 S.; VI u. 123 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M* 9.—

Inhalt des I. Heftes:

I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1900.

1. Bericht über die Jahresversammlung zu Aachen am 16. bis 23. September 1900.
2. Geschäftliche Mitteilungen.
3. Kassenbericht.
4. Statuten u. Geschäftsordnung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
5. Mitglieder-Verzeichnis nach dem Stande vom 1. Januar 1901.
6. Zum Gedächtnis:
   Karl Bobek. Mit Bildnis.
   Reinhold Hoppe. Von **E. Lampe.** Mit Bildnis.
   Robert Heinrich Hoppe. Von **Franz Lorenz.**
   Eduard Wiltheiss. Von **W. Wirtinger.** Mit Bildnis.
   Karl Zelbr. Von **E. Waelsch.**

II. Die auf der Jahresversammlung zu Aachen gehaltenen Vorträge.

Klein, F., über die Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, mit besonderer Rücksicht auf den Band IV derselben (Mechanik).
Mittag-Leffler, G., analytische Darstellung monogener Functionen von mehreren unabhängigen Veränderlichen.
Fricke, R., zur Theorie der Poincaré'schen Reihen.
Steinitz, E., zur Theorie der Abel'schen Gruppen.
Meyer, W. Fr., singuläre bilineare Formen und Relationen zwischen Unterdeterminanten.
——, über geometrische Sätze von der Natur des Pascal'schen Satzes.
Kötter, Ernst, Construction der Oberfläche zweiter Ordnung, welche neun gegebene Punkte enthält.
Schoute, P. H., ein besonderer Bündel von dreidimensionalen Räumen zweiter Ordnung im Raum von vier Dimensionen.
Wangerin, A., Beweis eines Satzes über Krümmungslinien.
Minkowski, Herm., über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen.
Stäckel, Paul, zur Theorie der geodätischen Linien.
Wirtinger, Wilh., geodätische Linien und Poncelet'sche Polygone.
Jürgens, E., numerische Berechnung von Determinanten.
Mangoldt, H. v., über eine Aufgabe der kaufmännischen Arithmetik.

Inhalt des II. Heftes:

III. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Heun, K., die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik.

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Sechster Band. Erstes Heft.

1897.

Enthaltend die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1897,
sowie
kurze Berichte über die auf der Versammlung in Braunschweig
gehaltenen Vorträge.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck
in Berlin.

A. Gutzmer
in Halle a. S.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1898.

**Jeder Käufer verpflichtet sich zum Bezuge des ganzen, aus zwei Heft
bestehenden Bandes. Das zweite Heft erscheint im Juli d. J. — Auch das zweite H**

Chronik

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Bericht über die Jahresversammlung zu Braunschweig.

Am 20. bis 25. September 1897.

In der üblichen Weise hielt die Deutsche Mathematiker-Vereinigung ihre Jahresversammlung in Gemeinschaft mit der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte ab, und es waren zahlreiche Fachgenossen aus Deutschland nebst einigen aus Belgien, Österreich, Rufsland und der Schweiz der Einladung des Vorstandes gefolgt, um in der Geburtsstadt des *„princeps mathematicorum“* wissenschaftlichem Gedankenaustausch sowie der Anknüpfung und Pflege persönlicher Beziehungen sich hinzugeben.

Wie der Einführende der Abteilung für Mathematik und Astronomie, Herr R. Dedekind, in seiner Eröffnungs- und Begrüfsungsrede ausführte, haben die mathematischen Wissenschaften zur Stadt Braunschweig seit langer Zeit ganz besonders nahe Beziehungen gehabt. Dafs dieselben auch gegenwärtig daselbst hervorragende Pflege finden, davon legt die den Teilnehmern der Versammlung von der Technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina dargebotene Festschrift Zeugnis ab, welche in nahezu einem Drittel ihres Umfangs mathematischen bezw. mathematisch-physikalischen Inhalts ist.*)

In Erfüllung der auf der vorjährigen Versammlung hervorgetretenen Wünsche hatte sich der Vorstand frühzeitig bemüht, die Vorträge nach Möglichkeit in inneren Zusammenhang zu bringen; insbesondere gelang es, die gesamte Mechanik und daneben bis zu einem gewissen Grade die Zahlentheorie in den Mittelpunkt der Verhandlungen zu stellen. Dafs diese letzteren dadurch an Interesse und Vertiefung gewonnen haben, darf als ein unbestrittener Erfolg der Braunschweiger Tagung bezeichnet werden. Den Fachgenossen,

---

*) Dieselbe enthält folgende mathematischen Arbeiten:

R. Dedekind: Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre gröfsten gemeinsamen Teiler.

R. Müller: Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks.

R. Fricke: Über den arithmetischen Charakter gewisser Netze von unendlich vielen congruenten Vierecken.

H. Weber: Ableitung der Gleichgewichtsgleichung der Nadel im Rotationsinductor.

M. Möller: Über die fortschreitende Geschwindigkeit von Wellen mit einer longitudinalen Schwingung der Elemente.

welche durch Übernahme von Vorträgen die Bestrebungen des Vorstandes unterstützt haben, sei hier der Dank des letzteren abgestattet. Ein Teil dieser Vorträge gelangt in dem gegenwärtigen Jahresbericht vollständig zum Abdruck; über die weiteren, von Mitgliedern der Vereinigung gehaltenen Vorträge geben die der Redactionscommission zugegangenen und unten veröffentlichten Referate Aufschlufs. Einen Überblick über die gesamten Mitteilungen gewährt die folgende

Liste der gehaltenen Vorträge.

1. P. Stäckel (Kiel): Neuere Untersuchungen über allgemeine Dynamik.
2. A. Kneser (Dorpat): Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale.
3. A. Föppl (München): Ziele und Methoden der technischen Mechanik.
4. C. Cranz (Stuttgart): Über die constanten Geschofsabweichungen.
5. G. Bohlmann (Göttingen): Referat über die seit 1800 erschienenen Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung.
6. A. Pringsheim (München): Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.
7. K. Hensel (Berlin): Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen.
8. D. Hilbert (Göttingen): Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper.
9. R. Fricke (Braunschweig): Über die Beziehungen zwischen der Zahlentheorie und der Theorie der automorphen Functionen.
10. H. Lorenz (Halle a. S.) und H. Schubert (Hamburg): Die Beseitigung von Schiffsvibrationen durch Ausgleichung der Massenwirkungen der Maschinen.
11. S. Finsterwalder (München): Referat über die Photogrammetrie.
12. M. Brendel (Greifswald): Über stabile und instabile Bewegungen in unserem Planetensystem.
13. R. Mehmke (Stuttgart): Über das Bach-Schüle'sche Gesetz der elastischen Dehnungen.
14. S. Finsterwalder (München): Über mechanische Beziehungen bei der Flächenbiegung.
15. A. Sommerfeld (Clausthal): Geometrischer Beweis des Dupin'schen Theorems und seiner Umkehrung.
16. R. Müller (Braunschweig): Über die angenäherte Geradführung mit Hülfe eines ebenen Gelenkvierecks.

---

17. P. Drude (Leipzig): Referat über Fernewirkungen.
18. J. Baumann (Göttingen): Inwiefern eignen sich die realen Wissenschaften immer mehr dazu, die Grundlage der Bildung der Zukunft zu werden?
19. L. Boltzmann (Wien): Über einige meiner weniger bekannten Arbeiten über Gastheorie und deren Verhältnis zu derselben.
20. — —: Kleinigkeiten aus dem Gebiete der Mechanik.
21. H. Ebert (Kiel): Über die Bedeutung des Kraftlinienbegriffs im physikalischen Unterricht.
22. J. R. Schütz (Nürnberg): Demonstration eines analytischen Modells für das erdmagnetische Feld und dessen Variationen.
23. Hildebrandt (Braunschweig): Über den Zeichenunterricht auf den höheren Lehranstalten.
24. J. R. Schütz (Nürnberg): Über idealisirte mechanische Systeme.

Von diesen Vorträgen wurden die unter 1—16 genannten in den Fachsitzungen, die übrigen in gemeinschaftlichen Sitzungen der Abteilungen für Mathematik und Astronomie, für Physik und für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht gehalten.

An den unter 6 genannten Vortrag schloſs sich eine lebhafte Discussion über die Methodik des mathematischen Unterrichts, die auf der folgenden Versammlung zunächst durch Herrn F. Klein fortgesetzt werden soll.

Ferner hatte Herr Baker vom St. John's College in Cambridge eine Abhandlung über die hyperelliptischen Sigmafunctionen an den Schriftführer zur Vorlegung eingesandt; dieselbe wird an anderer Stelle veröffentlicht werden.

Herr R. Müller (Braunschweig) hatte eine mathematische Ausstellung veranstaltet; dieselbe umfaſste: 1) Fadenmodelle verschiedener abwickelbarer und windschiefer Flächen (Flächen von gleichförmiger Neigung über Ellipse, Parabel und Hyperbel, einige Schraubenflächen, gerades und schiefes Kreisconoid, Plücker'sches Conoid, Cylindroid, Wölbfläche des schiefen Durchgangs, Normalenflächen), 2) Studienzeichnungen aus der darstellenden Geometrie; beides angefertigt von Studirenden der Braunschweiger Technischen Hochschule. Dieser Ausstellung hatte Herr Fr. Schilling (Karlsruhe) ein von ihm verfertigtes Fadenmodell beigefügt: zwei einschalige Rotationshyperboloide, die sich längs einer Erzeugenden berühren und in zwei reellen Erzeugenden schneiden.

Herr H. Scheffler (Braunschweig) lieſs eine gröſsere Anzahl einiger seiner Schriften verteilen.

Über die von den Herren H. Burkhardt (Zürich) und Franz Meyer (Königsberg) mit vielseitiger Unterstützung bearbeitete Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften machte Herr H. Burkhardt nähere Mitteilungen, die sich auf den allgemeinen Plan und den Stand der Arbeiten bezogen.

Der seit Jahren erörterte Plan, einen internationalen Mathematiker-Congreſs zu veranstalten, ist in der Weise, wie es im vorigen Jahresbericht angedeutet worden ist, zur Ausführung gelangt. Über den Verlauf dieses ersten internationalen Mathematiker-Congresses, welcher unter sehr reger Beteiligung am 9., 10. und 11. August d. J. in Zürich tagte, machte der Vorsitzende, Herr F. Klein, in der Geschäftssitzung der Vereinigung ausführliche Mitteilungen, und er brachte insbesondere die Resolutionen sowie einen von ihm bewirkten Protokollvermerk zur Kenntnis, die hier wiedergegeben werden mögen:

Resolutionen des vom 9. bis 11. August 1897 in Zürich tagenden internationalen Mathematiker-Congresses.

I. Internationale mathematische Congresse sollen künftighin in Zwischenräumen von je 3—5 Jahren und unter gebührender Berücksichtigung der verschiedenen Länder veranstaltet werden.

II. In der Schlufsversammlung jedes Congresses werden Zeit und Ort des nächsten Congresses und die Organe zur Vorbereitung und Einberufung desselben bezeichnet.

III. Sollte durch irgend welche Verhältnisse die Abhaltung eines Congresses zur vorbestimmten Zeit am vorbestimmten Orte unmöglich sein, so ist der Vorstand des letzten Congresses verpflichtet, eventuell die nötigen Dispositionen zur Einberufung eines neuen Congresses zu treffen. Er wird sich zu diesem Zwecke auch mit den in der Resolution II bezeichneten Organen in Verbindung setzen.

IV. Für solche Aufgaben internationaler Natur, deren Lösung eine feste Organisation erfordert, kann jeder Congrefs ständige Commissionen ernennen, deren Amtsdauer bis zum nächsten Congresse geht.

Die Competenzen und Verpflichtungen derartiger Commissionen werden jeweilen bei Bestellung derselben festgesetzt.

V. Der nächste Congrefs soll im Jahre 1900 in Paris stattfinden. Die Société mathématique de France wird mit der Vorbereitung und Organisation desselben beauftragt.

VI. Das Bureau des Züricher Congresses wird, gemäfs der vierten Resolution, als permanente Commission bezeichnet, mit dem Auftrage, diejenigen in dem Referate des vorbereitenden Comités enthaltenen oder von anderer Seite ihm vorgelegten Fragen zu studiren, die es für besonders wichtig erachtet. Es kann sich durch Aufnahme weiterer Mitglieder verstärken. Es wird der Société mathématique de France alle für die Vorbereitung des Congresses von 1900 dienlichen Mitteilungen zur Verfügung stellen.

Der erwähnte Protokollvermerk des Herrn F. Klein hat folgenden Wortlaut:

„Als zeitiger Vorsitzender der Deutschen Mathematiker-Vereinigung wünsche ich zu erklären, dafs wir die Einladung für 1900 zum Congresse nach Paris gern und mit Dank annehmen, dafs wir es andererseits uns zu besonderer Ehre rechnen werden, den dann folgenden dritten internationalen mathematischen Congrefs bei uns in Deutschland begrüfsen zu können. Näheres hierüber zu sagen, wäre heute noch verfrüht. Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung wird nicht verfehlen, dem Pariser Congresse eine formelle Einladung zu unterbreiten.“

Bei der Discussion, die sich an diese Mitteilungen knüpfte,

trat die Meinung zu Tage, dafs es sich empfehlen dürfte, den in Deutschland abzuhaltenden dritten internationalen Congrefs erst für das Jahr 1905 in Aussicht zu nehmen und dafür einen Ort, wie Baden-Baden, Homburg u. s. w. zu wählen, der an den grofsen Reisewegen gelegen ist und in gewissem Sinne ein internationales Gepräge hat. Eine Beschlufsfassung hierüber wird mit Rücksicht auf die dem Pariser Congresse zu unterbreitende Einladung die Versammlung von 1899 zu treffen haben.

Hinsichtlich der früher besprochenen gröfseren Referate der Herren Minkowski über Zahlentheorie, Pringsheim über Reihentheorie, Stäckel über Differentialgeometrie und Waelsch über Liniengeometrie ist vereinbart worden, dieselben auf eine spätere Zeit zu verschieben. Es befinden sich demnach von den im vorigen Jahresbericht erwähnten Referaten noch die beiden folgenden in Bearbeitung:

1) ein Bericht über Wahrscheinlichkeitsrechnung von Herrn E. Czuber (Wien), welcher voraussichtlich auf der nächsten Versammlung vorgelegt werden kann;

2) ein Referat über graphische Methoden von Herrn R. Mehmke (Stuttgart).

Als neue Referate treten hierzu:

3) ein Bericht über allgemeine Dynamik von Herrn P. Stäckel (Kiel), den dieser in seinen Grundzügen bereits der Versammlung in Braunschweig mitgeteilt hat. Ursprünglich sollte der Bericht in ausführlicher, etwa 20 Bogen umfassender Darstellung als zweites Heft dieses Jahresberichtes erscheinen. Diese Absicht mufste wegen der Beteiligung des Herrn Stäckel an der inzwischen ins Werk gesetzten Herausgabe des Gauss'schen Nachlasses aufgegeben werden. Dafür gelangt jetzt ein kürzerer, auf Grund des Braunschweiger Vortrages von Herrn Stäckel ausgearbeiteter Bericht an dieser Stelle zum Abdruck.

4) ein ausführlicher Bericht über die seit 1800 erschienenen Lehrbücher der Differential- und Integralrechnung, über welchen Herr Bohlmann (Göttingen) in Braunschweig eine Übersicht gegeben hat, und den derselbe im nächsten Jahresberichte zu veröffentlichen gedenkt;

5) ein Referat über die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik, welches Herr Heun (Berlin) zu bearbeiten übernommen hat;

6) ein Bericht über numerische Auflösung von Gleichungen, den Herr Haussner (Würzburg) erstatten will, und

7) ein Referat über die Theorie der endlichen Gruppen, das Herr Steinitz (Berlin) der Vereinigung vorlegen wird.

Es steht zu hoffen, dafs über die unter 5) und 7) genannten

Referate bereits der nächsten Jahresversammlung eine Übersicht gegeben werden kann.

Die Mitglieder der Vereinigung sind gebeten, im Interesse eines möglichst vollständigen und allseitig durchgeführten Berichtes den Herren, welche die Referate übernommen haben, thunlichst zur Hand zu gehen.

Herr F. Klein legte der Versammlung ferner noch den von Herrn Voigt (Göttingen) angeregten Plan vor, wichtige, selten gewordene oder schwer zugängliche mathematische Tabellen neu herauszugeben, etwa die Legendre'schen Tafeln der elliptischen Integrale, Tafeln der Bessel'schen Functionen u. s. w.

Der hier ausgesprochene Gedanke fand lebhaften Anklang, und es wurde eine Commission, bestehend aus dem jeweiligen Vorsitzenden der Deutschen Mathematiker-Vereinigung als Leiter der Commissionsberatungen und aus den Herren Kiepert (Hannover), Mehmke (Stuttgart) und Voigt (Göttingen), mit der Aufgabe betraut, diesen Plan in geeigneter Weise zur Ausführung zu bringen. Insbesondere soll sich die Commission, wenn erforderlich, durch Cooptation ergänzen können.

Herr Dedekind (Braunschweig) regte noch die Berücksichtigung kleinerer zahlentheoretischer Tabellen an, welche sich zerstreut in den Zeitschriften u. s. w. finden und infolgedessen für die spätere Benutzung vielfach so gut wie verloren sind.

Der Erfolg, welchen der Vorstand mit dem — soweit möglich — abgerundeten Programm auf der Braunschweiger Versammlung erzielt hat, liefs den Wunsch hervortreten, dafs auch die nächste Jahresversammlung, welche im September 1898 zu Düsseldorf stattfinden wird, in ähnlicher Weise vorbereitet werden möge; auch sollen die belgischen und holländischen Fachgenossen eingeladen werden, an den wissenschaftlichen Verhandlungen in Düsseldorf teilzunehmen. Es besteht begründete Aussicht, dafs diese Pläne und Wünsche in Erfüllung gehen werden. Auch hier wird sich die Deutsche Mathematiker-Vereinigung als eine ebenso notwendige wie nützliche Einrichtung erweisen!

Geschäftlicher Bericht.

1. In der Geschäftssitzung, welche am 23. September 1897 in Braunschweig unter Leitung des Vorsitzenden, Herrn F. Klein, abgehalten wurde, gab der Schriftführer, Herr A. Gutzmer, eine vorläufige Übersicht über die Vermögenslage der Vereinigung. Die unter dem 31. December 1897 abgeschlossene und von den Kassenrevisoren geprüfte Übersicht über die Einnahmen und Ausgaben ist unten wiedergegeben. Die grofsen Ausgabeposten finden ihre Erklärung namentlich in den Kosten, welche teils die Versendung der Einladungen zu dem internationalen Congrefs an die Mitglieder und sonstige deutsche Fachgenossen, teils die Versendung von rund 1000 Exemplaren des Heftes 1 vom Jahresbericht V verursacht hat, die dem Vorstande seitens der Verlagsbuchhandlung von B. G. Teubner in Leipzig in dankenswerter Weise zu dem Zweck zur Verfügung gestellt worden sind, die Ziele und die Thätigkeit der Vereinigung den der letzteren noch nicht angehörigen Fachgenossen vor Augen zu führen. Diese Unternehmung ist von verhältnismäfsig günstigem Erfolge gekrönt gewesen; die Zahl der Mitglieder ist dadurch von 291 auf 381 angewachsen, und es steht zu erwarten, dafs sich fernerhin noch zahlreiche Fachgenossen der Vereinigung anschliefsen werden.

2. Die Jahresbeiträge sind im allgemeinen regelmäfsig eingegangen; immerhin hat sich der Vorstand genötigt gesehen, einige Mitglieder wegen der rückständigen Beiträge aus der Mitgliederliste zu streichen. Es sei deshalb nochmals an den auf der vorjährigen Versammlung zu Frankfurt gefafsten Beschlufs erinnert, dafs in Zukunft die rückständigen Mitgliederbeiträge unter Zuschlag des Portos durch Postauftrag eingezogen werden sollen, und dafs die Nichteinlösung des Postauftrages die Streichung aus der Mitgliederliste zur Folge haben soll.

3. Aus Anlafs des Hinscheidens von Karl Weierstrafs hat der Schriftführer, Herr A. Gutzmer, an dem Sarge des Entschlafenen im Auftrage des Vorstandes einen Kranz niedergelegt. Ebenso hat der Vorstand am letzten Tage der Braunschweiger Versammlung namens der Vereinigung an dem Gaufsdenkmal einen Kranz niedergelegt.

4. Die Wahlen hatten folgendes Ergebnis: zu Kassenrevisoren wurden ernannt die Herren G. Cantor und H. Grafsmann in Halle a. S.; an die Stelle der Ende 1897 statutengemäfs ausscheidenden Herren von Brill und Wangerin wurden die Herren Hensel-Berlin und Noether-Erlangen in den Vorstand gewählt. Der letztere besteht demnach für das Jahr 1898 aus folgenden Herren: F. Klein (98), A. Gutzmer (98), G. Hauck (99), A. Vofs (99), K. Hensel (1900), M. Noether (1900), wobei die zugefügten Zahlen das Jahr bezeichnen, an dessen Ende der Betreffende statutengemäfs aus dem Vorstande ausscheidet.

5. Die Wahlen innerhalb des Vorstandes für das Jahr 1898 ergaben folgendes Resultat: es wurden gewählt

zum Vorsitzenden: Herr A. Vofs-Würzburg,
zum Schrift- und Kassenführer: Herr A. Gutzmer-Halle a. S.,
zur Redactionscommission für den Jahresbericht: Herr A. Gutzmer und Herr G. Hauck-Berlin.

6. Mit Rücksicht auf die zahlreichen neuen Mitglieder hat der Vorstand es für zweckmäfsig erachtet, die Statuten in dem vorliegenden Jahresbericht zum Abdruck zu bringen.

7. Im Interesse eines genauen Mitgliederverzeichnisses bitten wir, von jeder Änderung der Adresse dem Schriftführer Mitteilung machen zu wollen.

Kassenbericht.

Nach dem Stande vom 31. December 1897.

Einnahmen.		ℳ	₰	Ausgaben.	ℳ	₰
Kassenbestand am 1. Januar 1897		165	65	Drucksachen	11	00
Jahresbeiträge der Mitglieder:				Papier und Utensilien	9	00
2 Beiträge für 1894	ℳ 4,00			Schreibarbeiten.	35	20
36 " " 1895	" 72,00			Postporti	245	31
64 " " 1896	" 128,00			2 Kränze	25	00
171 " " 1897	" 342,00			Honorar für das Referat im Jahresbericht IV	731	25
$26^1/_2$ " " 1898	" 53,00			Angekauft: nom. ℳ 1500 3 % Reichsanleihe à 97 %	1467	60
12 " " 1899	" 24,00			Barbestand	380	89
4 " " 1900	" 8,00					
1 " " 1901	" 2,00	633	00			
26 Ablösungen der Jahresbeiträge		780	60			
Honorar für Jahresbericht IV		1068	75			
" " " V, Heft 1 . .		176	25			
Zinsen von ℳ 2700 3 % Reichsanleihe .		81	00			
Summe		2905	25	Summe	2905	25

Vermögensbestand: nom. ℳ 4200 3 % Reichsanleihe, Ankaufswert: ℳ 4054,00.
Barer Kassenbestand . . . . " 380,89.

A. Gutzmer, als Kassenführer.
G. Cantor, H. Grafsmann, als Revisoren.

Statuten

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Zweck der Vereinigung.

Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung stellt sich die Aufgabe, in gemeinsamer Arbeit die Wissenschaft nach allen Richtungen zu fördern und auszubauen, ihre verschiedenen Teile und zerstreuten Organe in lebensvolle Verbindung und Wechselwirkung zu setzen, ihre Stellung im geistigen Leben der Nation nach Gebühr zu heben, ihren Vertretern und Jüngern Gelegenheit zu ungezwungenem collegialischen Verkehr und zum Austausch von Ideen, Erfahrungen und Wünschen zu bieten.

§ 2.

Jahres-Versammlung.

Die Vereinigung hält alljährlich eine Versammlung ab, in Gemeinschaft mit der „I. Abteilung für Mathematik und Astronomie der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte".

§ 3.

Vorstand der Vereinigung.

In der Jahresversammlung wählen die dort anwesenden Mitglieder der Vereinigung einen Vorstand von sechs Mitgliedern. Derselbe darf sich nötigenfalls durch Cooptation auf sechs ergänzen.

Die Wahl der Vorstandsmitglieder geschieht je auf drei Jahre.

Dabei scheiden alljährlich zwei Mitglieder aus und werden durch Neuwahl ersetzt. Das Ausscheiden geschieht in der Reihenfolge des Eintritts. Die Ausscheidenden können erst nach zwei Jahren wieder gewählt werden — nur der Schriftführer (§ 5) ist sofort wieder wählbar. Der Amtsantritt fällt auf den 1. Januar.

§ 4.

Aufgaben des Vorstandes. Jahresbericht.

Der Vorstand ist beauftragt mit der Vertretung der gesamten Interessen der Vereinigung.

Im Einzelnen hat er die Aufgabe, die Jahresversammlung vorzubereiten durch Aufstellung eines ausführlichen Programmes, in welches womöglich Referate über die Entwickelung einzelner Gebiete der Wissenschaft aufzunehmen sind.

Weiter veröffentlicht der Vorstand den Jahresbericht der Vereinigung über den wissenschaftlichen Teil der Verhandlungen. Derselbe ist den Mitgliedern zu ermäfsigtem Preise zugänglich zu machen; die Liste der Mitglieder und die Jahresrechnung sind ihm beizudrucken.

§ 5.

Geschäftsführung im Vorstande.

Der Vorstand wählt jährlich aus seiner Mitte:

a) den Vorsitzenden, in jährlichem obligatorischen Wechsel. Derselbe leitet die Sitzungen des Vorstandes und die geschäftlichen Sitzungen der Vereinigung;

b) den Schriftführer, gleichzeitig mit der Führung der Kasse und des Archivs der Vereinigung beauftragt;

c) die engere Commission für die Redaction des Jahresberichtes.

§ 6.

Mitgliedschaft.

Die Mitgliedschaft zur Vereinigung wird erworben durch Anmeldung bei dem Schriftführer. Mit ihr ist die Verpflichtung zur Zahlung eines Jahresbeitrages von zwei Mark für das laufende Kalenderjahr verbunden. Der jährliche Beitrag kann durch eine einmalige Zahlung von 30 Mark abgelöst werden.

Geschäftsordnung

der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

(Nach den auf der Versammlung zu Halle, 24. September 1891, gefafsten Beschlüssen.)

§ 1.

Die Redaction des „Jahresberichtes der Deutschen Mathematiker-Vereinigung“ übernimmt der Vorstand, welcher mit der speciellen Ausführung die in § 5 der Statuten erwähnte engere Commission beauftragt.

Alle auf den Jahresbericht bezüglichen Zusendungen sind an den Schriftführer der Vereinigung zu richten.

§ 2.

Im Jahresberichte sind zu unterscheiden:

a) die Mitteilungen über die in der Jahresversammlung gehaltenen Specialvorträge;

b) die gröfseren wissenschaftlichen Referate.

a) Die ersteren dürfen den Raum von zwei Druckseiten für einen Vortrag nicht überschreiten; sie sind noch auf der Jahresversammlung selbst der Redactionscommission einzuhändigen.

b) Der Umfang der wissenschaftlichen Referate ist innerhalb der mit dem Verleger einzuhaltenden Verträge nicht beschränkt. Für die Einsendung der Manuscripte dieser Referate wird ein Zeitraum von sechs Wochen nach Schlufs der Versammlung festgesetzt.

§ 3.

Das vom Verleger für die Publication des Berichtes gezahlte Honorar fliefst in die Kasse der Vereinigung. Die wissenschaftlichen Referate (§ 2b) werden den betreffenden Berichterstattern gemäfs dem vom Verleger pro Bogen gezahlten Betrage honorirt. Jeder Referent und ebenso die Autoren der übrigen Mitteilungen erhalten aufserdem 25 Separatabzüge ihres Berichtes. Weitere Separatabzüge können sich dieselben auf ihre Kosten, nach Vereinbarung mit dem Verleger, machen lassen.

Mitglieder-Verzeichnis

nach dem Stande vom 15. Februar 1898.

Abbe, C., Meteorological Institute, Washington.
Ackermann-Teubner, Alfred, Verlagsbuchhändler, Leipzig, Poststr. 3.
Adami, Fr., Gymnasialprofessor, Hof.
Ahrens, W., Lehrer an der Baugewerkschule, Magdeburg, Neueweg 18.
Ambronn, L., Professor an der Universität, Göttingen.
Amthor, A., Hannover, Königstr. 40.
Archenhold, F. S., Director der Treptow-Sternwarte bei Berlin.
Bacharach, J., Professor an der Realschule, Nürnberg.
Bäcklund, A. V., Professor an der Universität, Lund (Schweden).
10. Baker, H. F., Professor at St. John's College, Cambridge (England).
Bauer, G., Professor an der Universität, München, Türkenstr. 29.
Baur, L., Director der Grofsh. Realschule zu Heppenheim a. d. B., Privatdocent an der Technischen Hochschule zu Darmstadt; Heppenheim a. d. B.
Bauschinger, J., Professor an der Universität, Berlin S., Lindenstr. 91.
Beck, A., Professor am Polytechnicum, Riga.
Beke, E., Privatdocent an der Universität, Budapest, Damjanichgasse 50.
Beman, W. W., Professor at the University, Ann Arbor, Mich. U. S. A., 61 East Kingsley Street.
Biermann, O., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren), Falkensteinergasse 5.
Binder, W., Professor an der Fachschule für Maschinenwesen, Wiener-Neustadt.
Bjerknes, Professor an der Universität, Christiania.
20. Blaschke, E., Privatdocent an der Universität, Wien XVIII, Gürtelstr. 1.
Blümcke, Ad., Reallehrer, Nürnberg, Glockenhofstr. 32.
Bobek, K., Professor an der deutschen Universität, Prag.
Bock, A., Reallehrer an der Realschule, Rothenburg a. d. T.
Böger, R., Oberlehrer an der Realschule, Hamburg, Sophien-Allee 31.
Börsch, A., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam, Mauerstr. 6.
Böttcher, J. E., Professor, Rector des Realgymnasiums, Leipzig, Zeitzerstr. 10.
Bohlmann, G., Privatdocent an der Universität, Göttingen, Bertheaustr. 1.
Boltzmann, L., Professor an der Universität, Wien IX, Türkenstr. 3.
Bolza, O., Professor at the University, Chicago Ill.
30. Braunmühl, A. v., Professor an der Technischen Hochschule, München.
Brendel, M., Professor an der Universität, Göttingen.
Bretschneider, W., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Reinsburgstr. 57.
Brill, A. v., Professor an der Universität, Tübingen.
Brix, W., Berlin W., Friedrich-Wilhelmstr. 9.
Brückner, Oberlehrer am Realgymnasium, Zwickau, Lasaustr. 8.

Brunn, H., Privatdocent an der Universität, Bibliothekar an der Technischen Hochschule, München, Giselastr. 27.
Bruns, H., Professor an der Universität, Leipzig, Sternwarte.
Burkhardt, H., Professor an der Universität, Zürich V, Kreuzplatz 1.
Burmester, L., Professor an der Technischen Hochschule, München, Barerstr. 69.
40. Busche E., Oberlehrer an der Hansaschule, Bergedorf bei Hamburg.
Cantor G., Professor an der Universität, Halle a. S., Händelstr. 13.
Cantor, M., Professor an der Universität, Heidelberg, Gaisbergstr. 15.
Cardinaal, J., Professor am Polytechnicum, Delft (Holland).
Cranz, C., Professor an der Oberrealschule und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Johannesstr. 17.
Crawley, E. S., Professor at the University, Philadelphia, Pa.
Cremona, L., Professor an der R. Scuola d'applicazione per gl' ingegneri, Rom, Piazza S. Pietro in Vincoli 5.
Czuber, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien.
Dalwigk, F. v., Privatdocent an der Universität, Marburg.
Dantscher v. Kollesberg, V., Professor an der Universität, Graz, Rechbauerstr. 29.
50. Dedekind, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 87.
Denizot, A., Assistent am Physikalischen Institut der Universität, Halle a. S., Harz 31.
Dickstein, S., Professor, Warschau, Marzałkowskastr. 117.
Dingeldey, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 13.
Dobriner, H., Oberlehrer am Philantropin, Frankfurt a. M., Eiserne Hand 18.
Döhlemann, K., Privatdocent an der Universität, München, von der Tann-Str. 23.
Doergens, R., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin NW., Spenerstr. 2.
Doležal, E., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Taubstummengasse 10.
Domsch, P. R., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Dyck, W., Professor an der Technischen Hochschule, München, Hildegardstr. 1½.
60. Dziobek, O., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Berlinerstr. 55.
Eberhard, V., Professor an der Universität, Halle a. S., Jägerplatz 7.
Ellemann, Fr., Mittelschullehrer, Leopoldshall.
Emmerich, A., Oberlehrer am Gymnasium, Mülheim a. d. Ruhr.
Engel, F., Professor an der Universität, Leipzig, An der Pleifse 5.
Escherich, G. v., Professor an der Universität, Wien IX, Dietrichsteingasse 5.
Färber, C., Oberlehrer an der Luisenstädtischen Oberrealschule, Berlin SO., Elisabeth-Ufer 41.
Fehr, H., Professor an der Universität, Genf, rue Gevray 19.
Fiedler, E., Professor an der Cantonschule, Zürich-Hottingen, Englisches Viertel 57.
Fiedler, Wilhelm, Professor am Polytechnicum, Zürich, Klosbachstr. 79.
70. Finger, J., Professor an der Technischen Hochschule, Wien IV, Alléegasse 35.
Fink, K., Rector der Realschule, Tübingen, Wilhelmstr. 2.
Finsterwalder, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Leopoldstr. 51.

Fischer, Karl, Hülfsarbeiter im Bureau des Kgl. Ausschusses zur Untersuchung der Hochwasserverhältnisse, Berlin SW., Puttkamerstr. 10.
Fischer, K., Assistent an der Technischen Hochschule, München.
Flatt, R., Privatdocent an der Universität, Basel, Margarethenstr. 77.
Föppl, A., Professor an der Technischen Hochschule, München.
Franz, J., Professor an der Universität, Breslau.
Frege, G., Professor an der Universität, Jena.
Fricke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Kaiser Wilhelm-Strafse 17.
80. Friesendorff, Th., Oberlehrer an den reformirten Kirchenschulen, Assistent am Institut der Wegebauingenieure, St. Petersburg.
Frobenius, G., Professor an der Universität, Berlin; Charlottenburg, Leibnizstr. 70.
Fuchs, L., Professor an der Universität, Berlin W., Rankestr. 14.
Fuhrmann, A., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Circusstr. 39.
Galdeano, Zoel Ga. de, Professor an der Universität, Zaragoza (Spanien), Cóso 99, 3°.
Geer, P. van, Professor an der Universität, Leiden (Holland), Rapenburg 81.
Gegenbauer, L., Professor an der Universität, Wien IX, Frankstr. 1.
Gerbaldi, F., Professor an der Universität, Palermo.
Gerhardt, K. J., Gymnasial-Director a. D., Halle a. S., Magdeburgerstr. 58.
Godt, W., Oberlehrer am Katharineum, Lübeck, Geninerstr. 29.
90. Götting, E., Oberlehrer am Gymnasium, Göttingen.
Gordan, P., Professor an der Universität, Erlangen.
Graefe, F., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Mühlstrafse 11.
Graf, J. H., Professor an der Universität, Bern.
Grafsmann, H., Oberlehrer an der Latina, Halle a. S., Niemeyerstr. 23.
Greenhill, A. G., Professor am Artillery College Woolwich, London W. C. 10 New Inn, Strand.
Grübler, M., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Schillerstr. 113.
Günther, S., Professor an der Technischen Hochschule, München, Akademiestr. 5.
Gundelfinger, S., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Eichbergstr. 6.
Gutzmer, A., Privatdocent an der Universität, Halle a. S., Gartenstr. 5.
100. Gysel, J., Director des Kantons-Gymnasiums, Schaffhausen, Tannergäfschen 13.
Haas, K., Gymnasialprofessor, Wien VI, Matrosengasse 8.
Haberland, M., Realschullehrer, Neustrelitz.
Haebler, Th., Professor an der Fürstenschule, Grimma i. S.
Haenlein, J., Oberlehrer am Humboldts-Gymnasium, Berlin NW., Spenerstrafse 34.
Haentzschel, E., Oberlehrer am Köllnischen Gymnasium, Berlin, und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Gleditschstr. 43.
Hagen, J., Professor und Director der Sternwarte am Georgetown College, Washington D. C.
Halsted, George Bruce, Professor at the University, Austin, Texas U. S. A., 2407 Guadalupe Street.
Hamburger, M., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin N., Karlstr. 28.
Hancock, H., Instructor at the University, Chicago Ill.

110. Hartwig, E., Director der Sternwarte, Bamberg.
Hauck, G., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Bülowstr. 6.
Hausdorff, F., Privatdocent an der Universität, Leipzig, Nordstr. 58.
Haufsner, R., Privatdocent an der Universität, Würzburg, Markusstr. 11.
Hecht, Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Nunnenbeckstrafse 19.
Heffter, L., Professor an der Universität, Bonn, Goethestr. 17.
Helm, G., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Winkelmannstr. 2.
Helmert, F. R., Professor an der Universität, Berlin, Director des Geodätischen Instituts, Potsdam.
Henneberg, L., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Hochstr. 58.
Henneke, Professor am Gymnasium, Preufsisch-Friedland.
120. Henrici, O., Professor am City and Guilds of London Institute, Clarendon Road 34, Notting Hill, London W.
Hensel, K., Professor an der Universität, Berlin W., Kurfürstendamm 236.
Hermann, A., Éditeur, membre de la Société mathématique de France, Paris, rue de la Sorbonne 8.
Hermes, J., Professor am Progymnasium, Königsberg i. Pr.
Hermes, O., Professor an der Artillerieschule, Steglitz, Lindenstr. 35.
Hertzer, H., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Frobenstr. 14.
Herz, N., Astronom, Wien XVII, Alsbachstr. 8.
Hefs, E., Professor an der Universität, Marburg, Wörthstr. 24.
Hettner, G., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, und an der Universität, Berlin W., Kaiserin Augustastr. 58.
Heun, Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin SW., Mittenwalderstrafse 17.
130. Heymann, C. W., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Hilbert, D., Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 29.
Hirsch, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich, Freiestr. 5.
Hölder, O., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
Holländer, E., Oberlehrer am Gymnasium, Norden.
Holzmüller, G., Professor, Director der Kgl. Maschinenbauschule, Hagen i. W.
Hoppe, R., Professor an der Universität, Berlin S., Prinzenstr. 69.
Hoppe, R. H., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Horn, J., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Leibnizstr. 24.
Hofsfeld, C., Oberlehrer am Gymnasium, Eisenach, Rennbahn 4.
140. Hurwitz, A., Professor am Polytechnicum, Zürich, Falkengasse 15.
Hurwitz, J., Privatdocent an der Universität, Basel, Allschwilerstr. 3.
Järisch, P., Oberlehrer am Johanneum, Hamburg-Eilbeck, Papenstr. 56.
Jahnke, E., Oberlehrer an der achten Realschule, Berlin; Wilmersdorf, Pariserstr. 55.
Jolles, St., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Halensee bei Berlin, Boothstr. 2.
Joukovsky, N., Professor an der Universität, Moskau.
Jürgens, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstr. 49.
Junker, F., Reallehrer, Urach (Württemberg).
Justi, G., Detmold.
Kasten, H., Oberlehrer am Gymnasium, Bremen, Dechanatstr. 5.

150. Keck, L., Professor am Realgymnasium, Nürnberg.
Kepinski, S., Professor an der Universität, Krakau.
Kerschensteiner, G., Stadtschulrat, München, Lilienstr. 66.
Kiepert, L., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 1 D.
Killing, W., Professor an der Akademie, Münster i. W., Salzstr. 21 a.
Kirsch, E. G., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Kleiber, J., Hauptlehrer an der Handelsschule, München.
Klein, Felix, Professor an der Universität, Göttingen, Wilhelm Weber-Strafse 3.
Klein, Georg, Rector des Realgymnasiums, München, Ludwigstr. 14.
Klug, L., Privatdocent an der Universität, Klausenburg (Ungarn).
160. Kneser, A., Professor an der Universität, Dorpat, Gartenstr. 24.
Knoblauch, J., Professor an der Universität, Berlin W., Karlsbad 12.
Kobald, E., Professor an der Bergakademie, Leoben (Steiermark).
Köhler, C., Professor an der Universität, Heidelberg, Treitschkestr. 3.
König, J., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Koenigsberger, L., Professor an der Universität, Heidelberg, Kaiserstrafse.
Köpke, A., Oberlehrer an der Realschule, Ottensen, Holländische Reihe 4.
Kötter, E., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstrafse 42a.
Kötter, F., Professor an der Bergakademie, Berlin S., Annenstr. 1.
Kohn, G., Professor an der Universität, Wien I, Schottenring 15.
170. Kollert, J. A., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Kortum, H., Professor an der Universität, Bonn, Meckenheimerstr. 136.
Kostka, C., Professor am Gymnasium, Insterburg.
Kraft, F., Privatdocent an der Universität, Zürich III, Aufsersihl.
Krause, M., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Kaitzerstrafse 12.
Krazer, A., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Nikolausring 3.
Kreutz, H., Professor an der Universität, Kiel, Wrangelstr. 6.
Krüger, L., Professor, Abteilungsvorsteher am Kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
Kühne, H., Gymnasiallehrer, Herford i. Westf.
Küpper, C., Professor an der deutschen Technischen Hochschule, Prag; Kgl. Weinberge, Villa Brosche.
180. Kürschak, J., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Budapest, Albrechtstr. 14.
Kullrich, Oberlehrer des Cadettencorps, Grofs-Lichterfelde, Margarethenstrafse.
Kutta W., Assistent an der Technischen Hochschule, München.
Lacombe, M., Professor am Polytechnicum, Zürich, Kreuzplatz 1.
Lampe, E., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Kurfürstenstr. 139.
Landsberg, G., Professor an der Universität, Heidelberg.
Laugel, L., Mitglied der Société mathématique de France, Châlet des Bruyères, Golfe Jouan, Alpes Maritimes.
Leesekamp, E. A., Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Leitzmann, H., Privatgelehrter, Giebichenstein, Ziethenstr. 28.
Lerch, M., Professor an der Universität, Freiburg (Schweiz).
190. Lie, S., Professor an der Universität, Leipzig, Seeburgstr. 33.
Liebmann, H., Assistent an der mathematischen Modellsammlung der Universität, Göttingen, Wöhlerstr. 10.
Lilienthal, R. v., Professor an der Akademie, Münster i. W., Wehrstr. 26.

Lindemann, F., Professor an der Universität, München, Georgenstr. 42.
Linsenbarth, H., Oberlehrer an der ersten Realschule, Berlin N., Lothringerstr. 76.
Lipschitz, R., Professor an der Universität, Bonn, Königstr. 34.
Loewy, A., Privatdocent an der Universität, Freiburg i. B., Thurnseestr. 4.
Lommel, E. v., Professor an der Universität, München, Kaiserstr. 10½.
London, F., Professor an der Universität, Breslau.
Lorenz, Franz, Professor an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz, Reichsstr. 33.
200. Lorenz, Hans, Professor an der Universität, Halle a. S., Mühlweg 26.
Lorey, W., Probecandidat am Realgymnasium, Quakenbrück.
Loria, G., Professor an der Universität, Genua, Passo Caffaro 1.
Lüroth, J., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Mozartstr. 10.
Mackay, J. S., Edinburgh, Northumberland Street 69.
Mandl, M., Lehrer an der Realschule, Profsnitz in Mähren.
Mangoldt, H. v., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Vaelserstr. 148.
Marcuse, A., Privatdocent an der Universität, Berlin W., Matthäikirchstrafse 12.
Marxsen, S., Cand. math., Göttingen, Weender Chaussée 52.
Maschke, H., Professor at the University, Chicago Ill., Woodlawn Avenue 5810.
210. Maurer, L., Professor an der Universität, Tübingen.
Mayer, A., Professor an der Universität, Leipzig, Königstr. 1.
Mehmke, R., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Immenhoferstr. 4.
Metzler, W., Professor at the University, Syracuse, N. Y.
Meyer, Franz, Professor an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 39.
Meyer, Friedrich, Professor am städtischen Gymnasium, Halle a. S., Reichardtstrafse 19.
Meyer, Georg, Lehrer an der Realschule, Bremen, Georgstr. 56.
Meyer, Gustav Ferdinand, Professor, München, Amalienstr. 80, 3.
Minkowski, H., Professor am Polytechnicum, Zürich, Mittelstr. 12.
Mittag-Leffler, G., Professor an der Universität, Stockholm, Djursholm.
220. Moore, E. H., Professor at the University, Chicago Ill.
Müller, E., Wissenschaftlicher Lehrer an der Kgl. Baugewerkschule, Königsberg i. Pr., Dohnastr. 4.
Müller, Felix, Professor, Oberloschwitz bei Dresden, Heinrichstr. 12.
Müller, Reinhold, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hagenstr. 2.
Müller, Richard, Oberlehrer am Kaiser Wilhelms-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin SW., Zossenerstr. 39.
Muth, P., Privatgelehrter, Osthofen (Rheinhessen).
Naetsch, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Dresden, Gluckstr. 6.
Nath, M., Oberlehrer am Luisen-Gymnasium, Berlin NW., Gerhardstr. 8.
Netto, E., Professor an der Universität, Giefsen, Süd-Anlage 13.
Neuberg, J., Professor an der Universität, Lüttich, rue Sclessin 6.
230. Neumann, C., Professor an der Universität, Leipzig, Querstr. 10—12.
Noether, M., Professor an der Universität, Erlangen.
Oettingen, A. v., Professor an der Universität, Leipzig, Mozartstr. 1.
Papperitz, E., Professor an der Bergakademie, Freiberg i. S., Weisbachstrafse 5.
Pasch, M., Professor an der Universität, Giefsen.

Pelz, C., Professor an der Technischen Hochschule, Prag.
Peschka, A. V., Professor an der Technischen Hochschule, Wien III, Joaquingasse 2.
Pick, G., Professor an der deutschen Universität, Prag; Kgl. Weinberge, Tylplatz 28.
Pierpont, James, Professor at the Yale University, New Haven, Conn. U. S. A.
Pietzker, Professor am Gymnasium, Nordhausen.
240. **Piltz**, A., Privatdocent an der Universität, Jena.
Pochhammer, L., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 59.
Pockels, F., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden, Lüttichaustraſse 28.
Pokrowsky, P., Professor an der Universität, Kiew.
Pringsheim, A., Professor an der Universität, München, Arcisstr. 12.
Prümm, E., Cand. phys. et math., Göttingen, Friedländerweg 37.
Prym, F., Professor an der Universität, Würzburg.
Raaij, W. H. L. **Janssen van**, Haarlem (Holland).
Rados, G., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Rausenberger, O., Professor an der Musterschule, Frankfurt a. M., Heisterstr. 8.
250. **Recknagel**, G., Rector des Realgymnasiums, Augsburg.
Reich, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Wien IX, Michelbeurngasse 2.
Reinhardt, C., Oberlehrer an der Fürstenschule, Meiſsen, Freiheit 16.
Réthy, M., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest, Soraksárer Gasse 18.
Reuschle, C., Professor an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Lerchenstr. 5.
Reye, Th., Professor an der Universität, Straſsburg i. E.
Richarz, F., Professor an der Universität, Greifswald.
Richter, Oberlehrer am Gymnasium, Quedlinburg.
Riecke, E., Professor an der Universität, Göttingen.
Rinecker, Gymnasialprofessor, Regensburg.
260. **Ritter**, A., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Kasernenstraſse 36.
Rodenberg, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Oeltzenstr. 2.
Rogel, F., Ingenieur, Barmen, Gewerbeschulstr. 25 b.
Rohn, K., Professor an der Technischen Hochschule, Dresden.
Rosanes, J., Professor an der Universität, Breslau, Schweidnitzer Stadtgraben 16 b.
Rosenow, H., Director der neunten Realschule, Berlin N., Badstr. 22.
Rudel, K., Professor an der Industrieschule, Nürnberg.
Rudio, F., Professor am Polytechnicum, Zürich, Feldeggstr. 64.
Runge, C., Professor an der Technischen Hochschule, Hannover, Körnerstraſse 19 a.
Saalschütz, L., Professor an der Universität, Königsberg i. Pr.
270. **Schapira**, H., Professor an der Universität, Heidelberg.
Scheffers, G., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt.
Scheibner, W., Professor an der Universität, Leipzig, Schletterstr. 8.
Schell, W., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Lachnerstraſse 8.
Schendel, L., Halensee bei Berlin, Hobrechtstr. 16.
Schilling, C., Director der Navigationsschule, Bremen.
Schilling, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Lachnerstr. 14.
Schimpf, E., Oberlehrer am Gymnasium, Bochum, Blücherstr. 46.

Schlegel, V., Professor an der Gewerbeschule, Hagen i. W., Volmestraſse 62.

Schleiermacher, L., Professor an der Forstschule, Aschaffenburg.

280. Schlesinger, L., Professor an der Universität, Klausenburg (Ungarn), S'amzaljutcza 104.

Schlömilch, O., Geheimrat, Dresden, Liebigstr. 14.

Schmidt, Fr., Baumeister, Budapest V, Rudolfsquai 8.

Schmidt, M., Professor an der Technischen Hochschule, München, Heſsstraſse 32.

Schoenflies, A., Professor an der Universität, Göttingen, Nicolausberger Weg.

Scholz, P. G., Professor am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin; Steglitz, Fichtestr. 34.

Schorr, R., Observator der Sternwarte, Hamburg.

Schotten, H., Director der städtischen Oberrealschule, Halle a. S.

Schottky, F., Professor an der Universität, Marburg, Barfüſserthor 14.

Schröder, E., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Gottesauerstr. 9.

290. Schröder, Th., Professor am Melanchthon-Gymnasium, Nürnberg, Sulzbacherstr. 7.

Schubert, H., Professor am Johanneum, Hamburg, Steindamm 107.

Schülke, A., Oberlehrer, Osterode i. Ostpr.

Schütz, J. R., Nürnberg, Peterhenleinstr. 51.

Schultz, E., Oberlehrer am Realgymnasium, Stettin, Poelitzerstr. 9.

Schumacher, H., Reallehrer an der Realschule, Neustadt a. H.

Schumacher, R., Reallehrer an der Realschule, Augsburg, Bismarckstraſse 11.

Schur, F., Professor an der Technischen Hochschule, Karlsruhe, Westendstraſse 46.

Schur, W., Professor an der Universität, Göttingen.

Schwalbe, B., Professor, Director des Dorotheenstädtischen Realgymnasiums, Berlin NW., Georgenstr. 30—31.

300. Schwarz, H. A., Professor an der Universität, Berlin; Villencolonie Grunewald, Boothstr. 33.

Schwatt, J. Professor at the University, Philadelphia Pa.

Schwering, K., Professor, Director des Gymnasiums, Düren.

Scott, Charlotte Angas, Professor at the Bryn Mawr College, Bryn Mawr, Pa., U. S. A.

Seeliger, H., Professor an der Universität, München, Sternwarte.

Segre, C., Professor an der Universität, Turin (Italien), corso Vittorio Emanuele 85.

Selivanoff, D., Privatdocent an der Universität, St. Petersburg, Fontanka 116 log. 16.

Selling, E., Professor an der Universität, Würzburg, Sieboldstr. 11.

Servus, H., Oberlehrer am Friedrichs-Realgymnasium, Berlin, und Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg.

Sidler, G., Professor an der Universität, Bern, Christoffelgasse 4.

310. Siebert, A., Oberlehrer des Cadettencorps, Groſs-Lichterfelde, Potsdamerstraſse 61.

Sievert, H., Professor am Gymnasium, Bayreuth.

Simon, M., Professor am Lyceum, Straſsburg i. E., Lessingstr. 5.

Sintzow, D., Privatdocent an der Universität, Kasan (Ruſsland).

Smith, D. E., Professor at the Michigan State Normal College, Ypsilanti, Mich. U. S. A.

Sommerfeld, A., Professor an der Bergakademie, Clausthal i. H., Sorger-Teichdamm.

Sonin, N., Professor, Mitglied der Akademie der Wissenschaften, St. Petersburg.
Souslow, Professor an der Universität, Kiew.
Sprung, A., Professor am Meteorologischen Institut, Potsdam.
Stäckel, P., Professor an der Universität, Kiel, Niemannsweg 14.
320. Stahl, H., Professor an der Universität, Tübingen.
Staude, O., Professor an der Universität, Rostock, St. Georgstr. 38.
Steinitz, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Charlottenburg, Uhlandstr. 187.
Stephanos, Kyparissos, Professor an der Universität, Athen, Rue de Solon 26.
Sterneck, R. v., Privatdocent an der Universität, Wien VIII, Josefstädterstr. 30.
Stickelberger, L., Professor an der Universität, Freiburg i. B., Baslerstrafse 38.
Stolz, O., Professor an der Universität, Innsbruck.
Strafsmann, H. W., Gymnasiallehrer, Berlin SW., Dessauerstr. 36.
Studnička, F. J., k. k. Hofrat, Professor an der k. k. Böhmischen Universität, Prag, Schwarze Gasse 6.
Study, E., Professor an der Universität, Greifswald.
330. Sturm, R., Professor an der Universität, Breslau, Fränkelplatz 9.
Suták, Jos., Gymnasialprofessor und Privatdocent an der Universität, Budapest IV., Város ház ter 4.
Tauber, A., Privatdocent an der Universität, Wien.
Thomae, J., Professor an der Universität, Jena.
Timerding, E., Privatdocent an der Universität, Strafsburg i. E., Fischartstrafse 4.
Toeplitz, E., Professor am Johannes-Gymnasium, Breslau, Ohlauerstadtgraben 3.
Tötössy, B. v., Professor an der Technischen Hochschule, Budapest.
Vahlen, K. Th., Privatdocent an der Universität, Königsberg i. Pr., Mittel-Tragheim 27.
Valentin, G., Oberbibliothekar der Kgl. Bibliothek, Berlin W., Burggrafenstr. 6.
Veronese, G., Professor an der Universität, Padua.
340. Vogel, P., Professor an der Artillerie- und Ingenieurschule, München.
Voigt, W., Professor an der Universität, Göttingen.
Von der Mühll, K., Professor an der Universität, Basel, Aeschenvorstadt 72.
Vofs, A., Professor an der Universität, Würzburg, Sanderglacis 31.
Vries, Jan de, Professor an der Universität, Utrecht (Holland).
Wälsch, E., Professor an der Technischen Hochschule, Brünn.
Wallenberg, G., Oberlehrer an der neunten Realschule, Berlin N., Brunnenstr. 120.
Wangerin, A., Professor an der Universität, Halle a. S., Burgstr. 35.
Wassiljef, Professor an der Universität, Kasan.
Weber, E. v., Privatdocent an der Universität, München, Königinstr. 5/0.
350. Weber, H., Professor an der Universität, Strafsburg i. E., Goethestr. 27.
Weber, M., kgl. Regierungsbauführer, Assistent an der Technischen Hochschule, Hannover, Baumstr. 19.
Weiler, A., Privatdocent am Polytechnicum, Zürich-Hottingen, Gemeindestrafse 40.
Weingarten, J., Professor an der Technischen Hochschule, Charlottenburg; Berlin W., Regentenstr. 14.
Weinmeister, J. Ph., Professor an der Forstakademie, Tharandt.
Weifs, W., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Prag.

Weltzien, C., Professor an der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule, Berlin; Zehlendorf, Prinz Handjery-Str. 3.
Wend, H. O., Lehrer an den Technischen Staatslehranstalten, Chemnitz.
Wernicke, A., Oberrealschuldirector, Professor an der Technischen Hochschule, Braunschweig, Hintern Brüdern 30.
Westphal, A., Professor, Abteilungsvorsteher am kgl. Geodätischen Institut, Potsdam.
360. White, H., Professor at the University, Evanston, Ill., P. O. Box 244.
Wien, W., Professor an der Technischen Hochschule, Aachen, Lousbergstraſse 49.
Wiener, H., Professor an der Technischen Hochschule, Darmstadt, Grüner Weg 17.
Wirtinger, W., Professor an der Universität, Innsbruck, Andreashoferstraſse 6.
Witting, A., Oberlehrer am Gymnasium, Dresden-Strehlen, Lockwitzerstraſse 10.
Wölffing, E., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Stuttgart, Landhaus Gänshaide.
Wolf, M., Professor an der Universität, Heidelberg.
Wolfskehl, P., Privatgelehrter, Darmstadt, Rheinstr. 4.
Zahradnik, K., Professor an der Universität, Agram.
Zelbr, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Brünn (Mähren).
370. Zindler, K., Privatdocent an der Technischen Hochschule, Wien.
Ziwet, A., Professor at the University of Michigan, Ann Arbor, Mich.
Zorawski, C. v., Professor an der Universität, Krakau.
Zsigmondy, Privatdocent an der Universität, Wien I, Schmerlingplatz 2.
Züge, Professor am Gymnasium, Wilhelmshafen, Roonstr. 29.

Bibliothek der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg.
Mathematisches Institut der Technischen Hochschule, München.
Mathematischer Verein der Universität, Berlin NW., Dorotheenstr. 5.
Mathematischer Verein der Universität, Göttingen.
Royal Observatory zu Greenwich.
380. Kaiserliche Universitäts- und Landesbibliothek, Straſsburg i. E.
Universitäts-Bibliothek zu Utrecht.

Zum Gedächtnis.

In die Gedächtnistafel der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ist der Name des Herausgebers von Gauss' Werken einzutragen, dessen Hinscheiden wir tief beklagen; Ernst Schering ist am 2. November 1897 nach längerem Leiden verschieden. Sein Andenken wird durch die unten zur Veröffentlichung kommenden Zeilen geehrt, in denen Herr F. Klein die Persönlichkeit und die hauptsächlichen wissenschaftlichen Bestrebungen des Dahingeschiedenen geschildert hat.

Dem Gedächtnis von F. Buka sind die nachstehenden Worte aus der Feder des Herrn G. Hauck gewidmet. Die Persönlichkeit von K. Weierstrafs schildert die warmempfundene Rede des Herrn E. Lampe, die derselbe in der physikalischen Gesellschaft zu Berlin gehalten und in deren Verhandlungen veröffentlicht hat; sie gelangt mit dankenswerter Genehmigung des Verfassers und der Verlagsbuchhandlung J. A. Barth in Leipzig im gegenwärtigen Jahresbericht zum Abdruck. Ebenso enthält der letztere einen Nachruf auf G. D. Weyer aus der Fedèr des Herrn L. Pochhammer und eine ausführliche Darstellung des Lebens und der wissenschaftlichen Bestrebungen und Leistungen von Chr. Wiener; dieselbe ist von den Herren A. von Brill und L. Sohncke verfafst. Der letztere, der selbst inzwischen leider auch der Wissenschaft entrissen worden ist, hat sich den besonderen Dank der Vereinigung erworben, da er, obwohl nicht Mitglied derselben, sich der Bearbeitung eines Teiles der Biographie von Chr. Wiener für diesen Jahresbericht bereitwilligst unterzogen hat.

Besonderer Umstände wegen war es nicht möglich, in dem vorliegenden Jahresbericht einen Nachruf auf Ph. L. von Seidel zu veröffentlichen; es ist dies jedoch für den nächsten Band in Aussicht genommen.

Felix Buka.

Von **G. Hauck** in Berlin.

Am 3. December 1896 erlag Professor Dr. Felix Buka, Oberlehrer am städtischen Realgymnasium zu Charlottenburg und Docent an der K. Technischen Hochschule daselbst, im 44. Jahre seines Lebens einem Gehirnschlage.

Am 8. Januar 1852 in Myslowitz geboren, widmete sich Buka nach Absolvirung des Matthias-Gymnasiums in Breslau von Herbst 1869 ab dem Studium der Mathematik und Physik an der Universität und an der Gewerbe-Akademie zu Berlin. Der verstorbene Aronhold bezeichnete ihn damals als seinen Lieblingsschüler. Nach abgelegter Gewerbeschullehrer-Prüfung unterrichtete er mehrere Jahre an den Provinzial-Gewerbeschulen zu Schweidnitz und Elberfeld, promovirte 1876 in Göttingen und habilitirte sich 1879 an der Technischen Hochschule Berlin, wo er bereits seit einem Jahre als Assistent für darstellende Geometrie thätig gewesen war. Im Jahre 1880 wurde ihm die erste Lehrerstelle an der städtischen Mittelschule zu Charlottenburg, und als diese zum Realgymnasium erhoben war, im Jahre 1887 die erste Oberlehrerstelle daselbst übertragen. 1889 wurde er zum Docenten für kinematische Geometrie an der Technischen Hochschule und 1892 zum Professor ernannt. Die Assistentenstelle für darstellende Geometrie behielt er aus persönlicher Neigung bis zu seinem Lebensende bei.

In allen diesen Stellungen entfaltete er, Dank seinem hervorragenden Lehrgeschick, eine überaus erfolgreiche Wirksamkeit. Seine unermüdliche Pflichttreue, verbunden mit einer persönlichen Liebenswürdigkeit, der kein Opfer zuviel wurde, haben ihm die Zuneigung und Verehrung von Tausenden von Schülern erworben, deren Dankbarkeit ihm unvergänglich erhalten bleiben wird. — Die wissenschaftliche Thätigkeit Buka's bewegte sich auf den Gebieten der darstellenden, projectiven und kinematischen Geometrie. Seine Arbeiten zeichnen sich durch mathematische Schärfe und Klarheit aus, sowie durch eine seltene pädagogische Begabung, vermöge deren er überall zur gröfstmöglichen Einfachheit in Anordnung und Ausdruck durchzudringen suchte. — Ein besonderes Geschick hatte er in der Erfindung und Herstellung mathematischer Modelle, durch die er (oft für einen einzigen Schüler angefertigt) den Unterricht überaus anschaulich und fruchtbar zu gestalten wufste. Von denselben haben namentlich die auf projective Geometrie bezüglichen eine weitere Verbreitung gefunden.

Buka's Veröffentlichungen.

1. Über das sphärische Kurbelgetriebe und seinen Specialfall: Das Hooke'sche Gelenk. Göttingen 1876.
2. Bewegliche Modelle aus Stahlstäben für den Unterricht in der höheren Geometrie. Berlin. Winckelmann u. S. 1879.
3. Die Krümmung windschiefer Flächen in den Punkten einer geradlinigen Erzeugenden. Schlömilch's Zeitschrift XXVI (1881). S. 15—49.
4. Projectivische Mafsstäbe. (Mit 2 Tafeln u. 2 Mafsstäben.) Berlin. Winckelmann u. S. 1888. 12 S. gr. 4°.

5. Bemerkung zu der Grübler'schen Bestimmung der Krümmungsmittelpunkte der Polbahnen eines ebenen Systems. Schlömilch's Zeitschr. XXXIII (1888). S. 117—118.
6. Elemente der kinematischen Geometrie des zweigliedrigen ebenen Systems. (Mit 2 Tafeln.) Programm des städt. Realgymn. zu Charlottenburg 1890 (Nr. 103). 27 S. 4^0.
7. Grundzüge der darstellenden Geometrie für höhere Lehranstalten. (Mit 2 Tafeln.) Programm des städt. Realgymn. zu Charlottenburg 1894 (Nr. 101). XII 24 S. 4^0.
8. Sonnenuhr. Berlin 1895. Lehrmittelanstalt v. J. Bischof.

Ernst Schering.

Von **F. Klein** in Göttingen.

Am 2. November 1897 starb in Göttingen nach längerem Leiden Ernst Christian Julius Schering.

Der Verstorbene wurde geboren am 13. Juli 1833 zu Sandbergen bei Lüneburg, studirte in Göttingen noch unter Gaufs von 1852 an und wurde daselbst 1860 aufserordentlicher und 1868 ordentlicher Professor der Mathematik. Im Jahre 1869 wurde von der unter Leitung von Professor Klinkerfues stehenden Sternwarte eine zweite (theoretische) Abteilung unter Schering abgesondert, der u. a. die Fortführung der Beobachtungen in dem von Gaufs auf der Sternwarte eingerichteten erdmagnetischen Observatorium unterstellt wurde.

Schering's Name wird dauernd mit der Gesamtausgabe der Werke von Gaufs verbunden bleiben, die er im Auftrage der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften übernommen hatte, und von der bereits seit längerer Zeit 6 Bände vollendet vorliegen (die 1871 von Schering besorgte Neuausgabe der Theoria motus, welche gelegentlich als siebenter Band bezeichnet wird, war ein Privatunternehmen der Perthes'schen Buchhandlung, welche damals noch das, inzwischen erloschene Verlagsrecht besafs). Die grofse Sorgfalt und die Sachkenntnis, mit der Schering diese Ausgabe bearbeitete, sind allseitig anerkannt; um so bedauerlicher ist es, dafs er das Unternehmen nicht mehr selbst hat zu Ende führen können. Abgesehen von dem formalen Abschlusse, restiren noch wichtige Stücke des Nachlasses, vor allem Gaufs' Theorie der planetaren Störungen und seine Correspondenz über die Nicht-Euklidische Geometrie. Die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften wird sich angelegen sein lassen, das Unternehmen nunmehr mit Hülfe jüngerer Mitarbeiter nach Kräften zu fördern.

Die eigenen Untersuchungen von Schering schliefsen sich mehr

oder minder alle an die hiermit genannte Hauptaufgabe an: Schering unternimmt es, bald nach der einen, bald nach der anderen Seite, auf Gaufs zurückgehende Ansätze weiterzuführen. Hiermit war für ihn von vorn herein eine aufserordentliche Vielseitigkeit der Fragestellungen gegeben; im Übrigen bevorzugt er, wo es angeht, die abstract analytischen Ansätze. Wir geben hier eine Liste seiner Publicationen, die allerdings auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen kann:

Verzeichnis der wissenschaftlichen Arbeiten von E. Schering.

1857: Zur mathematischen Theorie elektrischer Ströme. (Preisschrift.) Göttinger Abh. II.

1858: Über die conforme Abbildung des Ellipsoides auf der Ebene. (Preisschrift.) Göttinger Abh. III.

1859: Théorèmes relatifs aux formes binaires quadratiques, qui représentent les mêmes nombres. Paris. Liouville's Journal de Math. IV.

1863: Über die dem Hauptgenus angehörenden Fundamentalclassen der binären quadratischen Formen. Berlin.

1867: Bernhard Riemann zum Gedächtnis. Gött. Nachrichten.

1868: Erweiterung des Gaufs'schen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen. Gött. Nachrichten.

1869: Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen. Göttinger Abh. XIV.

1870: Die Schwerkraft im Gaufs'schen Raume. Gött. Nachrichten.

1873: Hamilton-Jacobi'sche Theorie für Kräfte, deren Mafs von der Bewegung der Körper abhängt. Göttinger Abh. XVIII.

1873: Linien, Flächen und höhere Gebilde in mehrfach ausgedehnten Gaufs'schen und Riemann'schen Räumen. Gött. Nachrichten.

1873: Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaufs'schen und Riemann'schen Räumen. Gött. Nachrichten.

1874: Verallgemeinerung der Poisson-Jacobi'schen Störungsformeln. Göttinger Abh. XIX.

1876: Verallgemeinerung des Gaufs'schen Criteriums für den quadratischen Restcharakter einer Zahl in Bezug auf eine andere. Berl. Akademische Monatsberichte.

1877: Zur Feier der hundertsten Wiederkehr von Gaufs' Geburtstage. Gött. Nachrichten.

1877: Carl Friedrich Gaufs' Geburtstag nach hundertjähriger Wiederkehr. Göttingen.

1877: Analytische Theorie der Determinanten. Göttinger Abh. XXII.

1878: Théorie analytique des déterminants. Paris. Comptes Rendus 86.

1879: Bestimmung des quadratischen Restcharakters. Göttinger Abh. XXIV.

1879: Neuer Beweis des Reciprocitätssatzes für die quadratischen Reste. Gött. Nachrichten.

1880: Das Anschließsen einer Function an algebraische Functionen in unendlich vielen Stellen. Göttinger Abh. XXVII.
1881: La formule d'interpolation de M. Hermite exprimée algébriquement. Paris. Comptes Rendus 92.
1882: Zur Theorie der quadratischen Reste. Stockholm. Acta Mathematica I.
1884: Zur Lösung der Keppler'schen Gleichung. Gött. Nachrichten.
1885: Zum dritten Gaufs'schen Beweise des Reciprocitätssatzes für quadratische Reste. Berl. Akademische Monatsberichte.
1886: Beobachtungen im Gaufs'schen erdmagnetischen Observatorium während der Polarexpeditionen. Gött. Abh. XXXIII.
1887: Zahlentheoretische Bemerkung. Berlin. Crelle's Journal, 100.
1887: Carl Friedrich Gaufs und die Erforschung des Erdmagnetismus. Göttinger Abh. XXXIV.

Karl Weierstrafs.

Gedächtnisrede*), gehalten in der Sitzung der physikalischen Gesellschaft zu Berlin am 5. März 1897

von

Emil Lampe.

Als wir uns vor vierzehn Tagen zu unserer Sitzung hier versammelten, verbreitete sich unter uns die in einigen Abendzeitungen schon enthaltene Kunde, dafs an demselben Tage, dem 19. Februar, etwa um die Mittagsstunde Karl Theodor Wilhelm Weierstrafs nach längeren Leiden entschlafen sei. Da jedoch keine directe Nachricht vorlag, so unterblieb in jener Sitzung eine Bezugnahme auf die Trauerbotschaft, die dann am folgenden Tage durch die Mehrzahl der Zeitungen, am Sonntage durch die von den beiden überlebenden Geschwistern versandte Todesanzeige bestätigt wurde. Am Montag begleiteten wir die sterbliche Hülle zur Gruft. — In Weierstrafs verliert unsere Gesellschaft ein Mitglied, das ihr vierzig Jahre hindurch angehört hat, und obgleich er meines Wissens an den Sitzungen nicht teilgenommen hat, sondern nur einige Male zu Stiftungsfesten erschienen ist, so hatte er doch ein lebhaftes Interesse an unseren Arbeiten, und wir dürfen jetzt bei seinem Ableben unsere hohe Genugthuung darüber ausdrücken, dafs er durch sein Beharren in unserer Gesellschaft einige Strahlen des Ruhmesglanzes, die seinen Namen umgeben, auf sie hat fallen lassen.

---

*) Mit Genehmigung des Verfassers und der Verlagsbuchhandlung Johann Ambrosius Barth in Leipzig abgedruckt aus den Verhandlungen der physikalischen Gesellschaft zu Berlin für das Jahr 1897.

In dem letzten Jahrzehnt des ablaufenden Jahrhunderts verlassen uns so viele Männer, die wir als hehre Vorbilder in unserer Wissenschaft verehrt haben. Innerhalb weniger Jahre wurden uns Hermann von Helmholtz und Emil du Bois-Reymond entrissen, die, in höherem Alter stehend, so lange an der Spitze unserer Gesellschaft gewesen sind, ebenso die Mitbegründer der Gesellschaft, Brücke und Knoblauch, der weit jüngere unvergefsliche Kundt und der noch jugendliche Hertz. Jetzt ist uns auch Weierstrafs genommen, der letzte aus dem unvergleichlichen Kreise der Berliner Mathematiker, die von den fünfziger Jahren des Jahrhunderts an den Stolz der deutschen Mathematik, den Ruhm der hiesigen Akademie und Universität ausmachten. Zu einem engen Freundesbunde vereinigt, bildeten Kummer, Weierstrafs, Borchardt, Kronecker eine erlauchte Tafelrunde, an welcher mit erhobenem Gefühle die Fachgenossen teilnahmen; eine Phalanx hochangesehener Forscher, deren vereinte Kräfte die höchsten Aufgaben angreifen und bemeistern konnten. Als erster schied Borchardt 1880 aus, der mit feinem Verständnisse für die Eigenart der drei anderen, ihm geistig überlegenen Naturen als unabhängiger Privatmann zur Aufrechterhaltung des Freundschaftsverhältnisses und zur Förderung der wissenschaftlichen Arbeiten vielleicht mehr beitrug, als er in seiner vornehmen Bescheidenheit zugab. Die übrigen drei brachten ihr Leben höher bis in das letzte Jahrzehnt des Jahrhunderts. Zuerst wurde uns Kronecker jäh geraubt, der, obschon ein hoher Sechziger, als jüngster der drei Koryphäen in voller Schaffensfreudigkeit stand und ein längeres Wirken zu versprechen schien. Nach diesem seinem berühmtesten Schüler sank Kummer ins Grab, der sich schon länger als ein Jahrzehnt freiwillig von jeder Thätigkeit als Forscher und als Lehrer zurückgezogen hatte. Nun beklagen wir den Tod des letzten jener Tafelrunde, einen Tod, den wir zwar lange nahen sahen, der uns aber in dem Augenblicke, wo er eingetreten ist, doch überrascht hat, um so mehr, als wir den verehrten Greis immer wieder, wenn auch nur stundenweise, mit der Herausgabe seiner gesammelten Werke beschäftigt fanden.

Karl Weierstrafs ist als ältester Sohn des Rendanten Wilhelm Weierstrafs zu Ostenfelde in Westfalen am 31. Oktober 1815 geboren und gehörte, wie seine drei Geschwister, von denen sein Bruder, Professor Peter Weierstrafs, ein Philologe, und seine Schwester Elise ihn überleben, der katholischen Konfession an, da sein Vater zum Katholicismus übergetreten war. Auf dem Gymnasium zu Paderborn von Ostern 1829 bis zum Herbste 1834 für das Studium vorbereitet, bezog er die Universität Bonn und studirte dort von 1834 bis 1838 in der juristischen Facultät die Rechts- und Cameralwissenschaften. Als eifriges Mitglied des Corps Saxonia fehlte er, wie er später gern erzählte, keinen Abend auf der Ver-

bindungskneipe. Das juristische Studium, aus welchem als einzige Leistung eine kräftige Opposition bei der Promotion eines Freundes erwähnt wird, befriedigte ihn jedoch nicht, und daher begab sich der dreiundzwanzigjährige Jüngling, der schon früh durch die Mécanique céleste mächtig angezogen worden war, zu Gudermann nach Münster und studirte hier unter der Leitung dieses von ihm ungemein verehrten Lehrers privatim in den Jahren 1838 bis 1840 Mathematik; nur eine Vorlesung Gudermann's hat er in dieser Zeit gehört. Im Sommer 1841 bestand er das Examen pro facultate docendi in Münster und lieferte bei dieser Gelegenheit die Bearbeitung dreier Aufgaben, unter ihnen eine, bei der er sich die selbstständige Wahl des Themas erbeten hatte. Nach Ablegung des Probejahres in Münster bis zum Herbste 1842 übernahm er die Stelle eines Lehrers an dem Progymnasium zu Deutsch-Krone (Westpreufsen) unweit Schneidemühl und verblieb daselbst sechs Jahre. Von 1848 an war er Oberlehrer an dem Gymnasium zu Braunsberg in Ostpreufsen. Während seiner Gymnasiallehrerzeit verfafste er die Arbeiten über Abel'sche Functionen, deren Veröffentlichung seinen Ruhm begründete. In den Ferien kehrte er gern zu den Eltern und Geschwistern, mit denen er durch herzliche Liebe verbunden blieb, nach Westfalen zurück. Da sein Vater inzwischen Salinenbeamter zu Westernkotten geworden war, so ist unter anderem seine erste im Crelle'schen Journale erschienene Arbeit zur Theorie der Abel'schen Functionen aus Westernkotten vom 11. September 1853 datirt.

Als erste Frucht dieser Aufsehen erregenden Arbeiten erhielt er 1854 honoris causa den Doctorhut von der Universität Königsberg i. Pr., wo Richelot, durch Jacobi's Einflufs auf dasselbe Gebiet der Forschung gelenkt, zuerst erkannt hatte, wie weit der Braunsberger Gymnasiallehrer alle Mathematiker überflügelte, welche sich mit derselben Frage beschäftigten. Nach einem vorangegangenen Aufenthalte von Weierstrafs in Königsberg wurde ihm die Ehre des Gegenbesuchs von Richelot in Braunsberg zu teil, und eben dahin eilte Borchardt aus Berlin, um den jungen gleichstrebenden Forscher zu besuchen; zu jener Zeit wurde zwischen beiden Mathematikern die Freundschaft angeknüpft, die ohne jede Trübung mit steigender Innigkeit anhielt, bis der Tod Borchardt's 1880 dem schönen Bunde ein plötzliches Ende bereitete, als Weierstrafs auf dem Landsitze des erkrankten Freundes bei Rüdersdorf zu Beginn des Sommers selbst Erholung von einer Krankheit suchte. In rührender Dankbarkeit gedachte Weierstrafs des ersten Besuches seines Freundes zu Braunsberg am Tage der Vollendung seines achtzigsten Lebensjahres. — Zum Zwecke weiterer Studien wurde Weierstrafs 1856 unter Belassung seines Gehaltes nach Berlin beurlaubt, wie er auch vorher schon einen Urlaub für einen Aufent-

halt in Königsberg erhalten hatte. Die Erledigung des Lehrstuhls der reinen Mathematik an dem damaligen Gewerbeinstitute zu Berlin schuf dann die günstige Gelegenheit, dem einundvierzigjährigen Gelehrten eine angemessene Stellung in der Hauptstadt des Königreiches zu verschaffen. Es hat vielleicht einiges Interesse, die Persönlichkeiten zu erwähnen, welche bei der Besetzung der Stelle in Betracht kamen. Der Bericht des Directors Druckenmüller giebt zuerst an, dafs die Unterhandlungen mit Schellbach und Joachimsthal wegen des Dazwischentretens des Unterrichtsministeriums abgebrochen wurden. Druckenmüller wandte sich dann an Dirichlet und Plücker mit der Bitte um Nennung geeigneter Candidaten. Dirichlet empfahl Aronhold und Schoenemann, von denen jener als zu jung, dieser als zu alt befunden wurde. Plücker nannte Beer und Heine; der erstere wurde als zu kränklich verworfen, der letztere gefiel dem Director seines Wesens wegen nicht. Es verblieben drei geeignete Personen: Hesse, Schlömilch, Weierstrafs. Die mit Hesse angeknüpften Verhandlungen ergaben, dafs dieser ein Mafs der Lehrfreiheit wie an der Universität beanspruchte, was ihm nicht zugestanden werden konnte. Bei Schlömilch wurde gar kein Versuch gemacht, weil dem Vernehmen nach dieser doch nicht Dresden verlassen würde. Es blieb also Weierstrafs, als dessen Vorzug gerühmt wird, dafs er nicht, wie Hesse, durch Traditionen von der Universität befangen sei. Der gewaltige Eindruck, den das Erscheinen von Weierstrafs in Berlin hervorgerufen hatte, findet in dem beredten Berichte des Directors Druckenmüller einen warmen Ausdruck, wonach eben neben Weierstrafs die anderen genannten Mathematiker im Grunde nur dazu dienen, seinem Werte die passende Folie zu geben. Auf diesen Bericht vom 8. Mai 1856, der aber erst am 29. Mai abgesandt zu sein scheint, wurde am 14. Juni vom Handelsminister die Anstellung von Weierstrafs verfügt, welche indes vom 1. Juni an schon datirte, und der nunmehrige Professor Weierstrafs wurde am 16. Juni in feierlicher Versammlung dem Lehrkörper vorgestellt. Unter dem 12. November desselben Jahres erhielt der Director Druckenmüller die Benachrichtigung, dafs der Professor Weierstrafs vom Unterrichtsminister gleichzeitig zum aufserordentlichen Professor an der Universität ernannt sei. Zu derselben Zeit erfolgte auch seine Wahl in die Akademie der Wissenschaften, so dafs er seine Antrittsrede am 9. Juli, dem Leibniztage des folgenden Jahres 1857, in der Akademie halten konnte. Die Erwiederungsrede des Secretärs Encke mit ihrem herzlichen Willkommensgrufse für den neuen Akademiker spiegelt ebenfalls die freundliche und erhobene Stimmung wieder, mit welcher der frühere Gymnasialoberlehrer in diesen erlauchten Kreis aufgenommen wurde.

Die anstrengende Lehrthätigkeit in Berlin, welche zwölf Stunden

Vorlesungen an dem Gewerbeinstitute erforderte, aufserdem mindestens eine Privatvorlesung und ein Publicum an der Universität, ferner die in dem engen Verkehr mit den mathematischen Freunden gesteigerte wissenschaftliche Arbeit konnten nicht ohne Einflufs bleiben auf den Gesundheitszustand des neuen Professors. Infolge der Überreizung der Nerven zeigten sich bald Anzeichen der Krankheit, welche ihn bis zu seinem Tode gepeinigt hat. Im Sommer 1859 mufste er vor Beendigung des Semesters Urlaub zu einer Badereise nehmen, und im März 1860 machte er Anzeige von einem Schwindelanfalle, der ihn bei einer Vorlesung in der Universität überrascht hatte. Diese Vorboten einer ernsten Störung der Nerven wurden jedoch nicht genügend beachtet; da erfolgte am 16. December 1861 die Katastrophe. Mitten während des Vortrags an der Universität im Auditorium 17 überfiel ihn wieder der Schwindel; er taumelte von der Tafel auf den Lederstuhl des Katheders, einige Studenten holten eilig ein Glas Wasser und führten ihn fort. Die Krankheit war in einer solchen Heftigkeit ausgebrochen, dafs die schlimmsten Besorgnisse gehegt wurden. Unter der sorgfältigen Pflege seiner Umgebung erholte er sich indessen, obschon nur sehr langsam. Der Hausarzt, der im März 1862 vom Director des Gewerbeinstituts befragt wurde, welche Aussichten er für das Sommersemester eröffnete, konnte keine Zusage für Wiederaufnahme der Lehrthätigkeit geben, weil der Kranke noch nicht die Haltung des Nervensystems und die Energie des Willens zu erringen vermöchte, und weil immer noch krampfhafte Erscheinungen vorhanden wären. Im Juni nach Bad Liebenstein abgereist, wurde er in seiner Gesundheit soweit gekräftigt, dafs im Herbste der Arzt die Wiederaufnahme eines Teiles der Lehrthätigkeit für den Winter 1862/63 gestattete, den Umfang aber auf höchstens eine Stunde täglich beschränkte. Aus diesem Grunde wurde Weierstrafs nun dauernd am Gewerbeinstitut durch Aronhold vertreten, behielt aber das Einkommen der Stelle bis zum Frühjahre 1864. Erst zu diesem Termine war es möglich geworden, für ihn an der Universität zu den beiden ordentlichen Lehrstühlen für Mathematik, welche Ohm und Kummer inne hatten, ein drittes Ordinariat zu schaffen.

Diese Stellung behielt Weierstrafs vom Sommer 1864 bis zu seinem Tode; in ihr haben wir ihn wirken und schaffen sehen, geehrt und geliebt von allen, welche das Glück hatten, mit ihm in Berührung zu kommen. Trotz aller Leiden, denen er Stand halten mufste, hat er sein Leben höher gebracht, als wir es nach dem geschilderten Einbruch in seine Gesundheit zu Anfang der sechziger Jahre hoffen durften. Die Ferien benutzte er immer zur Erholung in Sommerfrischen und freute sich sehr, wenn er bei solchen Gelegenheiten Freunde um sich sehen konnte. Diese Zeit der Ruhe mufste er, besonders in seinen späteren Lebensjahren, öfter über

die Ferien hinaus verlängern. — Zur Feier seines siebzigsten Geburtstages wurde ihm von Freunden und Schülern seine Marmorbüste überreicht, eine Denkmünze mit seinem Bildnis geprägt; ein Festmahl vereinte viele Mathematiker aus nah und fern. Die Arbeitspause, welche er sich hiernach auferlegen mufste, war bedeutend länger als sonst. Wiederholt versuchte er dann die Aufnahme seiner Lehrthätigkeit und konnte noch mehrere Male, besonders im Sommer, seine Vorlesungen beendigen. Endlich jedoch mufste er auf diese ihm so liebe Beschäftigung verzichten. Die letzten Jahre seines Lebens brachte er still in seinem Hause auf dem Rollstuhle zu, weil er nicht mehr selbständig gehen konnte. Ohne vermählt gewesen zu sein, führte er mit seinen zwei Schwestern, von denen die eine, Clara, ihm vor Jahresfrist im Tode vorangegangen ist, ein trautes Familienleben, in das er jeden gern einführte, der zu ihm in nähere Beziehungen trat. Ein Lungenleiden, vielleicht Folge der Influenza, die in seinem Hause herrschte, bereitete ihm am 19. Februar 1897 ein schnelles Ende. Dies sind die äufseren Umrisse eines an wissenschaftlicher Arbeit und an hoch bedeutsamen Früchten derselben reich gesegneten Lebens.

Im Hinblick auf die frühe Entwickelung mancher Mathematiker ersten Ranges, die oft schon im Knabenalter deutliche Zeichen der ihnen angeborenen Geistesrichtung gegeben haben, ist wohl die Meinung ausgesprochen worden, dafs die höchsten Leistungen in der Mathematik nur von solchen Geistern stammten, die sich von Kindheit an in mathematischen Forschungen ausgezeichnet hätten. Als Gaufs seine Disquisitiones arithmeticae bereits vollendet hatte, stand er in demjenigen Lebensalter, in welchem Weierstrafs erst anfing, sich dem Studium der Mathematik zu widmen. Trotz solcher und ähnlicher Beispiele mufs man aber jene Meinung als irrig erklären. In unserem vielgestaltigen Leben gehören günstige Einflüsse der nächsten Umgebung eines Kindes dazu, um die Entfaltung mancher Geistesanlagen, die in der Knospe vorhanden sind, zu begünstigen, jene Knospe zur Blüte zu bringen. Besonders können bedeutende Personen, mit denen das Kind zusammentrifft, vor allem anregende Lehrer dem kindlichen Gemüte Neigung für einen Beruf einflöfsen, für den keine besonderen Talente vorhanden sind. Kummer und Emil du Bois-Reymond sind von der Theologie aus, jener zur Mathematik, dieser zur Physiologie übergegangen und haben dann in diesen neuen Gebieten das Feld gefunden, wo ihre Genien alle Kräfte entfalten konnten. Und wenn ein Weierstrafs erst nach der Beendigung des juristischen Trienniums erkennt, dafs seine wahre Bestimmung ihn auf die Mathematik weist, so braucht man sich nicht zu ereifern, wenn junge Männer nach den ersten Semestern des Studiums statt des zuerst erwählten Faches ein anderes vorziehen. Dafs aber in Weierstrafs die höchste mathematische Be-

fähigung und ein eiserner Fleifs mit zielbewufstem Willen gepaart waren, das ist uns über alles Erwarten offenbar geworden, als 1894 der erste Band seiner Werke mit den Arbeiten erschienen ist, welche in den drei Jahren seines Aufenthaltes in Münster entstanden sind und bisher ungedruckt bei ihm im Kasten geruht hatten. Die im Sommer 1840 abgefafste Arbeit für die Oberlehrerprüfung zeigt den ehemaligen Juristen als fertigen Mathematiker und im Besitze derjenigen Gedanken und Hülfsmittel, die ihn zu den höchsten Ergebnissen führen sollten. Es ist gewifs selten, dafs eine nach so kurzer Studienzeit und zu solcher Gelegenheit verfafste Arbeit 54 Jahre nach ihrer Entstehung das Interesse wissenschaftlicher Kreise in gleichem Mafse fesselt; nicht weniger merkwürdig ist es, dafs sie solange ungedruckt geblieben ist, obschon der Verfasser seitdem mehrfach aufgefordert wurde, die ganze Arbeit zu veröffentlichen, von der ein Teil des Inhaltes in eine andere Abhandlung im 52. Bande des Crelle'schen Journals übergegangen war. Andere ebenfalls in jener Münsterer Periode entstandenen und jetzt erst bekannt gegebenen Aufsätze zur Theorie der Potenzreihen und über die Definition analytischer Functionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen operiren genau mit den Elementen, aus denen Weierstrafs seine Functionentheorie aufbaute.

Diese Theorie ist nämlich das Lebenswerk des grofsen Toten. Nicht möchte ich dies so verstanden wissen, als ob Weierstrafs, wie ein einseitig gebildeter Mathematiker, nur ein Gebiet gekannt und bearbeitet, die anderen vernachlässigt hätte. Im Gegenteil, man kann sich kaum vorstellen, mit welcher Universalität er alle Zweige der Mathematik beherrschte, wie genau er über alle hervorragenden Arbeiten seiner Wissenschaft Bescheid zu geben wufste, wie vielseitig er seine Schüler anregte. Wie aber Abel einst darüber erstaunt gewesen war, dafs das scheinbar so sicher gefügte Gebäude der Mathematik keine zuverlässigen Fundamente besäfse, so erkannte Weierstrafs das Bedürfnis strengerer Methoden zur Sicherung der Wahrheiten der Analysis gegen alle Anzweifelungen. Die Schilderung der Leistungen von Weierstrafs auf diesem seinem Forschungs gebiete erheischt aber solche eingehenden sachlichen Auseinandersetzungen, dafs der Versuch an dieser Stelle scheitern würde. Man braucht sich nur der Worte zu erinnern, mit welchen Kronecker am siebzigsten Geburtstage von Weierstrafs die Tischrede einleitete, und zwar vor einer Versammlung, die zum gröfsten Teile aus Schülern des Jubilars bestand. Manche Probleme der Mathematik, so führte Kronecker aus, sind uralt und jedermann geläufig, so die Quadratur des Kreises, die algebraische Lösung der Gleichungen. Das Problem aber, an dessen Lösung Weierstrafs seine Lebensarbeit setzte, ist von ihm selbst gröfstenteils erst formulirt, daher

weder allgemein bekannt, noch auch mit wenigen Worten auszusprechen. Um das Verständnis für die Leistungen von Weierstraſs zu erleichtern, wollen wir lieber einige seiner Hauptarbeiten kurz besprechen und in möglichstem Anschluſs an seine Ausdrucksweise ihre Ziele darlegen.

Wir übergehen kurz die Abhandlung über die Theorie der analytischen Facultäten, eine auf diesem Gebiete abschlieſsende Arbeit, in welcher die strengeren Begriffe der Functionentheorie von Weierstraſs geltend gemacht werden.

In dem Centrum aller Arbeiten von Weierstraſs stehen die Abel'schen Functionen; man könnte sogar sagen, daſs alle allgemeinen functionentheoretischen Untersuchungen von ihm nur zu dem Zwecke unternommen sind, um das Problem in Vollständigkeit und Klarheit zu lösen, das durch die Forderung der Darstellung der Abel'schen Functionen jener Zeit gestellt war. Wie Abel und Jacobi statt der von Legendre untersuchten elliptischen Integrale die Umkehrungen derselben betrachteten und dadurch zu den geschmeidigen elliptischen Functionen mit ihrem Reichtum an interessanten Eigenschaften geführt wurden, so handelt es sich in der Theorie der Abel'schen Functionen um die Umkehrung zunächst der hyperelliptischen Integrale erster Gattung. Das algebraische Additionstheorem und die Periodicität bleibt auch für diese eindeutigen Functionen von ϱ Veränderlichen erhalten, wo ϱ den Rang des hyperelliptischen Gebildes bezeichnet. In der wirklichen Darstellung jener Functionen besteht die Lösung des sogenannten Jacobi'schen Umkehrungsproblems. Diese Aufgabe lösten Göpel und Rosenhain für den Fall $\varrho = 2$ auf einem Wege, der eine Verallgemeinerung auf allgemeinere Fälle nicht zulieſs. Unabhängig von ihnen fand dagegen Weierstraſs zu derselben Zeit die Lösung des Problems für ein beliebiges ϱ auf einem ganz anderen Wege. Es gelang ihm, die Abel'schen Functionen als Quotienten zweier beständig convergenten Potenzreihen darzustellen. Die Zähler und Nenner sind ganze rationale Functionen von Thetafunctionen von ϱ Veränderlichen, und so wurde er zu den Thetafunctionen beliebig vieler Variabeln geführt, deren Form ihm vorher unbekannt gewesen war. Weierstraſs entwickelte die von ihm gefundenen Resultate ausführlich in der groſsen Abhandlung, welche im 52. Bande des Journals für Mathematik erschien, deren Fortsetzung versprochen, aber nie gegeben worden ist.

Abel hat nämlich den dieser Theorie als Basis dienenden Satz, der als Abel'sches Theorem bezeichnet wird, auf die Integrale der aus einer beliebigen algebraischen Irrationalität entspringenden algebraischen Functionen ausgedehnt. Auch an diese Erweiterung des Abel'schen Theorems knüpft sich ein Umkehrungsproblem. Eine direkte Lösung desselben legte Weierstraſs bereits im Sommer

1857 der Berliner Akademie vor, zog aber das schon der Druckerei übergebene Manuskript zurück, weil Riemann's Arbeit über dasselbe Problem wenige Wochen später im Journal für Mathematik erschien.*) Um nachzuweisen, dafs die Resultate Riemann's mit den seinigen übereinstimmten, mufste Weierstrafs gewisse algebraische Untersuchungen führen, die er selbst für nicht ganz leicht erklärt, und die viel Zeit in Anspruch nahmen. Hierdurch wurde dann wieder eine Umarbeitung nötig, und erst 1869 erhielt die Lösung des allgemeinen Umkehrungsproblems durch ihn die Gestalt, in welcher er sie in seinen Vorlesungen vortrug, und in welcher sie in der Bearbeitung der Vorlesungen über Abel'sche Functionen veröffentlicht werden wird.

Das hier berührte Zusammentreffen der Riemann'schen und der Weierstrafs'schen Lösung desselben Problems auf ganz verschiedenen Wegen ladet zu einer Parallele ein zwischen diesen beiden congenialen Naturen, zu deren voller Durchführung aber hier kein Raum ist; doch sollen einige Gedanken darüber Platz finden. Die geometrische Veranschaulichung des Verlaufes der algebraischen Functionen in den mehrblättrigen Riemann'schen Flächen ist ungemein anregend und fruchtbar gewesen, und viele Schüler von Weierstrafs bedienen sich dieser Darstellung, welche der Phantasie Flügel zu verleihen scheint. Demgegenüber verharrte Weierstrafs bei der Ansicht, dafs die Sätze der reinen Analysis durch rein analytische Beweismethoden, ohne Hineinziehung der Geometrie, untersucht werden müfsten, und zeigte unter anderem an dem sogenannten Dirichlet'schen Principe, dafs scharfe analytische Beweisführung weit verbreitete Anschauungen und Überzeugungen zu nichte machen könne. Für ihn ist die Potenzreihe das Instrument, vermittelst dessen er die analytischen Functionen bewältigt; dieses „Element" hat er sein Leben hindurch benutzt und dadurch den analytischen Charakter der Functionentheorie in aller Schärfe und Reinheit festgelegt. Man mufs jedoch nicht wähnen, dafs Weierstrafs den von Riemann betretenen Weg mifsachtete; er hat es ja selbst ausgesprochen, dafs dem Forscher jeder Weg frei steht, dafs es sich aber um die Begründung handelt. Jedenfalls war er von Bewunderung erfüllt für die Leistungen seines dem Leben nur zu früh entrissenen Rivalen, und die herzliche Aufnahme, welche Riemann 1859 bei seiner Anwesenheit in Berlin fand, als er nach seiner Ernennung zum korrespondirenden Mitgliede der preufsischen Akademie den Berliner Mathematikern seinen Besuch abstattete,

*) Nach der Einleitung des im Drucke schon erheblich vorgeschrittenen, aber noch nicht vollendeten Bandes der Vorlesung über Abel'sche Functionen. Ich verdanke die Mitteilung Hrn. Hettner, der in Gemeinschaft mit Hrn. Knoblauch diese Vorlesung für die gesammelten Werke bearbeitet.

bewies ihm, wie hoch dieselben ihn schätzten; dies wurde ja später (1866) durch die Wahl Riemann's zum auswärtigen Mitgliede bestätigt.

Es ist nicht möglich, auf die ganze Gedankenreihe der Weierstrafs'schen Arbeiten hier in ähnlicher Weise einzugehen, wie dies oben mit derjenigen über die Abel'schen Functionen versucht ist. Wir können nicht einmal über alle die fundamentalen Abhandlungen berichten, welche, in Anlehnung an die eben besprochenen, die allgemeine Functionentheorie behandeln oder tief liegende algebraische Probleme in meisterhafter Weise erledigen. Es sollen nur noch einige Dinge erwähnt werden, welche auf manchen Gebieten Umwälzungen hervorgerufen haben.

Aus der Theorie der elliptischen Functionen ist vor allem das Aufgeben der Jacobi'schen Bezeichnungen, der Aufbau der ganzen Lehre mit Hülfe der „Weierstrafs'schen Functionen“ $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ zu nennen. Es gehörte die Sicherheit und Klarheit des Meisters dazu, die Wege zu verlassen, auf denen Jacobi seine von der ganzen mathematischen Welt bewunderten Erfolge errungen hatte, und den Studenten eine nirgends veröffentlichte neue Theorie vorzutragen. Den Unterschied beider Arten charakterisirt man jetzt durch die Einteilung der elliptischen Functionen in verschiedene Stufen. Für die erste Stufe liegt die Bearbeitung in der Weierstrafs'schen Theorie vor, für die zweite in der Jacobi'schen. Um eine Stimme aus dem Auslande hier anzuführen, so rühmt der so früh verstorbene Halphen, der zuerst die französischen Mathematiker in die Weierstrafs'schen Bezeichnungen durch seinen Traité des fonctions elliptiques eingeweiht hat, den Weierstrafs'schen Entwickelungen einen unbestreitbaren Vorzug über die früheren Bezeichnungen nach. In den Anwendungen bilden sie nach ihm einen grofsen Fortschritt, besonders wegen des Vorteils, dafs sie bei der Umkehrung der elliptischen Integrale immer dieselben Formeln liefern, ohne dafs die Anzahl der reellen Factoren des Polynoms unter dem Wurzelzeichen hierbei in Betracht käme. Das Gerippe dieser Theorie ist in den „Formeln und Lehrsätzen zum Gebrauche der elliptischen Functionen“ von Hrn. Schwarz veröffentlicht worden, die vollständige Darstellung nach den gehaltenen Vorlesungen wird in den gesammelten Werken erwartet.

Wir weisen nur im Fluge auf die in den Abhandlungen der Berliner Akademie erschienene, epochemachende Arbeit zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen hin (1876), welche, wie mehrere andere Schriften von Weierstrafs, ins Französische übersetzt worden ist und auf die neueste Entwickelung der französischen Mathematik einen bedeutenden Einflufs ausgeübt hat. Die deutsche Nation trägt damit gegen die französische den Dank ab, der dieser letzteren für die fundamentalen Untersuchungen von Cauchy über

Functionen mit complexen Variabeln geschuldet wird; denn auf diesen Forschungen beruhen ja wieder die bahnbrechenden Gedanken von Weierstraſs, bei denen die Spuren Cauchy'scher Überlegungen sich überall zeigen.

Der Nachweis einer stetigen Function, welche in keinem Punkte eine Ableitung besitzt, wirkte in höchstem Maſse aufklärend für die Begriffsbestimmungen der ersten Eigenschaften der Functionen. Die im Anfange der sechziger Jahre gehaltene Vorlesung über Zahlen, die mit beliebig vielen Einheiten gebildet werden, wies damals schon auf Schwierigkeiten hin, die später den Ausgangspunkt fruchtbarer Forschungen gebildet haben. Auf dem Gebiete der Algebra lieferte Weierstraſs einen Beweis des Fundamentaltheorems der algebraischen Gleichungen, sowie erschöpfende Behandlungen über die Transformationen quadratischer und bilinearer Formen. Für die Minimalflächen gab er die fundamentalen Entwickelungen, mit deren Hülfe Hr. Schwarz die groſse Reihe seiner bedeutsamen Arbeiten auf diesem Gebiete erledigen konnte. Kurz, wohin man auch auf dem Gebiete der Analysis blickt, überall wirkte Weierstraſs reformirend, indem er stets bis zu den tiefsten Gründen der Fragen vordrang.

Während er so in seiner Gedankenwerkstätte unablässig an den schwierigsten Problemen arbeitete, erledigte er noch manche anderen, zeitraubenden Geschäfte. Im Auftrage der Akademie gab er 1881/82 die gesammelten Werke von Steiner in zwei Bänden heraus, und nach dem Tode Borchardt's (1880), der mit der Herausgabe der Jacobi'schen Werke betraut war, aber nur den ersten Band bis zum Drucke der letzten Abhandlung geführt hatte, übernahm Weierstraſs auch die Last der Veröffentlichung dieser Werke und führte mit Hülfe seiner ihm getreulich beistehenden Schüler nach längeren Jahren (bis 1891) die Bearbeitung der sieben Bände glücklich ans Ziel. Ebenso trat er nach Borchardt's Tode in Gemeinschaft mit Kronecker die Erbschaft der Redaction des Journals für Mathematik an, von deren Geschäften er sich aber in der zweiten Hälfte der achtziger Jahre mehr und mehr zurückzog.

In Anerkennung seiner Verdienste um die Universität, wo er wegen seines idealen Sinnes und seiner Lehrerfolge in höchstem Ansehen stand, erwählten ihn die Professoren der Hochschule 1873 zum Rector magnificus, und er bewährte sich hier, wie in seinem ganzen Leben als ein Mann von Welt, dem in seinem natürlichen Wesen nichts ferner lag als die Art eines Stubengelehrten, der vielmehr sein Lebenlang den freien Ton eines frischen Burschen schätzte und liebte. Der in der Norddeutschen Allgemeinen Zeitung vom Sonntag dem 21. Februar erschienene sympathische Nekrolog aus offenbar sachkundiger Feder berichtet, daſs damals freundliche Beziehungen zu der kronprinzlichen Familie entstanden, und daſs bei

den Gesellschaften im kronprinzlichen Palaste besonders Moltke und Weierstrafs sich zu einander hingezogen gefühlt und manches Stündchen in einer Ecke vertraulich plaudernd verbracht hätten.

Bei Gelegenheit seines siebzigsten Geburtstages erzählte Weierstrafs mit grofsem Behagen, dafs er unter den vielen ihm in seinem Leben zugefallenen Pflichten vor 1848 in Deutsch-Krone das Amt eines Censors für das dortige Localblatt ausgeübt hätte. Der königliche Beamte, dem die Überwachung übertragen war, hatte eine Abneigung gegen die schönwissenschaftliche Litteratur und begnügte sich daher mit der Durchsicht des politischen Teiles; die Beaufsichtigung des belletristischen Teiles übertrug er dem Mathematiker Weierstrafs. Da nun gerade zu jener Zeit die Herwegh'schen Freiheitslieder erschienen und Weierstrafs zugesandt wurden, so machte es ihm ein besonderes Vergnügen, unter den Augen des streng conservativen Censors die revolutionären Freiheitslieder abdrucken zu lassen, sicher, dafs jener die Gedichte nicht lesen würde. Endlich wurde durch Einschreiten der vorgesetzten Behörden diesem burschikosen Spafse ein Ende gemacht, der nur dem Beamten, nicht aber dem Gymnasiallehrer Weierstrafs Unannehmlichkeiten einbrachte. Hier haben wir den frischen, frohgemuten Weierstrafs, der trotz seiner 28 bis 30 wöchentlichen Lehrstunden, unter ihnen Schreib- und Turnstunden, und trotz seiner tiefsinnigen Untersuchungen über die Abel'schen Functionen im Kreise fröhlicher Freunde zu lustigem Schwanke bereit ist.

In der Enge der Kleinstadt und in den Banden des seine Kräfte beanspruchenden Standes eines Gymnasiallehrers fühlte er sich durchaus nicht unbehaglich; im Gegenteil, er bewahrte dieser Zeit ein dankbares Andenken und dachte noch an seinem achtzigsten Geburtstage mit Frohgefühl an seine Gymnasiallehrerzeit zurück, tadelte auch diejenigen, welche sich in diesem Stande nicht wohl zu fühlen vermöchten. Was er damals in seiner Rückerinnerung beklagte, war die ganz ungenügende Bibliothek des Gymnasiums, für deren Ersatz das spärliche Einkommen keine hinreichenden Mittel bot, und der Mangel an Freunden des Faches zum Austausche von Gedanken. Er mufs aber auch einen liebenswürdigen Director in Braunsberg gehabt haben, wie aus einer anmutigen Erzählung hervorgeht, welche dieser über seinen früheren Untergebenen, den später so berühmten Akademiker in Umlauf gesetzt hat. Als eines Morgens aus einer Klasse grofser Lärm gehört wurde, stellte sich heraus, dafs Weierstrafs, der die Stunde zu geben hatte, nicht erschienen war. Der Director begab sich persönlich in die Wohnung von Weierstrafs; auf das Anklopfen tönte von innen das Herein, und drinnen safs Weierstrafs, obschon es lichter Tag war, im verdunkelten Zimmer bei herabgebrannter Lampe. Er hatte die Nacht hindurch gearbeitet und den Anbruch des Tages nicht

gemerkt. Vom Director darauf aufmerksam gemacht und auf die ihn erwartenden lärmenden Schüler hingewiesen, erwiderte er nur, er könne seine Arbeit nicht unterbrechen; denn er sei einer wichtigen Entdeckung auf der Spur, die in der Wissenschaft Aufsehen machen werde. Eine moderne Wiederholung des Noli turbare circulos meos!

Die Mitteilung dieser kleinen Geschichten scheint deshalb hier nicht unpassend zu sein, weil es sich ja darum handelt, aus solchen einzelnen Zügen das lebensvolle Bild des grofsen Mannes zusammenzusetzen.

Derselbe freie Sinn, mit welchem Weierstrafs das Leben gewissermafsen als Souverän behandelte, zeigte sich auch in seinen Veröffentlichungen. Die Entdeckungen, welche er in seinem langen, arbeitsvollen Leben gemacht hat, sind von ihm nur zum kleineren Teile dem Drucke übergeben worden. Vielleicht verursachte ihm die Arbeit des Redigirens manche Unbequemlichkeit, zumal er an die endgültige Form peinliche Anforderungen stellte; vielleicht auch hatte er über irgend einen nebensächlichen Punkt noch nicht völlige Klarheit gewonnen; dies genügte dann für ihn, die Veröffentlichung zurückzuhalten. Wie H. v. Helmholtz von sich bei seinem Jubiläum einst sagte, er hätte seine Arbeiten im Grunde nur ausgeführt, um sich selber klar zu werden über die vorliegenden Probleme, an sonstige Zwecke aber hätte er kaum dabei gedacht, so gilt das Gleiche auch von Weierstrafs. Dieser trat sogar nach erlangter Klarheit mit seinen Ergebnissen nicht einmal immer in die Öffentlichkeit, sondern war zufrieden, wenn er seinen Freunden und Schülern Einblick in seinen Gedankengang gewähren konnte. Hierin bewährte er die Trefflichkeit eines Ausspruches von Kummer: Eine echte Freude empfindet der Forscher nur einmal bei der Entdeckung einer Wahrheit; das spätere Anschauen derselben läfst kalt. Doch kommt jener Freude die andere nahe, wenn der Entdecker andere Menschen zur Erkenntnis der Wahrheit leiten kann. Besonders war es in den Vorlesungen und in den Mitteilungen an die Mitglieder des seit 1861 bestehenden mathematischen Seminars, wo Weierstrafs die Resultate seiner Forschungen entwickelte. Mit Rücksicht auf die Wichtigkeit dieser Vorlesungen wurden die Nachschriften derselben vervielfältigt, und dadurch verbreitete sich allmählich die Kenntnis der in ihnen niedergelegten Gedanken. In den gesammelten Werken werden die Hauptvorlesungen von denjenigen seiner Schüler bearbeitet erscheinen, die er schon bei Lebzeiten um die Übernahme dieser ehrenvollen Arbeit gebeten hatte. Der Inhalt einiger dieser Vorlesungen ist schon früher ohne seine Mitwirkung veröffentlicht worden, so besonders in der „Theorie der analytischen Functionen" von O. Biermann.

Der Universalität des mathematischen Genius von Weierstrafs entspricht im Anfange seiner Lehrthätigkeit an der Universität die

Vielseitigkeit der Gegenstände, über welche er vortrug. An dem Gewerbeinstitute war er zu einem wöchentlich sechsstündigen Vortrage über analytische Geometrie der Ebene und des Raumes, ferner zu einem ebenfalls sechsstündigen über Infinitesimalrechnung verpflichtet. Den ersteren begann er mit der allgemeinen Streckentheorie, um von diesem Ausgangspunkte aus alle Sondererscheinungen zu beherrschen. In der Differential- und Integralrechnung liefs er die Schärfe seiner functionentheoretischen Gesichtspunkte hervortreten. Überall leuchteten seine originalen Gedanken hervor; allerdings waren diese Vorträge für den Durchschnitt der Zuhörer etwas zu hoch, einige der technischen Studenten aber wurden durch sie zu tieferen Studien angeleitet. Hr. Hamburger gehörte zur Zahl der ersten Schüler von Weierstrafs im Gewerbeinstitute, und Hr. Schwarz wurde ebenda der begeisterte Anhänger von Weierstrafs, wie wir ihn bis zur heutigen Stunde kennen. Zu derselben Zeit las Weierstrafs an der Universität über die Theorie der elliptischen Functionen (nach Jacobi'scher Bezeichnungsweise) und über Functionentheorie, sowie Variationsrechnung, seine später oft gehaltenen Vorträge; daneben aber auch über Einleitung in die Analysis und geometrische Optik. Aus dem letzteren Gebiete stammt die einzige physikalische Arbeit von Weierstrafs: „Über eine geometrische Construction, wodurch man den Weg eines Lichtstrahls durch ein System sphärischer Flächen in aller Strenge verfolgen kann", ein Vortrag, der im Tageblatt der Wiener Naturforscherversammlung 1856 abgedruckt und dessen Inhalt von Hrn. Lummer in die Bearbeitung der geometrischen Optik, welche er für das Pfaundler'sche Lehrbuch der Physik geliefert hat, aufgenommen worden ist. Im Wintersemester 1862/63 überraschte Weierstrafs seine Studenten dadurch, dafs er in dem angekündigten Kolleg über elliptische Functionen zum erstenmale die Theorie seiner grundlegenden Functionen $\wp(u)$ und $\sigma(u)$ entwickelte. Nach Steiner's Tode übernahm er auch die Vorlesungen über synthetische Geometrie, übertrug dieselben aber später auf die neu berufenen aufserordentlichen Professoren. Nun erst regelte sich der Kreislauf seiner regelmäfsig abwechselnden Vorlesungen: die Theorie der elliptischen Functionen und ihre Anwendungen, allgemeine Functionentheorie, Abel'sche Functionen, Variationsrechnung. Die Herren Hettner, Knoblauch, Fritz Kötter, Phragmén und Stickelberger werden diese Vorlesungen in den gesammelten Werken herausgeben.

An dieser Stelle ist es vielleicht passend, einige Worte über die Vortragsweise von Weierstrafs einzufügen. Als er 1856 in Berlin seine Vorlesungen begann, waren dieselben zwar durch Originalität, durch Tiefe der Gedanken und durch den Reichtum an Gesichtspunkten gleich ausgezeichnet; aber er hatte als Vortragender noch nicht die ruhige Sammlung gewonnen, durch welche die über-

sprudelnden Ideen für den Hörer in übersichtliche Entwickelungen zu bringen waren. In seinem freien Vortrage versah er sich leicht und war dann genötigt, in der nächsten Vortragsstunde ganze Partien der vorangehenden Vorlesung zurückzunehmen und neu darzustellen. Dazu kam ein anderer, ihn belästigender Umstand. Wenn er beim Schreiben dicht vor der Tafel stand, so schienen sich ihm die Buchstaben an der Tafel zu bewegen, und damit war der Beginn der oben erwähnten Schwindelanfälle gegeben. Gegen diesen unangenehmen Einfluſs schützte er sich nach den Erfahrungen der ersten Jahre seit 1862 dadurch, daſs er einen Zuhörer zum Schreiben an der Tafel benutzte, während er selbst, in einiger Entfernung bequem sitzend, mit seinem in der Hand gehaltenen Schlüsselbunde oder auch mit seinem Spazierstocke den Vortrag in nachdrücklichen Bewegungen begleitete und zugleich den Anschreiber überwachte. Auf diese Weise gewannen seine Vorträge allmählich die abgerundete und vollendete Gestalt, welche später an ihnen mit Recht gerühmt wurde. Weil er in diesen Vorlesungen seine eigensten Gedanken preisgab, so zog er dadurch jene groſse Schar von Schülern an, die ihn als ihren Lehrer liebten und verehrten.

Die Verehrung, mit welcher die Schüler von Weierstraſs an ihm hingen, wurde aber besonders dadurch erzeugt und genährt, weil in ihm der hohe wissenschaftliche Sinn mit dem feinsten Verständnisse aller menschlichen Eigenschaften harmonisch vermählt war, sodaſs er von sich mit vollem Rechte hätte sagen können: Homo sum, humani nil a me alienum puto. Obgleich er ein klares Bewuſstsein von dem Werte seiner Leistungen hatte, blieb er im Umgange mit jedermann der schlichte, leutselige Mensch, der nichts Menschliches als gering achtete. Wie er einst von Gudermann als Privatschüler in die Mathematik eingeführt worden war, so nahm er die schüchterne Sonja Kowalevsky gütig auf, geleitete sie mit sicherer Hand in die Tiefen der mathematischen Erkenntnis und freute sich ihrer staunenswerten Fortschritte. Bei der Veröffentlichung ihrer berühmten Doctordissertation äuſserte er sich, er wäre froh, daſs diese von ihm längst geplante Untersuchung damit abgeschlossen wäre; er selbst hätte nie die Zeit zu der mühsamen Durchführung erübrigt. Das Verhalten zu dieser seiner genialen Schülerin ist typisch für das Verhältnis, in welchem er zu seinen Schülern stand. Zwar ist das Urteil offenbar viel zu hart, das Anna Charlotte Leffler über diese ihre Freundin in deren Biographie ausgesprochen hat: „Ihre ganze wissenschaftliche Wirksamkeit war nichts anderes als eine Entwickelung der Ideen ihres groſsen Lehrers.“ Aber solch ein schiefes Urteil hatte einen gewissen Grund in der Verschwendung, mit der Weierstraſs seinen Gedankenreichtum seinen Schülern offenbarte. Aus der Fülle seiner Ideen schöpfend, kümmerte er sich nicht darum, was aus den Gaben

wurde, die er als königlicher Spender um sich ausstreute. Wenn er in seinen Vorträgen der früheren Zeit einmal den Faden verlor, so freuten wir uns über solche Entgleisungen; denn bei den Überlegungen, die er dann mitzuteilen pflegte, entwickelte er aphoristisch eine Menge fruchtbarer Gedanken, von denen manche durch seine Schüler zu Abhandlungen verarbeitet wurden. Dabei fiel es ihm nie ein, solche Gedanken als sein Eigentum in Anspruch zu nehmen; man wird danach den Ausspruch eines seiner Schüler verstehen: Weierstrafs freue sich über jeden Gedanken, der ihm gestohlen werde, wenn er denselben bei dem Entwender wiederfinde.

Zur Verbreitung seines Ruhmes that er nichts; daher blieb dem Auslande in der ersten Zeit seines Auftretens in Berlin die Bedeutung dieses Vaters der modernen Analysis, wie man ihn wohl genannt hat, verborgen. Später, als viele Zuhörer des Auslandes ihn kennen gelernt, seinen Ruhm verbreitet hatten, erkannte man ihm neidlos und gern die erste Stelle in der Mathematik zu, die er nicht gesucht noch begehrt hatte, und die höchsten Ehren, die für den Gelehrten erreichbar sind, fielen ihm besonders in den letzten Jahren seines Lebens in den Schofs. Und auch darin zeigte er sich als wahrer Mensch, dafs er über diese spät gespendeten Beweise der Anerkennung dankbare Freude empfand und äufserte.

Sein unpersönliches, rein sachliches Verhalten bei bedeutsamen Entdeckungen mag durch zwei Beispiele belegt werden. Nach der Bekanntgebung des Lindemann'schen Beweises für die Transcendenz der Zahl π verfafste er in heller Freude über die Arbeit selbst einen Beweis für denselben Satz und behandelte in seiner Darstellung den Gegenstand mit der ihm eigenen lichtvollen Klarheit. In ähnlicher Weise verbreitete er sich über den Mittag-Leffler'schen Satz aus der Functionentheorie, nachdem der Entdecker desselben ihn veröffentlicht hatte. Indem Weierstrafs seine eigensten Gedanken auf seine Schüler vererbte, hatte er an ihren Arbeiten, wenn sie in seinem Sinne ausfielen, dieselbe Freude, wie ein Vater an den Erfolgen seiner Kinder. Daher blieb er auch in dauernder Freundschaft mit ihnen verbunden, und wie er seinen Schülern aus dem Schatze seiner Aufzeichnungen ohne Bedenken einzelne Bogen zum freien Gebrauche überliefs, so erwartete er auch als selbstverständlich ihre Unterstützung, wenn er ihrer bedurfte. Während des letzten Jahrzehnts seines Lebens, wo er zuerst seltener, nachher gar nicht mehr das Haus verlassen konnte, verabredeten sich die in Berlin ansässigen jüngeren Docenten und Professoren, welche seine Schüler sind, dahin, dafs jeder von ihnen den geliebten Lehrer an einem bestimmten Wochentage der Reihe nach besuchte, um mit ihm zu plaudern über Wissenschaftliches oder auch über die Vorfälle des täglichen Lebens, wenn ihn wissenschaftliche Gespräche zu sehr anstrengten. Wenn er zwischen seinen Schülern safs, so ging

ihm das Herz wieder auf, besonders solange er noch ein Glas Wein mit ihnen trinken konnte. Welche Treue er ihnen bewahrte, davon wissen viele zu erzählen. Eine seiner letzten Freuden, vielleicht überhaupt die letzte war es ja, als er wenige Tage vor seinem Heimgange die Berufung eines seiner Schüler auf einen Lehrstuhl der Mathematik erfuhr; eine Nachricht, die er mit Ungeduld erwartet hatte, von der er wiederholt sagte, er würde ihr Eintreffen nicht mehr erleben.

Bei der Vollendung des achtzigsten Lebensjahres, am 31. Oktober 1895, vereinten sich alle deutschen Mathematiker, um dem greisen Veteranen der Mathematik ihre Huldigung darzubringen. Feste in größerem Stile zu feiern, verbot sich von selbst, weil der Jubilar, seit lange schon an den Rollstuhl gefesselt, auf ärztliche Anordnung nur etwa zwei Stunden lang die Abordnungen empfangen durfte, um die ihm von vielen Seiten dargebrachten Glückwünsche entgegenzunehmen. Bei dieser Gelegenheit war auf Befehl Sr. Majestät des Kaisers sein Bildnis für das Nationalmuseum in künstlerischer Vollendung gemalt worden; doch bei allen ihm zuströmenden Ehrungen versicherte er, es wäre für ihn die schönste Feier des Tages, seine Freunde und Schüler um sich sehen zu dürfen, die jetzigen Studenten in der Abordnung des mathematischen Vereins begrüßen zu können; innigen Dank ließ er diesem Vereine zurufen für den Commers, der zu seinen Ehren veranstaltet wurde, dem aber nur seine beiden Schwestern beiwohnen konnten.

Herzliche brüderliche Zuneigung verknüpfte ihn mit diesen beiden Gefährtinnen seiner Leiden und Freuden; leider entschlief die eine, Clara, wenige Monate nach jenen Festestagen. Wie sehr er auch an seinem Bruder hing, der jetzt in Breslau seinen Wohnsitz hat, das zeigte er an seinen beiden letzten Geburtstagen. Am achtzigsten war der Bruder durch Krankheit abgehalten, selber zu kommen, schickte aber als Glückwunsch ein längeres poetisches Telegramm. Dieses allein von allen eingelaufenen Telegrammen mußte auf Verlangen des Geburtstagskindes den Anwesenden vorgelesen werden. Im folgenden Jahre war der Bruder herbeigeeilt und wurde nun durch den Einundachtzigjährigen aufgefordert, das neue zu dem Tage verfaßte Geburtstagsgedicht vorzutragen und die Anspielungen auf die Jugendzeit des Gefeierten zu erläutern.

In demselben Jahre wie Bismarck geboren, hatte Weierstraß eine zwar nicht ganz so hohe, wohl aber eine ähnliche kräftige und gedrungene Gestalt. Als kerniger Westfale, welche Heimat seine Sprechweise verriet, erinnerte er durch sein Äußeres durchaus nicht an einen Gelehrten. Der große ausdrucksvolle Kopf mit glatt rasirtem rundem Gesicht hatte früh stark gelichtetes Haar, wodurch die hochgewölbte Stirn offengelegt war. Der verbliebene Lockenkranz, der das Haupt umwallte, war schon zu Anfang der sechziger

Jahre weiſs. Die klugen blauen Augen, die etwas schief geschlitzt waren, kniff er bei schwierigen Stellen des Vortrags wohl zu, wie wenn er die Gedanken gegen die Eindrücke der Auſsenwelt schirmen müſste. Die letzten Bildnisse, das sehr gelungene Porträt in Öl von R. von Voigtländer, welches mit glücklichem Griffe den geistig belebten Ausdruck der Züge wiedergiebt, und die Radirung von Fehr entstammen seinen letzten Lebensjahren, und besonders das letztere zeigt ihn als kranken Greis in seinem Lehnstuhle. Wie Bismarck hatte auch er die Peinigungen der durch vieles Denken überangestrengten Nerven zu ertragen; wie dieser hat er es trotzdem zu hohem Alter gebracht, ist aber doch vor ihm erlegen. Nun ist auch der zuletzt so gebrechliche Leib, der mehr als einundachtzig Jahre dem gewaltigen Geiste als Wohnung gedient hat, des Lebens beraubt. Uns aber bleibt das Andenken an einen Mann, der wegen seiner geistigen Gaben den ersten der Menschheit zuzuzählen ist, und der doch immer schlicht und einfach war und nichts sein wollte als der Bruder seiner Mitmenschen.

G. D. E. Weyer.

Von L. Pochhammer in Kiel.

Am 22. December 1896 starb nach einem langen arbeitsreichen Leben der Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität Kiel, Geheime Regierungsrat Dr. Georg Daniel Eduard Weyer.

Geboren am 26. Mai 1818 in Hamburg, wo sein Vater Schiffskapitän war, machte er die Schuljahre teils in Hamburg, teils in Mecklenburg durch. Unmittelbar nach seinem Abgang vom Hamburger Gymnasium fand er Beschäftigung auf der dortigen Sternwarte, die von dem älteren Professor Rümker geleitet wurde. Sein Universitätsstudium absolvirte er in Berlin; er hörte mathematische und astronomische Vorlesungen und schloſs sich besonders an Encke an. Er erhielt sodann eine Stelle als Assistent an der Hamburger Sternwarte und wurde zugleich Lehrer an der Navigationsschule in Hamburg. Als jedoch infolge der Schleswig-Holstein'schen Erhebung eine Seekadettenschule in Kiel gegründet wurde, folgte Weyer einem Rufe nach Kiel als Lehrer dieser Anstalt. Die Schule bestand nur kurze Zeit, da die Dänen nach Holstein zurückkehrten. Weyer hatte inzwischen Beziehungen zur Kieler Universität angeknüpft. Am 4. Februar 1852 promovirte er mit einer Abhandlung „Über die Differentialformeln für Kometenbahnen von groſser Excentricität, mit Berücksichtigung der planetarischen Störungen". Die Doctordissertation diente zugleich als Habilitationsschrift. Als im Laufe des Jahres 1852 H. F. Scherck, der Kieler Ordinarius für Mathematik

und Astronomie, der in den damaligen erregten Zeiten politisch stärker hervorgetreten war, von der dänischen Regierung abgesetzt wurde, mufste Weyer die Vorlesungen desselben übernehmen. Bald darauf schlug die Kieler philosophische Facultät ihn zur Professur vor. Im Jahre 1853 wurde Weyer zum aufserordentlichen, im Jahre 1859 zum ordentlichen Professor ernannt. Als das neue deutsche Reich im Jahre 1872 die Marine-Akademie in Kiel gründete, übernahm Weyer die Vorlesungen über nautische Astronomie an diesem Institute. Er war als Lehrer überaus pflichttreu; noch am Tage vor seinem Tode hielt der 78jährige Gelehrte seine Vorlesung an der Universität.

Weyer's hauptsächliches Arbeitsgebiet war die nautische Astronomie. Er veröffentlichte 1871 ein Lehrbuch der nautischen Astronomie, aufserdem eine Reihe von Abhandlungen aus diesem Gebiet, von denen die meisten in den Annalen der Hydrographie erschienen sind. Besonders zu nennen sind Arbeiten über die Längenbestimmung durch Monddistanzen, über Ortsbestimmungen durch zwei oder mehr beobachtete Höhen, über die Pothenot'sche Aufgabe, sowie über Seekarten; auch gab er 1890 eine Azimut-Tafel heraus. Er hat ferner im 117. Bande der Astronomischen Nachrichten eine Abhandlung über die Interpolation bei periodischen Functionen veröffentlicht, in der die modificirte Methode an einer Reihe von Beispielen durchgeführt wird. Im 126. Bande derselben Zeitschrift publicirte er eine Arbeit über die Bahnen der Planetenmonde, woselbst ein von der Sonne ausgehendes Coordinatensystem zu Grunde gelegt und die Frage, ob die genannten Bahnen Inflexions- oder Doppelpunkte haben, näher erörtert wird. Von den Gebieten der reinen Mathematik hat die Geometrie die meiste Anziehungskraft auf Weyer ausgeübt. Er veröffentlichte im Jahre 1891 ein Lehrbuch „Einführung in die neuere construirende Geometrie" (Leipzig, Teubner), im Jahre 1894 eine Monographie über die parabolische Spirale. Eine weitere Reihe von Abhandlungen bezieht sich auf die magnetische Declination mit besonderer Rücksicht auf die Deviation der Schiffscompasse, wobei er die Rechnung durch die Beobachtungen zu controlliren sucht und auch auf die säcularen Änderungen eingeht. Im Jahre 1895 veröffentlichte er in den Schriften der Leopoldinischen Akademie eine Abhandlung über die magnetische Declination und ihre säculare Veränderung für 48 Beobachtungsörter. So ist es ihm vergönnt gewesen, bis in sein hohes Alter forschend und lehrend zu wirken. Ehre seinem Andenken!

Christian Wiener.*)

Von **A. Brill** und **L. Sohncke.**

Christian Wiener wurde am 7. December 1826 in Darmstadt als der Sohn des Criminalrichters Alexander Wiener geboren. Vom Gymnasium mit dem Zeugnis vorzüglicher mathematischer Befähigung entlassen, wandte er sich auf der Universität Gieſsen dem Studium der Architektur zu, fand aber in den vorbereitenden Vorlesungen, die er zugleich mit Cameralisten und Forstmännern besuchte, zu eingehenden mathematischen Studien wohl kaum irgend eine Anregung. Nach Abschluſs der Studien legte er die Staatsprüfung für das Baufach ab, ergriff jedoch bald die Gelegenheit, die sich ihm an der höheren Gewerbeschule (dem nachmaligen Polytechnicum) seiner Vaterstadt bot, die Praxis mit dem Lehrberuf zu vertauschen. 1850 habilitirte er sich an der Universität Gieſsen für Mathematik, wandte sich aber 1851 nach Karlsruhe, um am dortigen Polytechnicum zunächst noch seiner weiteren Ausbildung obzuliegen. Er fand in dem Director dieser Anstalt, dem bekannten Maschinentheoretiker Redtenbacher, einen väterlichen Freund, dessen damals in der Entstehung begriffenes „Dynamidensystem" Wiener zu den eigenen Forschungen über Atomenlehre angeregt haben mag. Als in demselben Jahre der Professor für darstellende Geometrie Schreiber starb, erhielt er (1852) dessen Professur.

In dieser Stellung, die anfangs mit einem Lehrauftrag für praktische Geometrie verbunden war, hat Wiener vierundvierzig Jahre lang eine reiche und vielseitige Thätigkeit entfaltet, verehrt von Tausenden von Schülern, zu denen auch der Verfasser dieser Zeilen, sein Neffe, in herzlicher Dankbarkeit sich rechnet, hochgeschätzt von seinen Collegen wegen seines unbestechlichen Urteils, seines offenen, von jeder Eitelkeit freien Wesens, seiner würdigen Haltung und Lebensführung, und von ihnen durch mehrmalige Wahl zum Director der Technischen Hochschule ausgezeichnet. Wiener war zweimal verheiratet; zwei seiner Söhne haben den Beruf des Vaters ergriffen; sie sind den Fachgenossen wohlbekannt. Am 31. Juli 1896 raffte nach längerem, standhaft ertragenem Leiden den rüstigen Siebenziger eine tückische Krankheit hinweg, mitten aus angestrengter Thätigkeit heraus, die namentlich dem Abschluſs eines Werkes über die Helligkeit des Himmels galt. Er hatte sich in den letzten zehn Jahren mit in diesem Lebensalter seltener Kraft und

*) Die Verfasser haben sich in der Weise in die Besprechung von Wiener's Arbeiten geteilt, daſs der eine die mathematischen, der andere die physikalischen übernommen hat. Zwar bleibt trotzdem das Bild von Wiener's vielseitiger Thätigkeit noch ein unvollständiges, weil eine Würdigung seiner philosophischen Arbeiten fehlt, aber wir hielten an dieser Stelle die eingetretene Beschränkung für angezeigt.

Ausdauer der umfangreichen Abhandlung gewidmet, deren Aufnahme in die Nova Acta der Leop. Carol. Akademie, wo sie nun nach seinem Tode erscheinen wird, er selbst noch veranlafst hatte.

Wiener's wissenschaftliche Thätigkeit galt in der ersten Zeit weniger mathematischen als philosophisch-physikalischen Fragestellungen, deren abschliefsender Erörterung sein Erstlingswerk „Grundzüge der Weltordnung" (Leipzig, 1863) gewidmet ist. Über den physikalischen Inhalt des Buches, das eine einheitliche Weltanschauung auf naturwissenschaftlicher Grundlage aufzubauen unternimmt, wird unten ausführlich berichtet werden. Es scheint, als ob ihn zu schriftstellerischer Thätigkeit auf mathematischem Gebiet erst nach und nach der Wunsch, seinem Lehrauftrag für darstellende und praktische Geometrie nach allen Seiten hin zu genügen, veranlafst habe, wie sie denn auch erst allmählich die Breite und Tiefe gewann, die ihm sein Ansehen unter den Fachgenossen verschafft hat.

Wir werden uns auf die Besprechung der wichtigsten mathematischen Arbeiten beschränken, wollen aber an einer der frühesten nicht vorübergehen, einer hübschen Studie: „Sul moto di una figura piana etc." (Annali di mat. (2), I, 1867), wo die Gestaltsänderungen einer ebenen Figur untersucht werden, die sich in der Weise bewegt, dafs, während drei Gerade durch feste Punkte gehen, sie ähnlich mit sich selbst bleibt. Alle Punkte der Ebene beschreiben mit gleicher Winkelgeschwindigkeit Kreise, die sämtlich durch einen festen Punkt gehen, in welchen bei der Bewegung alle Punkte der Ebene einmal zugleich hineinrücken.

In einer Arbeit „Über mehrdeutige Beziehung ebener Gebilde" (Math. Ann. Bd. 3) wird die gegenseitige Abhängigkeit von Punktgruppen in zwei Ebenen dadurch hergestellt, dafs in jeder zwei Curvenbüschel mit einer Anzahl gemeinsamer Basispunkte angenommen, die Büschel in den zwei Ebenen paarweise auf einander bezogen werden und das Gebilde untersucht wird, das einer gegebenen Curve der einen Ebene in der anderen entspricht.

Schon früh hatte Wiener in seine Vorlesungen über darstellende Geometrie einen Abschnitt über projective einbezogen, den er später in einer besonderen Vorlesung wieder ausschied. Die eigenartige Anordnung, die er als Autodidakt dem Stoff gab, stellte ihn u. a. vor die auch in anderen Gebieten bekannte Schwierigkeit, zwei wesentlich gleiche aber verschiedenartig definirte Gebilde als identisch nachzuweisen. In der Note: „Durch Lösung der Aufgabe: Einen durch fünf Punkte u. s. w. gegebenen Kegelschnitt auf einen Umdrehungskegel zu legen" (Schlöm. Zeitschr. XX. 1875) wird eine Curve zweiter Ordnung als durch projective Strahlenbüschel, also fünf ihrer Punkte gegeben angenommen; um die Hauptaxen zu bestimmen, mufs man die Curve als Schnitt eines Kegels darstellen. Statt dessen kann man auch nach einem die Curve doppelt berührenden

Kreise fragen. Wiener construirt zunächst einen in einem der fünf gegebenen Punkte einfach berührenden Kreis, mit dem er den Kegelschnitt in Collineation setzt. Die leicht zu findende Collineationsaxe ist alsdann parallel zu der Tangente im anderen Berührungspunkt des gesuchten Kreises.

Wiener hatte Sinn für den mathematischen Inhalt, der sich wohl populären Aufgaben abgewinnen läſst. In einer Note in den Math. Annalen Band VI „Über eine Aufgabe aus der geometria situs“ giebt er ein Verfahren an, das aus einem Labyrinth herausführt. Direct den Bedürfnissen des Unterrichts in der darstellenden Geometrie entsprungen sind zwei Aufsätze über Cycloiden (Schlöm. Zeitschr. XXVI und XXVII, 1881 u. 82), von denen der erste eine doppelte Erzeugungsweise dieser Curven, der zweite eine elegante Construction für ihre Krümmungsmittelpunkte angiebt. Man findet dort u. A. die Evoluten der von dem Verfasser unterschiedenen Gattungen alle verzeichnet.

Überhaupt ist für ihn bezeichnend die Freude an der Figur, an mathematisch gesetzmäſsigen Formen, wie sie mit einem starken Anschauungsvermögen verbunden zu sein pflegt. Dem Thema: „Über die Schönheit der Linien“ ist einer seiner so anregend geschriebenen Aufsätze gewidmet, die aus Vorträgen im naturwissenschaftlichen Verein zu Karlsruhe (Verh. des nat. V. 11. Bd.) hervorgegangen sind. Er bringt hier die formale Schönheit mit der mathematischen Stetigkeit — auch der Differentialquotienten — und andrerseits mit der Regelmäſsigkeit der Formen in nächste Verbindung.

Seinem hervorragenden Formensinn verdankt man aber vor allem die räumliche Darstellung von vielen der geometrischen Gebilde, die ihn beschäftigt haben. In der mathematischen Sammlung der Technischen Hochschule zu Karlsruhe sind zahlreiche Schränke gefüllt mit Modellen von Raumcurven und Oberflächen, die er selbst oder seine Schüler hergestellt haben, und an deren eleganter und lehrreicher Ausführung auch das Auge des Nicht-Geometers sich erfreut. Wiener war einer der ersten, die Veranschaulichungsmittel für den höheren mathematischen Unterricht hergestellt und verwertet haben. Mit zahlreichen trat er auch an die Öffentlichkeit: 1864 mit den Modellen der vier regulären Sternpolyeder, über die er in einer Monographie manches Neue sagt; 1869 mit dem Gipsmodell der Fläche dritter Ordnung, das, von Clebsch veranlaſst, ihn überhaupt zuerst in weiteren mathematischen Kreisen bekannt gemacht hat. Über diese Fläche existirten umfangreiche Aufsätze und Bücher, ohne daſs man wuſste, wie sie auch nur in einem besonderen Falle aussah. Wiener construirte das Modell derjenigen Fläche, die 27 reelle Gerade hat, indem er eine von ihnen und fünf sie schneidende, zu einander windschiefe, als gegeben annahm. Durch Projection auf zwei Tafelebenen ermittelte er die

Steiner'sche Doppelsechs, der sie angehören, und die 15 übrigen Geraden, dann aus ihren Schnittpunkten mit einer Anzahl von Ebenen, die er durch die erste Gerade legte, diejenigen Kegelschnitte, in denen die Fläche sie noch weiter trifft. Diese, in Carton ausgeschnitten, gaben das Bild der Fläche. Die Anregung, die von dieser Darstellung ausging, traf sich glücklich mit dem bei den Geometern damals wieder erwachenden Sinn für das Gestaltliche überhaupt. Zwar folgten ihm Andere mit anderen Modellen der Fläche dritter Ordnung nach: Clebsch's Diagonalfläche, die schöne Serie des Herrn Rodenberg; sie alle haben aber sein Modell nicht entbehrlich gemacht. Die Lehrmittelausstellungen von London 1876, von München und Chicago 1893 beschickte Wiener mit noch zahlreichen anderen Proben seiner gestaltenden Thätigkeit: den bekannten Drahtmodellen unebener Raumcurven mit Rückkehrelementen, deren interessante Beziehungen zu ihren Projectionen er aufstellt; mit den Fadenmodellen zweier Kegel, die in einer Raumcurve 4. Ordnung 1. Art sich treffen, der verschiedenen Typen von ebensolchen Curven 2. Art, des Cylindroids, mehrerer eleganten windschiefen Flächen 3. Ordnung u. a. m., die Schüler von ihm ausgeführt haben.

Wiener's hervorragendste Leistung auf mathematischem Gebiet ist sein Lehrbuch der darstellenden Geometrie (2 Bde., Leipzig 1884 und 87). In unablässigem Ringen nach Ausdehnung und Vervollkommnung seines wissenschaftlichen Gesichtskreises, wovon er seinen Freunden immer wieder neue Proben gab, dabei in steter Berührung mit den Aufgaben, welche Technik und Kunst seiner Wissenschaft stellen, hatte er in jahrzehntelangem Mühen den Stoff, der in diesem Werk verarbeitet ist, nach allen Richtungen hin durchdacht, im Constructionssaale methodisch geprüft, wiederholt in den Einzelpartien und hinsichtlich der Anordnung umgeschrieben, bevor er die nun wirklich reife Frucht der Öffentlichkeit übergab. Das Werk stellt sich die dreifache Aufgabe: 1. Raumgebilde durch Zeichnung darzustellen, 2. die anschliefsenden Probleme der Durchdringung, Schattenconstruction, Helligkeitsverteilung u. s. w. an der Abbildung zu lösen und endlich 3. die einschlägigen geometrischen Hülfsmittel zu entwickeln. Ein so weit verzweigtes Unternehmen führte zu einem Lehrbuch der Geometrie überhaupt, wobei die grundlegenden Sätze der darstellenden Geometrie im engeren Sinne, wie sie Monge geschaffen hat, sich auf knappem Raum erörtern liefsen. Auch im Gebrauche dieser Hülfsmittel weist übrigens das Werk Neues auf, wie denn z. B. die „Hauptgeraden einer Ebene" (Parallellinien zu den Tafeln) systematisch und einheitlich zur Lösung der Grundprobleme herangezogen werden.

Entscheidend für die Gestalt ist bei einem solchen Lehrbuch immer die Art, wie der Verfasser sich mit dem Stoff abfindet, den er der reinen Mathematik, zumal der neueren Geometrie entnimmt.

Noch in dem Werk von De la Gournerie (1860), der die Perspective abgetrennt behandelt, spielen analytische Entwicklungen die Hauptrolle. Aber seitdem Fiedler's ausgezeichnetes Werk (1871) es unternommen, die Perspective an die Spitze zu stellen, hat man allgemein die projective Geometrie als wichtigste Grundlage der darstellenden anerkannt. Wie bei Desargues und Pascal die projectiven Begriffe aus der Kenntnis der Perspective hervorgewachsen sind, so kommen die Vorzüge der eleganten und umfassenden Methoden der neueren Geometrie kaum irgend einem Gebiete so zu gut, drängen sich ihm von selbst so auf, wie der zeichnenden Geometrie. Zahllose Aufgaben z. B., die sich an den Kegelschnitt knüpfen, löst man an dem Kreis und überträgt sie auf jenen durch Collineation. Während nun aber Fiedler die projective Geometrie gewissermaſsen als Krönung seines Werkes an das Ende schiebt, verlegt Wiener den betreffenden Abschnitt, den er bei Gelegenheit der ebenen Schnitte von Pyramiden und Prismen vorbereitet hat, in den ersten Teil. Methodisch durchaus einheitlich arbeitet dieser Abschnitt fast nur mit synthetischen Hülfsmitteln und bildet für sich ein treffliches Lehrbuch der neueren Geometrie, aus dem schon mancher Anfänger seine Wissenschaft geschöpft hat.

Von neuen Hülfsmitteln des Abschnitts ist vor allem die „Imaginärprojection“ zu nennen, ein Verfahren, das Wiener besonders für die Behandlung der imaginären Gebilde 2. Ordnung in der Ebene und im Raum flüssig gemacht hat. Es besteht in der Verallgemeinerung desjenigen synthetischen Processes, durch den man von einer Hyperbel zu ihrer conjugirten übergeht, und dem analytisch die Umkehrung des Vorzeichens eines Gliedes in der Mittelpunktsgleichung entspricht. Da dies auf drei verschiedene Arten geschehen kann, so gelangt man von einem Kegelschnitt zu drei anderen. Zwar war zu diesem Quadrupel schon Steiner gelangt, aber von einem ganz anderen Gesichtspunkt aus, auch dient es ihm nicht wie Wiener zur Beherrschung des Imaginären. Durch Übertragen nämlich des entsprechenden synthetischen Processes von dem Mittelpunkt auf einen beliebigen Punkt der Ebene erhält Wiener eine „ideelle“ Abbildung des Kegelschnitts in Bezug auf diesen Punkt. Ist er ein innerer, so wird z. B. eine Ellipse in einen imaginären Kegelschnitt übergeführt, wobei es sich zeigt, daſs alle projectiven Eigenschaften erhalten bleiben. Dieses Hülfsmittel ermöglicht nun die Construction des gemeinsamen Polardreiecks von zwei Kegelschnitten, wenn imaginäre Elemente auftreten, die Verzeichnung von Kegelschnittbüscheln durch vier Punkte, von Scharen, die vier Gerade berühren u. s. w., in allen denjenigen Fällen, wo die gegebenen Elemente conjugirt imaginär sind.

Hierbei liefert Wiener's elegantes „Netzverfahren“, das sich auf die Theorie der cyclisch-projectiven Punktreihen gründen läſst,

für ganze Gruppen von Individuen jener Scharen und Büschel vermittelst zweier projectiver Strahlbüschel ein Gitter von Punkten, durch welche sie hindurchgehen. Das letztere Verfahren wird im zweiten Band auch auf die Projectionen der Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung angewendet.

Daſs die Kenntnis der Krümmungslinien für den Techniker von Wert sei, hat schon Monge u. a. mit dem Hinweis darauf begründet, daſs, wenn es sich um die Form der „Lagerfugen" für eine vorliegende Gewölbfläche, etwa ein dreiaxiges Ellipsoid, handelt, nur die abwickelbaren Flächen der Normalen längs der Krümmungslinien die technische unabweisliche Forderung erfüllen, bei einfachster Gestalt rechtwinklige Kanten zu geben. Auch Wiener hat diese Gebilde in sein Buch aufgenommen, und zwar behandelt er sie durchaus einheitlich mit synthetischen Mitteln, indem er den Satz von Dupin über dreifach orthogonale Flächensysteme zu Grunde legt.

Die Sätze über Krümmung der Curven werden schon im ersten Band entwickelt. Sie erfordern, wie auch das Studium der singulären Punkte der Projectionen von Raumcurven, die bei den Schnitten von Gewölbflächen, als Schattengrenzen und „Lichtgleichen" auf den technisch wichtigen Wulst-, Schrauben-, windschiefen Gewölbflächen auftreten, das Heranziehen analytischer Methoden. Wiener leitet den Abschnitt, den er ihnen widmet, durch Betrachtungen über das unendlich Kleine ein, das er als „Grenznull" in verschiedenen Ordnungen einführt, und, wo die Anschauung nicht ausreicht, in Potenzreihen verwendet. Die Einführung dieses Symbols, das sich übrigens von der für diese Zwecke zuerst von Cauchy verwendeten beliebig kleinen aber endlichen Gröſse nicht wesentlich unterscheidet, verleiht diesem Abschnitt gröſsere Strenge.

Einer neuen und wertvollen Discussion unterwirft Wiener die Linien der topographischen Fläche, namentlich die des gröſsten und kleinsten Gefälles, auf die neuere französische Schriftsteller die Aufmerksamkeit gelenkt haben, ohne jedoch den Gegenstand zu erschöpfen.

Daſs zahlreiche andere Einzelheiten: die Vielseitigkeit der Lösungen eines Problems, die Sorgfalt, mit der jede einzelne bis zur äuſsersten mit den gegebenen Mitteln erreichbaren Genauigkeit durchgeführt wird, dem Werk allein schon bleibende Vorzüge sichern, das haben sachkundige Fachgenossen an mehreren Orten hervorgehoben. Hier mag nur noch auf die treffliche Geschichte der darstellenden Geometrie hingewiesen werden, mit der es eingeleitet wird, eine Arbeit, die, auf Quellenstudien beruhend, zu dem grundlegenden Werk von Chasles, dem bekannten „Aperçu historique etc." — der in dieser Hinsicht sich auf die Würdigung von Desargues und Monge beschränkt — in wesentlichen Punkten, wie bezüglich der älteren Geschichte der Perspective, eine wertvolle Ergänzung bildet.

Mit Übergehung mehrerer kleinerer Arbeiten, namentlich auch aus dem Gebiete der Geodäsie, wenden wir uns zu einer der letzten Abhandlungen: „Geometrische und analytische Untersuchung der Weierstrass'schen Function" (Journ. für Math. XC), die sich auf jene merkwürdige überall stetige Function bezieht, welche an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt. Den Verlauf dieser Function, die durch eine Cosinusreihe darstellbar ist, und deren Existenz P. du Bois-Reymond als „der unmittelbaren Vorstellung und dem prüfenden Verstand gleich befremdlich" bezeichnet hatte, wünscht Wiener dem Verständnis dadurch näher zu bringen, dafs er solche Curven discutirt und zeichnet, durch deren Übereinanderlagerung in unendlicher Anzahl diejenige entsteht, welche die Function darstellt, und dafs er graphisch die Summation für einige Glieder vornimmt. Eine Berichtigung, die er nebenbei an der Weierstrafs'schen Fassung des Satzes glaubte anbringen zu können, hat ihm (oder vielmehr einem Berichterstatter über diese Arbeit) von jenem (Functionenlehre, S. 100) eine Zurückweisung eingetragen. Nichtsdestoweniger mufs festgestellt werden, dafs der Aufsatz seinen Hauptzweck, nämlich du Bois-Reymond's Ausspruch auf das richtige Mafs zurückzuführen, durchaus erfüllt. Ähnlich wie früher schon Herr Schwarz eine Function mit discret auftretenden Stellen ohne Differentialquotient graphisch zu veranschaulichen unternommen hatte, so zeigt Wiener, dafs für die vorliegende Function sich Wellen von immer kleinerer Länge und Amplitude zu einem krummlinigen Streifen von einer gewissen (in der Grenze verschwindenden) Breite vereinigen, zwischen dessen Rändern die Curve hin und herschwankt, derart, dafs zwei Ordinaten von noch so kleinem endlichen Abstand unendlich viele Wellen (von übrigens ungleicher Höhe) einschliefsen. So kommt es, dafs zu jedem Curvenpunkt in jeder Richtung unendlich viele unendlich benachbarte Curvenpunkte existiren und somit der Differentialquotient unbestimmt wird. Wenn Wiener freilich von Ausnahmepunkten spricht, wo der Differentialquotient nicht unbestimmt, sondern unendlich grofs wird — was er aus einer gewissen Festsetzung über die Abnahme der der Grenze Null zustrebenden discreten Abscissendifferenzen schliefst, verschieden von der, durch welche Weierstrafs die Schwankung bewiesen hatte — so liegt schon in der Möglichkeit, dafs verschiedene Intervall-Anordnungen ein verschiedenes Verhalten ergeben, der Beweis dafür, dafs dies keine Ausnahmestellen sind.

Den Übergang zu den physikalischen Arbeiten mag die Abhandlung bilden „Über die Stärke der Bestrahlung der Erde durch die Sonne" (Verh. des naturw. Vereins zu Karlsruhe 1876, 7. Heft). Wiener berechnet die Wärmemenge, die an einem bestimmten Tag im Jahr irgend ein Breitegrad empfängt, und wird, wie vor ihm Poisson, Much u. a., auf elliptische Integrale geführt, deren

Reduction auf Thetafunctionen ihm die numerische Auswertung in der Form von Tabellen ermöglicht. Es ergiebt sich u. a. die merkwürdige Thatsache, dafs im Hochsommer der Pol mehr Wärme empfängt, als irgend ein anderer Punkt der Erde.

* * *

Die wichtigste von Wiener's naturwissenschaftlichen Schriften ist die Atomenlehre (Leipzig und Heidelberg. Winter'sche Verlagshandlung 1869), welche ursprünglich unter dem Titel „Die nicht geistige Welt“ als erstes Buch des schon 1863 herausgegebenen philosophischen Werkes: „Die Grundzüge der Weltordnung“ erschienen war. Der Hauptinhalt der für die streng mechanische Denkweise des Verfassers charakteristischen Atomenlehre ist folgender. Alles Geschehen hat eine Ursache, d. h. etwas, wodurch es bedingt wird. Diese Ursache besteht in dem Zustand der Dinge, welcher einen Augenblick vorher stattfindet, und in der Art der Einwirkung der Dinge aufeinander. Während man nun von den früheren Zuständen nur wenig weifs, ist die Art der gegenseitigen Einwirkung der Dinge viel genauer erforschbar; und hierin besteht also die Hauptaufgabe. Zu ihrer Lösung werden in der ersten Abteilung zunächst die drei allgemeinen Grundeigenschaften des Stoffes: Trägheit, Gleichheit von Kraft und Gegenkraft, Unabhängigkeit der Kräftewirkungen, sowie die Hauptbegriffe der Mechanik: Masse, Trägheitskraft, Arbeit und lebendige Kraft eingehend und musterhaft klar auseinander gesetzt, und dann wird zu den sechs besonderen Grundeigenschaften des Stoffs übergegangen. Als solche erscheinen: 1) Alles Stoffliche besteht aus Körperteilchen, welche einander anziehen, und aus Ätherteilchen, welche einander abstofsen. 2) Körper- und Ätherteilchen stofsen einander ab. Die Begründung dieser Annahme folgt bei Betrachtung des flüssigen Zustandes. 3) Anziehungen wie Abstofsungen sind dem Producte der wirkenden Masse proportional (im Widerspruch mit den üblichen Vorstellungen, welche den Satz nur für die Sternkunde, aber nicht für chemische und Molecularwirkungen zulassen). 4) Die Abnahme der Kraft mit zunehmender Entfernung befolgt in der Sternkunde das Gravitationsgesetz, aber für zwei Ätherteilchen sowie für ein Körper- und ein Ätherteilchen erfolgt sie rascher und ist bei mefsbarer Entfernung bereits unmerklich klein. 5) Der körperliche Stoff besteht aus unveränderlichen und unteilbaren Atomen; sie sind homogen, aber im allgemeinen nicht kugelförmig, und wirken daher nach verschiedenen Richtungen mit verschiedenen Kräften; es giebt soviel Atomarten als chemische Grundstoffe. 6) Der Äther besteht aus lauter gleichen, unveränderlichen Atomen, sehr viel kleiner an Masse als die Körperatome.

Die zweite Abteilung handelt von den Gleichgewichtslagen der Atome. Mit Benutzung der weiteren Annahme, dafs

die Abstofsung der Körperteilchen auf den Äther stärker sei als die der Ätherteilchen untereinander, wird gezeigt, dafs in einem Körper die einzelnen Körperatome zunächst von leeren Räumen umgeben sind, auf welche verdünnter Äther folgt, bis er am dichtesten wird an solchen Stellen zwischen den Atomen, wo sich die Abstofsungen der Körperatome auf den Äther das Gleichgewicht halten. Nach aufsen hin wächst die Dichtigkeit des Äthers bis zu derjenigen, wie sie im sogenannten leeren Raume herrscht. Wenn ein Körperatom einem anderen aus gröfserer Entfernung genähert wird, so passirt es nach Ansicht des Verfassers im allgemeinen drei stabile und dazwischen zwei labile Gleichgewichtslagen. Die entfernteste stabile Gleichgewichtslage ist im luftförmigen Zustande vorhanden, die mittlere im festen, die nächste im Zustande der chemischen Verbindung. Ein derartiger Verlauf der auf das Atom wirkenden Gesamtkraft wird durch die Annahme erhalten, dafs bei zunehmender Entfernung der abstofsende Teil der Gesamtkraft einen zweimaligen Anstieg erfährt. Während sich auf diesem Wege die Cohäsionserscheinungen der festen Körper gut ableiten lassen, steht die Deutung des luftförmigen Zustandes in offenbarem Gegensatz zu den geläufigen Vorstellungen und wird durch keinerlei Erscheinungen besonders gestützt. — Fruchtbar erweisen sich die entwickelten Vorstellungen für das Verständnis des Aufbaus der Krystalle. Der Grundgedanke: es müsse nach den übereinstimmenden Richtungen in Bezug auf ein Atom, wenn andere seinesgleichen herantreten, gleiche Formbildung stattfinden, wird speciell für das Würfelatom eingehend verfolgt. Indem eine Krystallfläche nicht anders als durch die in ihr liegenden Atome bestimmt sein kann, wird für das aus Würfelatomen aufgebaute centrirte cubische Raumgitter gezeigt, dafs jede Krystallfläche von den drei Hauptaxen Längen abschneiden mufs, die im Verhältnis ganzer Zahlen stehen. Und indem dies Ergebnis später auch auf schiefwinkelige Axen ausgedehnt wird, ist das krystallographische Grundgesetz der rationalen Axenabschnitte abgeleitet.

Weil bei der Anlagerung neuer Atome an eine Krystallfläche die Anziehung am Rande geringer ist als in der Mitte der Fläche, so kann es kommen, dafs die Atome etwas vom Rande entfernt bleiben, und so bei jeder folgenden sich anlagernden Schicht. Da aber nur sehr nahe Atome von merklichem Einflufs sind, so kann für die aufeinander folgenden Schichten das Zurückbleiben vom Rande wegen der dort geringeren Anziehung nicht grofs sein. Demnach können die einander nächsten Atome in einer entstehenden Fläche nicht weit auseinander liegen. Nun bestimmt aber ein Dreieck von drei nächsten Atomen die Anordnung aller Atome in dieser Fläche und die Stellung der Fläche. Indem aber die Dreiecksseiten nie grofse Vielfache des Einheitsabstandes

sind, so können die Coordinaten dreier so liegender Atome, bezogen auf Axen, die durch eins von ihnen gehn, stets durch kleine ganze Zahlen ausgedrückt werden; dann müssen auch die Verhältnisse der von der Ebene dieser drei Atome abgeschnittenen Hauptaxenstücke stets durch kleine ganze Zahlen bestimmt sein. Diese Erfahrungsthatsache ist somit aus mechanischen Erwägungen begreiflich!

Es folgt die Beschreibung eines aus regulären Tetraedern aufgebauten Systems, bei dem in den Diagonalrichtungen von Würfelmaschen die Tetraedercentra so angeordnet sind, dafs je ein einfacher und der dreifache Abstand abwechselnd aufeinander folgen, und dafs somit nur die Hälfte aller Punkte des cubischen centrirten Gitters besetzt sind. Dabei stehen die Atome einander zwar mit den Flächen parallel aber mit verschränkten Kanten gegenüber. Hiermit ist zum ersten Male eine Structurform als möglich erkannt, bei welcher die Atome einander nicht parallel stehen. Darin liegt die grofse Bedeutung dieser Untersuchung.

Ohne uns bei den Bemerkungen über die anderen Krystallsysteme aufzuhalten, wenden wir uns gleich zu dem wichtigsten Teil dieser krystallographischen Betrachtungen, nämlich zu den allgemeinen Untersuchungen über das Wesen der regelmäfsigen Anordnung der Atome und über die überhaupt möglichen regelmäfsigen Anordnungen gleicher Atome. „Regelmäfsigkeit findet dann statt, wenn jedes Atom die anderen Atome in übereinstimmender Weise um sich gestellt hat, d. h. so dafs die Richtungslinien von seinem Schwerpunkt nach den Schwerpunkten der umliegenden Atome Winkel miteinander bilden, die bei jedem Atom, von welchem man auch ausgehen mag, dieselben sind, dafs ferner diese Richtungslinien die Oberflächen der Atome in übereinstimmenden Punkten schneiden, und dafs endlich auf Richtungslinien, welche gleichartig gegen das Atom liegen, die Abstände der Atome dieselben sind."

Nun werden die Gebilde untersucht, welche entstehen, wenn zunächst zwei Atome zusammentreten, oder wenn drei, vier, fünf Atome als Ausgang dienen. Sind drei Atome in gleichlaufender (paralleler) Stellung gegeben, so schliefst man, dafs die ganze Ebene mit gleichlaufenden Atomen besetzt sein mufs, die ein parallelogrammatisches Gitter bilden; nähme man dagegen die ersten drei nicht als gleichlaufend an, so wäre eine regelmäfsige, sich unendlich oft wiederholende Anordnung unmöglich. Das Zusammentreten von vier Atomen in einer Ebene führt zunächst auf den vorigen Fall. Ferner ist aber noch ein Fall der regelmäfsigen Anordnung möglich: wenn nämlich drei Atome gleichlaufende Stellung haben, das vierte aber eine solche, dafs sie aus einer ursprünglich gleichlaufenden durch Drehung um zwei rechte Winkel um eine auf der Lagerungsebene senkrechte Axe erhalten wird. Ebenso wie dieses vierte kommt nun zu jedem Atom des aus den drei ersten gebildeten Systems noch

eins hinzu; diese bilden ein dem ersteren gleiches und gleichlaufendes System, gegen dasselbe verschoben, und dessen Atome, unter einander gleichlaufend, gegen die ersteren um zwei Rechte gedreht sind. Beim Zusammentreten von vier Atomen im Raume müssen je drei so stehen, wie vorher abgeleitet. So findet man das aus lauter gleichlaufend gestellten Atomen gebildete Raumgitter. Zu den vier ursprünglichen Atomen kann nur in einem Fall noch ein fünftes, nicht ohnehin zu demselben System gehöriges hinzutreten, nämlich wenn es so gestellt ist, daſs es mit jedem der ersten keine Reihe unendlich vieler Atome hervorbringt, sondern jedem derselben so gegenübersteht, daſs es mit ihm ein Paar bildet, das für sich allein kein weiteres Atom bedingen würde. Dazu muſs es so beschaffen sein, daſs seine Punkte mit den übereinstimmenden Punkten des vorher vorhandenen ebenmäſsig liegen in Bezug auf einen Ebenmäſsigkeitspunkt (Symmetriecentrum), d. h. in gerade entgegengesetzter Richtung gleich weit von ihm entfernt sind. Dann steht es zugleich mit allen vier ersten Atomen in derselben Beziehung der Ebenmäſsigkeit. Aber dann ist es mit ihnen im allgemeinen nicht zum Decken gleich, sondern nur spiegelbildlich gleich. Wenn diese Ebenmäſsigkeit nun nicht zugleich Decken in sich schlieſst, so ist ein solches fünftes Atom gar nicht möglich, falls man, „wie wir es gethan haben, von der Annahme ausgeht, daſs alle Atome zum Decken gleich sind. Bei zusammengesetzten Molecülen, sowie auch bei Atomen, wenn sie zusammengesetzt sein sollten, wollen wir jedoch nicht allgemein die Möglichkeit von einer nur spiegelbildartigen Gleichheit ausschlieſsen; im Gegenteil könnten vielleicht dadurch manche Erscheinungen erklärt werden.“ Aber abgesehen hiervon, und die vollkommene Gleichheit der Atome eines und desselben Körpers vorausgesetzt, giebt es Fälle, in denen die Ebenmäſsigkeit eines fünften Atoms gegen die vier ersten zugleich ein Decken in sich schlieſst, nämlich wenn die Formen nach verschiedenen Richtungen hin die gleiche Ausbildung haben, wie z. B. die Krystallformen der meisten Krystallsysteme. Dann ist noch ein fünftes Atom von ganz gleicher und ebenmäſsig zu den vier ersten gestellter Form an beliebiger Stelle möglich; dasselbe erzeugt dann ein zweites, mit dem System der vier ersten gleiches und gleichlaufendes System, nur mit verschiedener Stellung der Atome. Hierher gehört das vorher erwähnte, aus regulären Tetraedern aufgebaute System. — Mit diesem Nachweise der Möglichkeit regelmäſsiger Atomanordnungen ohne durchgängige Parallelstellung aller Atome hat der Verfasser den ersten bedeutenden Schritt über die von Haüy begründete Theorie der Krystallstructur hinaus gethan.*)

*) Im Anschluſs hieran ist vielleicht folgende Mitteilung nicht ganz ohne Interesse. Als Referent, 1872 nach Karlsruhe berufen, mit Wiener

Von Interesse ist sodann der Nachweis, daſs gleiche Atome, welches auch ihre Gestalt sein möge, zu verschiedenen Molecülen zusammentreten können, sodaſs diese die Anordnung eines jeden Krystallsystems anzunehmen vermögen. Hierdurch ist die Polymorphie verständlich gemacht.

In der dritten Abteilung werden die Schwingungen der Atome behandelt zum Zwecke des Nachweises, daſs die Wärme in Schwingungen der Äther- und Körperatome bestehe. Solange man es nur mit unendlich kleinen Schwingungen zu thun hat, steht die rücktreibende Kraft in geradem Verhältnis mit der Verschiebung, und ist die Schwingungsdauer unabhängig von der Schwingungsweite, wie es ja für die elastischen Schwingungen charakteristisch ist. Hierbei darf man aber in der vorliegenden Untersuchung nicht stehen bleiben. Es mögen zunächst die Ätherschwingungen betrachtet werden. Sobald die Schwingungsbahnen groſs sind im Verhältnis zum Abstand der nächsten Atome, ist die rücktreibende Kraft nicht mehr der Verschiebung proportional. „Wir machen die Annahme, daſs das Gesetz der Abstoſsung der Atome derart beschaffen sei, daſs jene (von den herumstehenden Atomen ausgeübte) zurücktreibende Kraft bei gröſseren Verschiebungen rascher als die Verschiebung zunimmt. Es ist dies um so wahrscheinlicher, je rascher die Abstoſsung der Atome bei zunehmender Entfernung abnimmt.“ Unter dieser Annahme muſs „mit zunehmender Weite die Dauer der eigentümlichen Atomschwingungen abnehmen.“ Nun ist zunächst klar, daſs die Schwingungen benachbarter Ätheratome Phasenunterschiede darbieten müssen, denn sonst wäre das Fortbestehen der Schwingungen nur durch äuſsere Kräfte möglich. Wenn aber die Schwingungsdauer eines Atoms durch irgend eine Ursache geändert wird, so erleiden dadurch auch die Nachbaratome Veränderungen. Daraus folgt, daſs für den Beharrungszustand in einem Körper die Ätheratome gleiche Schwingungsdauer haben müssen. Dagegen braucht die Schwingungsweite und die Geschwindigkeit in der Gleichgewichtslage

---

bald in nahe Beziehungen trat, wies letzterer wiederholt darauf hin, daſs des Referenten Abhandlung: „Die Gruppirung der Molecüle in den Krystallen“ (Poggendorff's Annalen 132, 75, 1867), worin die Haüy-Bravais'sche Theorie der Raumgitterstructur aller Krystalle aus einem einfachen Grundsatze abgeleitet wird, an einem principiellen Fehler leide, indem stillschweigend die Voraussetzung gemacht sei, daſs alle Molecüle parallel liegen müſsten, was eine unmotivirte Beschränkung enthalte. Wiener hatte eben schon eine Anzahl allgemeiner Structuren gefunden, die dem Begriffe der Regelmäſsigkeit voll entsprachen, ohne daſs doch die Anordnung der Teilchen eine parallele war. So gab Wiener's unablässiges Drängen den Anstoſs zu des Referenten allgemeinen Untersuchungen über die überhaupt möglichen regelmäſsigen Punktsysteme (Entwickelung einer Theorie der Krystallstruktur. Leipzig 1879).

nicht bei allen gleich zu sein. Man erkennt vielmehr leicht, daſs in dünnerem Äther diese beiden Gröſsen gröſser sein müssen, als in dichterem.

In Bezug auf die Schwingungen der Körperatome werden zwei Fälle unterschieden. Wenn sie zunächst gleiche Richtung mit denen der Ätheratome haben, so wird gezeigt, daſs die Schwingungsweite des Körperatoms gröſser sein muſs als die im Zeitpunkt seiner gröſsten Ausweichung stattfindende Ausweichung des benachbarten Ätheratoms von der kleinsten Schwingungsweite. Wenn dagegen Körper- und Ätheratome entgegengesetzt schwingen, so müssen auch bei gleicher Dauer die Schwingungen der Körperatome viel kleinere Weite haben als im vorigen Falle.

Nach diesen Vorbereitungen wird zu dem Nachweise übergegangen, daſs die Wirkungen der Atomschwingungen diejenigen der Wärme darstellen. Zunächst wird gezeigt, daſs durch Vergröſserung aller Schwingungsweiten ein Auseinanderrücken aller Schwingungsmittelpunkte der Körperatome und somit Ausdehnung des Körpers erfolgen muſs. Von der ursprünglichen Ruhe aus denke man alle Atome in Schwingungen von gleicher Dauer versetzt und betrachte die Körpergrenze. Nach innen zu ist der Äther dünner, aber hier stehen seine Atome dem Körperatom näher als auſsen. Nun wird gezeigt, daſs während der nach innen gelegenen Halbschwingung des Körperatoms die nach auſsen treibende Kraft gröſser ist, als während der anderen Halbschwingung die nach innen treibende. Bei Gleichheit beider Dauern muſs also nach auſsen ein gröſserer Weg durchlaufen werden als nach innen, d. h. der Mittelpunkt der Schwingungen weicht nach auſsen. Ähnliches muſs nun für das benachbarte innere Körperatom erfolgen. Entsprechendes geschieht, wenn von vornherein Schwingungen vorhanden waren und nun die Schwingungsweite gröſser wird. Gleichzeitig mit der Ausdehnung wird vermutlich ein Eintreten von Äther stattfinden. Nun lehrt die Erfahrung, daſs Ausdehnung durch Zunahme des Wärmegrades (d. h. der Temperatur) erfolgt. Also besteht die Zunahme des Wärmegrades in einer Zunahme der Schwingungsweite und damit verbundener Abnahme der Schwingungsdauer der Äther- und Körperatome. Erwägt man ferner, daſs zwei sich berührende Körper nur dann ihren Rauminhalt gegenseitig nicht ändern, wenn ihre Atome gleiche Schwingungsdauern haben, so ergiebt sich die wichtige Folgerung, daſs zwei Körper dann gleiche Wärmegrade haben, wenn die Schwingungsdauer der Atome in beiden gleich ist.

Nachdem ferner der Begriff der Wärmemenge als einer Arbeitsgröſse erörtert ist, wird zur mechanischen Erklärung der Wirkungsweise der hauptsächlichsten Wärmequellen übergegangen. Wenn schwingende Atome durch äuſsere Kraft einander näher gerückt

werden, so wachsen für das einzelne Atom die nach seiner Gleichgewichtslage gerichteten Kräfte; folglich nimmt die lebendige Kraft in der Gleichgewichtslage zu und die Schwingungsdauer ab, d. h. Wärmemenge und Wärmegrad nehmen zu. So erklärt sich die Wärmeerzeugung beim Zusammendrücken.

Aufs eingehendste wird sodann die Wärmeerzeugung durch Stofs erörtert und die Entstehung von Erschütterungsschwingungen und Stofsschwingungen nachgewiesen. So hat der stofsende Körper eine gewisse lebendige Kraft während des Stofses auf den gestofsenen Körper übertragen, also einen gleich grofsen Verlust von lebendiger Kraft erlitten. Die lebendige Kraft der im gestofsenen Körper erzeugten Schwingungen geht nun allmählich in die viel kleineren, aufserordentlich viel kürzer dauernden Atomschwingungen über, welche die Wärmeschwingungen sind. Man erkennt also: „Wenn zwei vollkommen federnde Körper zusammenstofsen, so nimmt die Summe der in ihnen enthaltenen lebendigen Kräfte durch den Stofs ab; dieser Verlust ist gleich der Zunahme der Wärmemenge in beiden. Körper, welche durch den Stofs keine Abnahme an lebendiger Kraft erleiden, sind ganz undenkbar und man kann dies auch nicht als Kennzeichen der federnden Körper betrachten.“ Wenn sich hier der Verfasser auch in bewufsten Widerspruch zu der herrschenden Lehre setzt, so dürfte er doch durch Thatsachen nicht widerlegbar sein.

Es folgen Betrachtungen über das atomistische Wesen der verschiedenen Körperzustände. Der Unterschied des festen und luftförmigen Zustandes wird, wie schon Eingangs erwähnt, auf das Bestehen zweier Gleichgewichtslagen von verschieden grofser Stabilität zurückgeführt und so die verschieden starke Ausdehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit, sowie die Verschiedenheit des Zusammenhanges erklärt. Das Fehlen des Zusammenhanges bei den Luftarten folgt aus dem Überwiegen der von äufseren Körpern auf ein Luftmolecül geübten Anziehungen (z. B. seines Gewichtes) über die von den benachbarten Luftmolecülen ausgehende Anziehung. Die Verdampfung eines festen Körpers besteht im Übergange seiner Teilchen aus der näheren, stabileren Gleichgewichtslage in die fernere, minder stabile. Mit solchem Übergange in Dampfzustand mufs eine sehr beträchtliche Zunahme der in ihm enthaltenen Äthermenge verknüpft sein.

Sehr wichtig sind die Auseinandersetzungen über den flüssigen Zustand, weil sie eine sehr detaillirte kinetische Theorie desselben darstellen, zu welcher der Verfasser gänzlich unabhängig von den Clausius'schen Anschauungen gelangt ist. Als Ausgang dient die Frage, wozu die beim Schmelzen zugeführte Wärme, die ja keine Temperatursteigerung erzeugt, verwendet wird? Sie kann nicht zur Überwindung innerer Kräfte bei Lagenänderung der Atome verbraucht sein, denn eine durchgehende Entfernung der Körpermolecüle von-

einander tritt häufig gar nicht ein; viele Körper, z. B. Eis, vermindern vielmehr beim Schmelzen ihren Raum. Auch kann keine Zerreifsung von Moleculargruppen eintreten, weil „die vereinzelten Molecüle durch die Vereinzelung näher zusammenrücken und somit unverschiebbarer werden würden“ als zuvor. „Also mufs die verbrauchte Arbeit zur Vermehrung der lebendigen Kraft der schwingenden Atome verwendet werden.“ Aber eine Steigerung der lebendigen Kraft könnte nur durch Verminderung der Schwingungsdauer, also Erhöhung der Temperatur, herbeigeführt werden, und letztere tritt eben nicht ein. Der Verfasser findet aus dieser Schwierigkeit den Ausweg durch die Annahme, dafs im festen Körper die Schwingungen der Körper- und Ätheratome einander entgegengesetzt, im flüssigen hingegen gleichgerichtet seien! Die Schmelzwärme wird dann zur Erhöhung der lebendigen Kraft verwendet, welche bei der Umkehrung der Schwingungsrichtung notwendig ist, um die Schwingungsdauer der Temperatur ungeändert zu erhalten. Der Vorgang ist, genauer, folgender. Bei Erwärmung eines festen Körpers nimmt die Schwingungsdauer seiner Atome ab, während Weite und lebendige Kraft zunehmen. Betrachtet man nun die zunächst einer beliebigen Geraden gelegenen Molecüle und projicirt ihre Schwingungen auf die Gerade, so möge jene Länge, welche zwischen zwei aufeinander folgenden Molecülen von derselben Phase liegt, Wellenlänge heifsen, obgleich keine Strahlung, sondern nur ein Phasenunterschied stattfindet; es ist eine Art stehender Wellen. An irgend einer Stelle der Geraden kann nun durch fortwährende Temperatursteigerung der Abstand zweier Molecüle einmal so grofs werden, dafs das Bereich des festen Gleichgewichts überschritten wird, sodafs die wirkende Kraft nicht mehr nach der früheren Gleichgewichtslage hingekehrt ist, sondern ihre Richtung umgekehrt hat. Dieses und die entsprechenden anderen Molecüle schwingen daher nicht mehr in jene Lage zurück, sondern bewegen sich jetzt in der Richtung der Ätheratome. Indem so der Zwischenraum zwischen zwei Körpermolecülen sehr rasch und sehr erheblich vergröfsert wird, mufs der benachbarte Äther in denselben hineinstürzen, weitere Körpermolecüle und Ätheratome müssen folgen, und so tritt ein beständiges Verschieben der Teilchen gegen einander ein. Hiermit ist die für die Flüssigkeiten charakteristische Verschiebbarkeit erklärt. Aber auf irgend einer Geraden bilden die Stellen dieser Verschiebung nur einen Bruchteil der vorher eingeführten „Wellenlänge“, während im übrigen Bruchteil augenblicklich die Molecüle innerhalb der Grenzen des festen Gleichgewichts sind. Daher besitzt die Flüssigkeit in diesen Räumen doch noch Cohäsion. Diese Theorie des flüssigen Zustandes wird nun durch sorgfältige Untersuchung der Brown'schen Molecularbewegungen sehr wesentlich gestützt, wovon nachher Genaueres.

Es mufs hervorgehoben werden, dafs diese Entwickelungen an die Annahme der Abstofsung zwischen Äther- und Körperatomen gebunden sind, dagegen unverträglich sind mit der Annahme der Anziehung zwischen ihnen. Denn im letzteren Falle müfsten die Körperatome gleichsam von einer Rinde berührender Ätheratome umgeben sein, und dann könnten beiderlei Atome nicht eine verschiedene, gar entgegengesetzte Bewegung annehmen. Weil nun eine genügende Erklärung des atomistischen Unterschiedes von festem und flüssigem Körperzustand bei Annahme der Anziehung der Körper- und Ätheratome dem Verfasser unmöglich erscheint, so hat er die Hypothese der Abstofsung beider Atomarten angenommen.

Ein weiterer Abschnitt ist der eigentümlichen Wärme, der Strahlung und Leitung gewidmet. Durch Leitung wird die schon in einem Körper gesammelte Wärme, welche in lebendiger Kraft schwingender Körpermolecüle und Ätheratome besteht, fortgepflanzt; durch Strahlung dagegen nur Schwingungen des Äthers, welche an einem Körper Wärme hervorbringen können, aber noch keine Wärme sind. Näher betrachtet wird die Zurückwerfung eines Strahls an der ebenen Grenze zweier Medien bei senkrechtem Einfall. Zunächst sei das zweite Mittel dichter als das erste, der in ihm enthaltene Äther also dünner als im ersten. Wir fassen drei parallele Ätherschichten ins Auge: die dem ersten Medium angehörige Grenzschicht, die dem zweiten angehörige Grenzschicht und die dieser anliegende Schicht im zweiten Medium; sie mögen die erste, zweite und dritte Schicht heifsen. Wird die erste Schicht verschoben, so sucht sie die zweite ebenso zu verschieben, während die dritte zurückhält. Gehörten alle drei demselben Mittel an, so hätte die Differenz jener verschiebenden und dieser zurückhaltenden Kraft, d. h. die auf die zweite Schicht wirksame Gesamtkraft eine gewisse Gröfse. In unserem Falle aber rührt die zurückhaltende Kraft von dünnerem Äther her, ist also kleiner, die wirksame gröfser, und somit auch die von der zweiten Schicht erlangte Geschwindigkeit gröfser. Infolge der gesteigerten Beschleunigung dieser Schicht bleiben ihre Atome weniger hinter denen der ersten Schicht zurück, verzögern letztere also weniger, als wenn alle drei Schichten gleichartig wären. Also wird die Schwingungsweite der Grenzschicht des ersten Mediums gröfser als im homogenen Medium. Diese Schwingung ist nun auffafsbar als Summe zweier: nämlich jener des ersten Mediums, wie sie in einiger Ferne statthat, sodann der Differenz der Schwingungen im zweiten und im ersten (denn im zweiten ist ja wegen der geringeren Ätherdichte eine gröfsere Schwingungsweite entstanden als im ersten herrscht). Der erste Summand ist die Schwingung des einfallenden Strahls, der zweite die des zurückgeworfenen.

Ist hingegen das zweite Mittel dünner als das erste, der

Äther in ihm also dichter, so mufs die Grenzschicht des ersten Mittels kleinere Schwingungen machen als im homogenen Medium. Diese Schwingung ist nun auffafsbar als Differenz zweier: nämlich jener des ersten Mediums, wie sie ungestört in der Ferne statthat, sodann der Differenz der Schwingungen im ersten und zweiten. Nun aber ist eine Differenz zweier Schwingungen identisch mit der Summe aus der ersten und der umgekehrten zweiten. Der erste Summand ist die Schwingung des einfallenden Strahls, der zweite (mit der entgegengesetzten Phase) die des reflectirten. — Diese Betrachtung wirft helles Licht auf die Fresnel'schen Reflexionsformeln.

Anhangsweise wird noch kurz angedeutet, wie die Elektricität vielleicht auf Schwingungen beruht, die nicht zum Körperatom hin gerichtet sind, gleich den Wärmeschwingungen, (die ja das Volumen vergröfsern), sondern tangential zu einer das Atom umgebenden Kugelfläche.

Die vierte Abteilung behandelt die chemischen Erscheinungen. Die beim Zusammentreten verschiedener Atome zu einem Molecül, d. h. also bei chemischer Verbindung erzeugte freie Wärme besteht aus drei Teilen: aus der durch die Stellungsveränderung der Atome erzeugten Arbeit, aus der Abnahme der lebendigen Kraft der schwingenden Atome bei derselben Schwingungsdauer oder Temperatur, und aus der lebendigen Kraft der aus dem Körper ausgetretenen Ätheratome. Weil die entwickelte Wärme meist positiv ist, so schliefst man, dafs meist die (stets positive) Arbeit der auf die Körperatome wirkenden Kräfte beim Übergang aus der schwankenden in die feste Gleichgewichtslage überwiegt. In selteneren Fällen wird überwiegend Arbeit verschluckt durch den neu eingetretenen Äther, durch das Auseinandertreten der zu Molecülen verbundenen Körperatome beim Flüssig- oder Gasförmigwerden, durch die erhöhte lebendige Kraft der mit gleicher Dauer schwingenden Atome. — Wärme kann chemische Verbindungen bewirken, indem die Schwingungsweite wächst, also das Gegeneinanderschwanken der Atome sich steigert. Dadurch wird die Erreichung und Überschreitung der schwankenden Gleichgewichtslage erleichtert. Wärme kann aber auch chemische Verbindungen trennen. Daraus ist zu schliefsen, dafs auch in der Verbindung die Atome sich nicht bis zur Berührung nahe stehen, sondern durch Äther getrennt sind. Das Schwingen desselben, hinreichend gesteigert, führt den Zerfall herbei. — Chemische Verwandtschaft ist das Übergewicht der die Körperatome annähernden über die entfernenden Kräfte; auf diese haben auch die Schwingungszustände, die ja die mittleren Anordnungen verändern, Einflufs. So versteht man, dafs sehr grofse chemische Verwandtschaft durch hohen Wärmegrad unter Umständen ganz aufgehoben, unter Umständen aber auch erst hergestellt werden kann.

In der fünften Abteilung werden die Erscheinungen in

der belebten nicht geistigen Welt behandelt. In den Pflanzen liefern Wärme und Licht die arbeitenden Kräfte, aber die Gegenwart organischer Körper ist nötig, damit diese Kräfte gerade die Arbeit der Umwandlung statt der gewöhnlichen Erwärmung hervorbringen. Es besteht ein eigentümlicher Gegensatz zwischen Pflanzen und Tieren. Die Pflanze verzehrt Wärme, indem in ihr die unorganischen Körper zu organischen umgebildet, indem die fest zusammenstehenden Atome auseinander gerissen und in eine weniger feste Stellung in einer geringeren Anzahl von Molecülen gebracht werden. Der tierische Körper entwickelt hingegen Arbeit, welche teilweise in Wärme besteht, indem die organischen, von den Pflanzen herrührenden Stoffe wieder zu tieferen organischen oder zu unorganischen herabsinken, und indem die Atome wieder zu festeren Verbindungen in einer gröfseren Anzahl von Molecülen zusammentreten. — Die letzte Untersuchung des Werkes ist dem an einem Beispiel durchgeführten Nachweise gewidmet, dafs die Kräfte im lebenden Körper die ungeänderten Grundkräfte sind. Es handelt sich um Erforschung der Ursachen, die die Gestalt eines belebten Körpers bedingen. Zunächst wird jede teleologische Erklärung abgewiesen. „Wir können nicht sagen, wo sich das Vorbild befindet und auf welche Weise es gerade wie eine Kraft wirken soll.“ Diese Lehre setzt voraus, „dafs ein künftiger Zustand Einflufs auf eine vorhergehende Bewegung oder Veränderung habe, widerspricht also unserem ersten Grundsatze, dafs jede Bewegung ganz allein durch den unmittelbar vorhergehenden Zustand und die unveränderlichen Eigenschaften der Stoffe bedingt werde.“ Und nun wird am Beispiele einiger Weichtierschalen (Goniatites, Papiernautilus u. a.) auf Grund einfacher Rechnung gezeigt, dafs die mannigfaltigen Formen der Schalen notwendige Folgen vorhergehender Zustände und nicht voraus erfunden sind. Nämlich wo die logarithmische Schneckenlinie auftritt, ist das Verhältnis der Körperzunahme zu dem gleichzeitigen Zuwachse der Schalenmasse unveränderlich; wo aber die parabolische Schneckenlinie herrscht, wächst der Tierkörper bei gleichem Schalenzuwachs um so weniger, je weiter das Tier von der Mitte wegkommt. So ist die Schalenform auf die Wachstumsfähigkeiten des Tier- und Schalenkörpers als auf ihre nächste Ursache zurückgeführt. Woher aber diese Fähigkeiten rühren: das zu erforschen, ist Aufgabe der Physiologie.

Hiermit dürfte der wesentliche Inhalt der Atomenlehre skizzirt sein. Abgesehen von der consequenten Verfolgung der Grundhypothesen über die Constitution der Materie scheinen dem Referenten aus dem reichen Inhalte von besonderer Wichtigkeit und bleibendem Werte hauptsächlich drei verschiedene Gedankenreihen: nämlich erstens die Untersuchungen über Krystallstructur, welche zum ersten

Male zu Structuren mit nicht durchgängig parallel gestellten Atomen geführt haben; sodann die Studien über die Wärmeschwingungen der Atome, welche dieses Gebiet wesentlich durchleuchten; und schliefslich die Zurückführung gewisser Schalenformen von Weichtieren auf Wachstumsverhältnisse, wodurch die Entstehung der merkwürdigen Schneckenlinien einigermafsen begreiflich wird.

Von den physikalischen Abhandlungen schliefst sich an die Atomenlehre am unmittelbarsten an: die Erklärung des atomistischen Wesens des tropfbar flüssigen Zustandes und Bestätigung desselben durch die sogenannten Molecularbewegungen (Poggendorff's Annalen 118, 1863, S. 79—94). Den Hauptinhalt dieser Abhandlung, welche der Wiederabdruck eines Bruchstücks der Atomenlehre ist, bildet eine eingehende, soweit möglich messende Beschreibung der Brown'schen Molecularbewegungen, d. h. regellos zitternder, zickzackförmig hin- und hergehender Bewegungen, welche alle kleinen in einer Flüssigkeit suspendirten Teilchen zeigen, sowie der Nachweis, dafs dieselben keinerlei äufseren Ursachen zugeschrieben werden können, sondern aus dem Wesen des flüssigen Zustandes selber erklärt werden müssen. Als solche äufsere Ursachen werden folgende zurückgewiesen: 1) Infusorien können nicht beteiligt sein, denn auch Körnchen ausgeglühten Quarzpulvers zeigen diese Bewegung, und zwar nicht nur einige, sondern alle. 2) Die Bewegung ist der Flüssigkeit nicht beim Aufsetzen des Tropfens mechanisch mitgeteilt, denn sie ist unregelmäfsig, abgebrochen, ganz verschieden von jeder Schwingung; auch hält sie zwölf Tage in gleicher Stärke an, während eine Erschütterung schon binnen Secunden durch Reibung unmerklich geworden sein müfste. 3) Wechselnde Anziehungen und Abstofsungen der Körnchen unter einander können nicht die Ursache sein; denn auch bei hoher Verdünnung der Flüssigkeit zeigt jedes ganz isolirt gelegene Körnchen dieselbe Bewegung. Auch bewegen sich zwei benachbarte Körnchen ganz unregelmäfsig und unabhängig von einander, sowie unabhängig von ihrer Entfernung. 4) Temperaturunterschiede sind unbeteiligt, denn solche müfsten sich nach Tagen ausgeglichen haben. Auch könnten sie wohl Strömungen, aber nicht jenes Zittern und Zucken erzeugen, dessen Richtung in den kleinen Räumen vom Durchmesser eines Teilchens wechselt. In so aufserordentlich kleinen Räumen könnten sich verschiedene Temperaturen gar nicht dauernd erhalten oder neu entstehen.*) Auch veranlafst plötzliche Senkung der Umgebungstemperatur um 17°

*) Regnauld (1857) indessen sieht die Ursache in Temperaturdifferenzen, die durch Absorption der Beleuchtungsstrahlen des Mikroskops in den einzelnen Körnchen entstehen. Diese Deutung pafst aber schwerlich auf die von Renard 1874 an Gasbläschen beobachteten Molecularbewegungen. So bleibt also die Wiener'sche Deutung doch wohl als einzig mögliche stehen!

oder Erhitzung durch concentrirte Sonnenstrahlen keine merkliche Änderung der Zitterbewegung. 5) Verdunstung kann nicht mitwirken, denn die Bewegung geht ebenso vor sich, mag man den Tropfen der freien Verdunstung aussetzen oder der Verdunstung durch sorgfältigen Abschlufs entziehen. — Nach allem bleibt nur übrig, die Ursache inneren, dem Flüssigkeitszustande eigentümlichen Bewegungen zuzuschreiben. Über letztere läfst sich sogar auf Grund von Messungen über die Abhängigkeit der mittleren Geschwindigkeit von der Gröfse des Körnchens noch etwas Näheres aussagen. Teilchen, deren Durchmesser zwischen 0,0006 und 0,0014 mm lag, legten — ohne dafs ihre verschiedene Gröfse eine merkliche Verschiedenheit der Geschwindigkeit zur Folge hätte — im Mittel secundlich Wege von 0,0016 mm zurück. Teilchen von 0,0023 mm Durchmesser durchliefen secundlich 0,0005 mm; noch gröfsere Teilchen noch weniger. Also kann der Durchmesser einer gleichmäfsig bewegten Wassermasse nur etwa halb so grofs als 0,0023, d. h. = 0,0012 mm sein; denn nur so ist es möglich, dafs zwei verschieden bewegte Wasserpartien an demselben Körnchen keine nennenswerte Bewegung mehr hervorrufen. Auch stimmt hiermit, dafs Teilchen von geringster Gröfse bis 0,0014 mm merklich dieselbe Geschwindigkeit zeigen. Sonach bieten die Molecularbewegungen einen direct sichtbaren Beweis für die kinetische Theorie des flüssigen Zustandes dar.*) Über diesen Zustand hat der Verfasser ganz bestimmte Vorstellungen entwickelt, die oben bei Besprechung der Atomenlehre dargestellt wurden. Er eröffnet die gegenwärtige Abhandlung sogar mit Auseinandersetzung seiner hypothetischen Ansichten und hat dadurch wohl manchen Leser von vornherein abgeschreckt, sodafs wahrscheinlich aus diesem Grunde seine Abhandlung so wenig bekannt geworden ist. Noch 1888 hat H. Gouy es als etwas Neues verkündet, dafs die Molecularbewegungen einen Beweis für die kinetische Theorie des flüssigen Zustandes liefern, wogegen allerdings von Wiener Prioritätsreclamation erhoben wurde.**)

Zeigt sich W. in den geschilderten Untersuchungen wesentlich als philosophisch-naturwissenschaftlicher Denker und als Geometer, so bethätigt er sich in der Abhandlung: „Die Zerstreuung des Lichtes durch matte Oberflächen" (Festschrift d. Techn. Hoch-

*) Unter diesen Umständen ist es sicher merkwürdig, dafs der Begründer der kinetischen Theorie der Flüssigkeiten, Clausius (1857), niemals von der Wiener'schen Abhandlung Kenntnis genommen hat, wie Referent bei der Naturforscherversammlung in Baden-Baden 1879 von Clausius selbst zu hören Gelegenheit hatte.

**) Gouy im Journ. d. Phys. (sér. 2) 7, 561. Auszug in der Naturwissenschaftl. Rundschau 4, 1889, S. 152. Dazu Wiener: Naturwissenschaftl. Rundschau 4, 1889, S. 232, wo er auf seine Abhandlung und auf „Grundzüge der Weltordnung" 1863, S. 175 verweist.

schule zu Karlsruhe zum vierzigjährigen Regierungsjubiläum Sr. Kön. Hoh. d. Grofsherz. Friedrich v. Baden; auch Wiedemann's Ann. d. Phys. u. Chem. 47, 1892, S. 638) als wohl überlegender Experimentator, der seine Beobachtungen mathematisch geschickt zu verwerten weifs. Nach Lambert soll die Helligkeit einer matten Fläche proportional sein der Stärke des beleuchtenden Lichts, dem Rückstrahlungsvermögen (albedo) und dem Cosinus des Einfallswinkels ε, aber unabhängig vom Ausfallswinkel α, so dafs die Fläche, von jeder beliebigen Richtung aus betrachtet, gleich hell erscheinen würde. Aber schon Bouguer'sche Messungen lehren, dafs dies nicht allgemein richtig sein kann. Die Theorie v. Lommel's, nach der die Zerstreuung von Raumteilen der Körpermasse ausgeht, läfst die Stärke des zerstreuten Lichts abhängig erscheinen von Absorptions- und Diffusionsvermögen und Dicke der wirksamen Schicht und sonst nur noch vom Ein- und Ausfallswinkel; in Bezug auf letztere zwei ist der Ausdruck symmetrisch gebaut, sodafs die Menge des von einem Flächenelement zurückgeworfenen Lichts sich nicht ändert, wenn ein- und ausfallender Strahl vertauscht werden. Hier wird die Oberfläche als vollkommen matt und rauh und frei von jeder Spiegelung vorausgesetzt, und wo dies erfüllt ist (z. B. Rufs), da bewährt sich, wie Angström gezeigt hat, die Theorie. Aber andere Stoffe (Papier, gegossener Gyps) zeigen deutlich vermehrte Zurückwerfung in Richtung der Spiegelung. Hier genügt diese Theorie nicht, denn hier ist noch das Azimut ν, d. h. der Winkel zwischen Einfalls- und Ausfallsebene, von wesentlichem Einflufs. Nun hat früher Bouguer eine Theorie entwickelt, nach welcher die matte Fläche aus einer grofsen Anzahl verschieden gelagerter kleiner ebener Spiegelflächenelemente bestehen soll. Ferner nimmt er an, dafs der ein- und ausfallende Strahl ohne Änderung der Helligkeit vertauschbar seien. Aber nach Wiener's Versuchen besteht diese Vertauschbarkeit bei glatten und matten Körperoberflächen nicht. Hier ist die Helligkeit gröfser bei kleinem Einfalls- und grofsem Ausfallswinkel als umgekehrt. Nämlich bei steilerem Auftreffen dringen die Strahlen in die Vertiefungen der Rauhigkeiten ein und werden vielfach reflectirt; bei schrägem Auftreffen aber liegen die Vertiefungen zum Teil im Schatten. Bei solchen Körpern findet sowohl Eindringen des Lichts (Lommel) als zerstreuende Spiegelung an kleinen Flächen (Bouguer) statt. Aber der für verschiedene Stoffe verschiedene Rauhigkeitsgrad und die wechselnden Gestalten der Erhöhungen vereiteln eine allgemeine Theorie, so dafs jeder Stoff einzeln untersucht werden mufs. Nun hat schon H. Seeliger durch Messungen an sechs verschiedenen Stoffen gefunden, dafs namentlich bei gröfseren Ein- und Ausfallswinkeln das Lambert'sche Gesetz nicht gilt, dafs bei grofsen gegenüberliegenden Winkeln meist merkliche Spiegelung eintritt, und dafs keine der zwei obigen Theorien allein die Erschei-

nungen erklärt; aber er hat sich auf die Azimute 0^0 und 180^0 beschränkt. Wiener dagegen beobachtet nur an einem einzigen Stoff, aber bei je 9 verschiedenen Einfalls- und ebensovielen Ausfallswinkeln und bei je 7 verschiedenen Azimuten. Die Ausführung der Versuche war einfach. Von zwei möglichst identischen quadratischen Platten aus feinstem, weifsem, gegossenem Gyps wurde die eine mittelst einer Kerze unter den gewünschten Winkeln beleuchtet und beobachtet, und der anderen Platte dann eine zweite gleiche Kerze soweit genähert (Entfernung a), dafs sie, senkrecht getroffen und beobachtet, gleich hell mit der ersten erschien. Die Helligkeit der zweiten ist $\frac{1}{a^2}$. Da die der ersteren ihr gleich ist, während ihre Beleuchtungskerze den Abstand b hat, so ist die Helligkeit dieser ersteren, bei unveränderten Winkeln, beleuchtet aus dem Abstand 1, $= \frac{b^2}{a^2}$. Dies ist die gewünschte Gröfse. — Um trotz der nur mäfsigen Genauigkeit der Beobachtungen brauchbare Ergebnisse abzuleiten, wurde eine geometrische Ausgleichung nach dem Gesetze der Stetigkeit ausgeführt. Das Ziel war die übersichtliche Darstellung der Helligkeit in den verschiedenen Beobachtungsrichtungen. Trägt man von einem Punkt der Fläche aus für einen bestimmten einfallenden Strahl (constantes ε) auf jedem austretenden Strahl die Helligkeit H auf, unter welcher die Fläche in ihm erscheint, so bilden die Endpunkte dieser Strecken H die „Helligkeitsfläche". Nach dem Lambert'schen Gesetz wäre diese Helligkeit constant $= \cos \varepsilon$, also die Helligkeitsfläche eine Halbkugel von diesem Radius. Durch die Normale des Gypsflächenelements F gelegte Ebenen schneiden die Helligkeitsfläche in „Meridiancurven"; Umdrehungskegel um dieselbe Normale (Spitze in F) schneiden sie in „Kegelcurven". Zur Ermittelung der Helligkeitsfläche werden die Beobachtungen nun zuerst benutzt, um solche Curven von möglichst stetigem Verlauf zu construiren und dadurch die Beobachtungsfehler unschädlicher zu machen. Nach den ausgeglichenen Curven sind Tabellen für die Werte von H berechnet, jede für constantes ε, aber wechselnde α und ν. Vermittelst einer jeden Tabelle ist dann eine Helligkeitsfläche construirbar. Photographische Nachbildungen der Modelle von 4 Helligkeitsflächen (nämlich für $\varepsilon = 0^0$, 30^0, 60^0, $82\frac{1}{2}{}^0$) sind beigegeben; auf jeder ist zugleich die Lambert'sche Halbkugel ersichtlich. H zeigt sich bei constantem ε und wechselndem α von 0^0 bis 60^0 ziemlich gleichförmig und meist etwas kleiner als nach Lambert. Für α zwischen 60^0 und 90^0 nimmt H im allgemeinen ab und erreicht bei streifendem Sehen etwa 0,6 des Wertes für $\alpha = 0^0$. Auf der dem einfallenden Strahl gegenüberliegenden Seite ist die Helligkeit gröfser als bei gleichem α auf derselben Seite. Je gröfser ε, um so stärker wird

die Spiegelung; bis $\varepsilon = 60^0$ ist sie nur durch gröfsere Helligkeit, noch nicht durch Glanz bemerkbar. Bei $\varepsilon = 75^0$ herrscht deutliche Spiegelung mit Glanz von $\alpha = 73^0$ bis 90^0, am stärksten ($H = 2{,}2$) bei $\alpha = 79^0$. Bei $\varepsilon = 82^1/_2{}^0$ ist sie am gröfsten ($H = 5{,}2$) bei $\alpha = 85^0$, während $\cos \varepsilon = 0{,}13$. Der Ausfallswinkel für stärkste Spiegelung ist immer etwas gröfser als der zugehörige Einfallswinkel.

Die geschilderten Messungen veranlafsten ferner eine psychophysische Untersuchung: „Die Empfindungseinheit zum Messen der Empfindungsstärke“ (Wiedemann's Annalen 47, 1892, S. 659), welche vielfache Berührungspunkte mit Fechner's Ideen darbietet, obgleich sie gänzlich unabhängig entstanden ist. „Die Empfindungseinheit ist gegeben durch die eben bemerkbare Unterscheidbarkeit zweier Empfindungen, und die Mafszahl einer Empfindungsstärke ist die Anzahl der schwächeren Empfindungsstärken, welche man zwischen der gegebenen und dem Mangel an jeder Empfindung mit eben noch bemerkbarer Unterscheidbarkeit einschalten kann, vermehrt um Eins.“ Zur Verwertung dieses Gedankens dienen nun die beiden Gypsplatten, deren Entfernungen von der Beleuchtungsflamme abwechselnd solange geändert werden, bis jedesmal die eine oben merklich heller erscheint als die andere. Nun ist nach dem Weber'schen Gesetze der Unterschied zweier Empfindungen eben merkbar, wenn der Reiz sich um einen bestimmten verhältnismäfsigen Teil seiner Gröfse verändert. Die hieraus folgende Beziehung, dafs die Empfindung proportional ist dem Logarithmus des durch den Schwellenwert dividirten Reizes, wird für die ausgeführten Messungen graphisch dargestellt.

Im naturwissenschaftlichen Verein zu Karlsruhe, dessen Vorsitzender W. eine längere Reihe von Jahren war, hat er eine grofse Anzahl von Vorträgen gehalten, die in den „Verhandlungen des Vereins“ gedruckt vorliegen. Hier seien nur folgende genannt: Das Wachstum des menschlichen Körpers. Ein neuer Schädelmesser. Über die Schönheit der Linien. Über „Cogito, ergo sum“. Beweis für die Wirklichkeit der Aufsenwelt. Die Farbe der atmospärischen Luft und Etwas über die Goethe'sche Farbenlehre. Letztere Abhandlung ist ein kleines Bruchstück aus dem oben erwähnten hinterlassenen Werke über die Helligkeit des Himmels. Zwei der angeführten Vorträge behandeln philosophische Themata, wie ja auch die „Grundzüge der Weltordnung“ in ihrem zweiten Teile von rein philosophischem Inhalte sind. Auf einzelne Kapitel dieses Werkes ist W. später noch in wiederholten Veröffentlichungen zurückgekommen, so in: „Die ersten Sätze der Erkenntnis, insbesondere das Gesetz der Ursächlichkeit und die Wirklichkeit der Aufsenwelt“ (Virchow-Holtzendorff's Samml. gemeinverständlicher Vorträge, IX. Serie, Heft 212, Berlin 1874). „Die Begründung der Sittenlehre und ihre geschichtliche Entwickelung,“ Darmstadt 1879. „Die

Freiheit des Willens", Festrede beim Directoratswechsel der Technischen Hochschule zu Karlsruhe 1891; auch Darmstadt 1894. In letzterer Abhandlung wird die Freiheit des Willens bejaht, unbeschadet der ausnahmslosen Ursächlichkeit aller Vorgänge, indem nämlich die Freiheit eines Gegenstandes bei der Bewegung als alleinige Abhängigkeit von Ursachen, die innerhalb des Gegenstandes liegen, also als Unabhängigkeit von aufserhalb liegenden Ursachen definirt wird. Auf den sonstigen reichen Inhalt der philosophischen Schriften W.'s überhaupt einzugehen, ist aber hier nicht beabsichtigt.

Die vorstehende Schilderung der W.'schen Abhandlungen läfst erkennen, wie ungewöhnlich grofs der Interessenkreis war, der ihn beschäftigte, und wie tief eindringend er den verschiedensten Problemen nachging. Dieser geistige Reichtum war denn auch die Ursache, dafs sich der persönliche Verkehr mit W. für jeden so ungemein fruchtbar und anregend gestaltete; W. hatte eben so sehr viele Gebiete selbständig denkend durchgearbeitet und war dadurch befähigt, bei Gesprächen über die verschiedensten Gegenstände nicht an der Oberfläche zu bleiben, sondern wesentlich in die Tiefe zu dringen und hier und da mit hellen Gedankenblitzen erleuchtend zu wirken. Besonders charakteristisch erscheint überall sein Drängen auf Anschaulichkeit und Klarheit, und das Fernhalten jeglicher Phrase. Es ist zu vermuten, dafs auch die für seine Schreibweise charakteristische Vermeidung aller Fremdworte ursprünglich wohl aus dem Bestreben nach möglichst klarer und verständlicher Ausdrucksweise hervorgegangen war.

Schliefslich noch ein Wort über W.'s Charakter, der zu den edelsten und reinsten gehörte, denen man begegnen kann. Die hervorstechenden Züge: strenge Wahrhaftigkeit, unbedingtes Pflichtgefühl und ein nie versiegendes Wohlwollen machten W. zu einem der geachtetsten und liebenswürdigsten Menschen, der überall Freundschaft erweckte und keinen Feind hatte.

Nachschrift. Seitdem Leonhard Sohncke seinen Anteil an obigem Nachruf geschrieben, ist er dem älteren Freund ins Grab gefolgt. Es war seine letzte schriftstellerische Arbeit, und die Fülle und Klarheit der Darstellung lassen nicht ahnen, dafs der Verfasser beim Niederschreiben schon schwer leidend war. Nicht ohne Rührung wird man die Schlufsworte des Nachrufs lesen, die ihm selber hätten gelten können: ein Kranz, dem Andenken des Freundes geweiht, der auch sein Bild nun umrahmt.

Bericht

über die

wissenschaftlichen Sitzungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung

während der

Jahres-Versammlung zu Braunschweig.

Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht.

Von **Alfred Pringsheim** in München.

Daſs die ältere, auf angeblichen geometrischen Evidenzen beruhende Einführungsart des Irrationalen, sowie des damit unmittelbar zusammenhängenden Grenz- und Stetigkeitsbegriffes nicht mehr haltbar erscheint, und daſs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen in der angedeuteten Richtung einen erheblichen Fortschritt bedeuten, ja, unseren heutigen Anschauungen entsprechend, wirklich geeignet sind, eine brauchbare Grundlage für den consequenten Aufbau der Analysis abzugeben, wird wohl von der übergroſsen Mehrzahl der wissenschaftlichen Mathematiker anerkannt: nicht bloſs von den eigentlichen Anhängern der Weierstraſs'schen Richtung, den Zahlentheoretikern und Algebraikern, sondern auch von denjenigen, welche mehr von der Seite der Geometrie her in die Functionentheorie eingedrungen sind und von der geometrischen Anschauung im weitesten Umfange Gebrauch machen.*)

Da jene Theorien in diesem Jahre gerade das 25jährige Jubiläum ihrer öffentlichen Wirksamkeit**) feiern und man also wohl hinlänglich Zeit gehabt hat, sich über ihren Wert und ihre Brauchbarkeit ein Urteil zu bilden, so erscheint es sicherlich angemessen, zu erwägen, ob und inwieweit dieselben geeignet sind, als Ausgangspunkt bei den üblichen Universitäts-Vorlesungen***) über Differential- und Integral-Rechnung zu dienen — ich meine

*) Vgl. F. Klein, Zur Nicht-Euklidischen Geometrie. Math. Ann., Bd. 37, S. 572. — M. Pasch, Einl. in die Diff.- und Integral-Rechnung. Leipzig 1882.

**) Das Jahr 1872 bildet in der That das gemeinsame Publications-Jahr für die Theorien von Weierstraſs, Cantor und Dedekind. Wenn auch Weierstraſs schon seit geraumer Zeit in seinen Vorlesungen über analytische Functionen davon Gebrauch gemacht haben soll, so finden sich doch die ersten gedruckten Andeutungen darüber bei Kossak, Die Elemente der Arithmetik (Progr. des Werderschen Gymn., Berlin 1872). — Weniger bekannt ist vielleicht, daſs auch Ch. Méray genau dieselbe Theorie, wie Herr Cantor, unabhängig von diesem aufgestellt und deren Grundzüge gleichfalls im Jahre 1872 publicirt hat: Précis d'Analyse infinitésimale, Art. 1—9.

***) Ich spreche hier nur von diesen, nicht von denjenigen an technischen Hochschulen.

damit ausdrücklich jene zur Einführung in die höhere Mathematik bestimmten Elementar-Vorlesungen, welche zumeist von Studirenden in den ersten Semestern besucht zu werden pflegen. Die vorliegende Frage ist bereits von Herrn Klein am Schlusse seines Vortrages „Über Arithmetisirung der Mathematik" gestreift und in scharf verneinendem Sinne entschieden worden*) — mit der Motivirung, daſs der Lernende naturgemäſs im Kleinen immer denselben Entwickelungsgang durchlaufen werde, den die Wissenschaft im Groſsen gegangen ist. Ob es zweckmäſsig erscheint, das Häckel'sche Princip von der Übereinstimmung zwischen Phylogenie und Ontogenie in dieser uneingeschränkten Weise auf eine Frage des Unterrichts zu übertragen, will mir keineswegs einleuchten. Ich meine, wir sollen doch gerade aus der Entwickelungsgeschichte der Wissenschaft lernen, die von früheren Generationen begangenen Schluſsfehler oder Unzulänglichkeiten zu vermeiden — selbst dann, wenn dieselben auf die Richtigkeit der Endresultate keinen Einfluſs ausgeübt haben. Und wie die heutigen Ärzte nicht mehr der Ansicht sind, daſs jeder gewisse Kinderkrankheiten durchmachen müsse, und man demgemäſs bestrebt ist, dieselben durch eine verständige Prophylaxe so viel als möglich fern zu halten, so sollten wir doch wohl auch darauf ausgehen, dem Anfänger die Kinderkrankheiten, welche die Wissenschaft bei ihrer Entwickelung durchgemacht hat, möglichst zu ersparen.

Wenn die Analytiker des vorigen Jahrhunderts, insbesondere Euler, eine ganze Anzahl durchaus richtiger und wertvoller Ergebnisse durch naive Anwendung eines an sich unberechtigten Formalismus aufgefunden haben, so wird doch heutzutage selbst in einer Anfangs-Vorlesung niemand mehr von dieser sehr bequemen, aber unzulänglichen Methode Gebrauch machen. Und, obschon die unserem Verstande anscheinend näher liegende Ansicht, daſs die Wärme eine Materie sei, Jahrhunderte lang die eigentlich herrschende war, so wird heute in den elementarsten Vorträgen, ja im Schulunterricht ausschlieſslich die mechanische Auffassung gelehrt. Oder, um mit einem vielleicht trivial erscheinenden, aber darum nicht minder belehrenden Beispiele zu schlieſsen: Jedermann sieht noch heute oder glaubt vielmehr zu sehen, daſs die Sonne sich um die Erde bewegt, gerade so wie Jahrtausende daran geglaubt haben. Und wenn er selbst über den Wechsel von Tag und Nacht, von Sommer und Winter nachdenkt, so wird er wohl zunächst zu einer Auffassung gelangen, welche dem überwundenen Ptolemäischen Weltsysteme entspricht. Wenn er aber einen Astronomen nach der Ursache und dem Zusammenhange jener Erscheinungen fragt, so wird ihn dieser ohne viele Umschweife zwingen, sich auf den Copernicanischen Standpunkt zu stellen.

*) Gött. Nachr. 1895, Heft 2, S. 9.

Diese Beispiele dürften genügend deutlich machen, dafs das von Herrn Klein angeführte Princip als Unterrichts-Grundsatz keineswegs stichhaltig erscheint und zum mindesten einer genauen Prüfung von Fall zu Fall bedarf. Und ich glaube, dafs das Resultat einer solchen Prüfung ganz anders, etwa folgendermafsen lauten würde: Jeder Einzelne durchläuft im wesentlichen denselben Entwickelungsgang, wie die Wissenschaft selbst, solange ihm kein besserer Weg gezeigt wird. Ist aber ein solcher besserer Weg vorhanden, so ist es gerade die Pflicht und Aufgabe des Lehrenden, ihm denselben nicht nur zu weisen, sondern auch gangbar zu machen.

Nun kann man ja freilich von vorn herein der Ansicht sein, dafs die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen überhaupt keinen solchen besseren Weg zum Eindringen in die Analysis darbieten. Dann scheint zunächst jede weitere Discussion überflüssig. Immerhin ist selbst in diesem Falle eine Verständigung möglich, wenn man nämlich, wie es z. B. Herr Ascoli thut,*) an die Spitze der Analysis ausdrücklich das geometrische Axiom stellt: „Hat man eine unbegrenzte Reihe in einander liegender Strecken von schliefslich beliebig klein werdender Länge, so giebt es stets einen und nur einen Punkt, der im Innern aller dieser Strecken liegt.“ Dieser Standpunkt ist zwar nicht der meinige, aber er ist wenigstens in seiner Art consequent, gestattet eine vollkommen scharfe Definition der Irrationalzahl und erscheint geeignet, verschwommene Grenz- und Stetigkeitsbegriffe zu vermeiden.

Indessen hat ja, wie bereits im Eingange erwähnt, die grofse Mehrzahl der Mathematiker, darunter auch Herr Klein, die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen als geeignetes Fundament der Analysis principiell acceptirt. Es sind also ausschliefslich pädagogische Gründe, welche ihrer Einführung in Vorlesungen der fraglichen Art entgegenstehen sollen. Worin liegen nun aber die Kennzeichen einer falschen Pädagogik? Nach meinem Dafürhalten kann eine solche doch nur in folgendem bestehen: Entweder, man bringt den Schülern Kenntnisse bei, die für sie schädlich, oder zum mindesten überflüssig sind; oder, man mutet ihnen Dinge zu, die ihre Auffassungskraft übersteigen. Sehen wir uns also diese beiden Eventualitäten etwas genauer an.

Zunächst möchte ich dabei ausdrücklich hervorheben, dafs es sich hier keineswegs etwa darum handelt, das Gehirn des Schülers von vornherein mit besonderen functionentheoretischen Finessen zu belasten; vielmehr lediglich darum, ihm durch Beibringung eines vernünftigen Zahlbegriffes eine sichere logische Grundlage zu schaffen, ihm gewissermafsen das Instrument, mit dem er beständig zu operiren

*) Sui fondamenti dell' algebra, Rendic. Ist. Lomb., Ser. II, I. 28 (1895), p. 1060.

hat, vor seinen Augen scharf und schartenfrei herzurichten. Nun besteht das Publicum der in Rede stehenden Vorlesungen*) abgesehen von einer verschwindenden Minorität von solchen, die sich ernstlich höheren mathematischen Studien zuwenden, in der Hauptsache aus künftigen Mittelschul-Lehrern, dann — in sehr viel geringerer Zahl — aus späteren Physikern und Astronomen. Dafs den letzteren, wenn sie auch die Mathematik nur als Hülfswissenschaft betreiben, ein mit sehr mäfsigem Zeitaufwand zu erwerbender Einblick in deren logische Grundlagen schädlich sein könne, wird wohl niemand im Ernste behaupten: ich für meine Person möchte ein gewisses Mafs derartiger Kenntnisse auch für den Naturforscher im Sinne einer allgemeinen wissenschaftlichen Ausbildung zum mindesten für sehr wünschenswert halten. Unbedingt notwendig erscheinen sie mir aber für die künftigen Mittelschul-Lehrer (welche, wie ich nochmals betone, das Haupt-Contingent in jenen Vorlesungen bilden). Ich glaube auch nicht zu irren, wenn ich annehme, dafs diese Ansicht in akademischen Kreisen ziemlich allgemein geteilt wird. Eine Meinungs-Differenz würde dann im wesentlichen nur darin bestehen, dafs man wohl zumeist daran festhält, jene logischen Fundamente, von denen hier die Rede ist, seien besser erst bei späterer Gelegenheit, etwa in einer Vorlesung über Functionentheorie, nachzuholen. Mir will es scheinen, dafs man sich da einer verhängnisvollen Täuschung hingiebt. Der Durchschnitts-Student,**) der einmal die Erfahrung gemacht hat, dafs man mit Hülfe einer gewissen, in den ersten Semestern äufserlich erworbenen technischen Fertigkeit trefflich existiren und allerlei amüsante Dinge treiben kann, hat in den folgenden Semestern nicht die geringste Neigung, sich mit solchen principiellen Gegenständen zu befassen: er erblickt darin lediglich eine eigensinnige Erschwerung des mathematischen Studiums und betrachtet dergleichen als eine Art Luxus-Artikel für eine geistig übermäfsig wohl situirte Minderheit. Und wenn er wirklich Gelegenheit nimmt, derartige Dinge zu hören (was bei uns in München noch garnicht einmal die allgemeine Regel ist), so gehen dieselben ziemlich spurlos an ihm vorüber, wenn er nicht lieber gar die nach seiner Meinung äufserst günstige Veranlassung benützt, einige Stunden munter zu schwänzen.

---

*) Ich spreche hier von Verhältnissen, wie sie zunächst in München bestehen, glaube aber, dafs dieselben an anderen Universitäten nicht wesentlich verschieden sein werden.

**) Nur von diesem kann natürlich hier die Rede sein. Dabei schwebt mir wiederum nur derjenige Typus vor, wie ich ihn im Laufe meiner 20jährigen Lehrthätigkeit zu München gründlich kennen zu lernen Gelegenheit hatte. Immerhin möchte ich annehmen, dafs der Durchschnitts-Student an anderen Universitäten kaum wesentlich anders geartet sein dürfte.

Hier kann nach meinem Dafürhalten nur dadurch Wandel geschaffen werden, dafs man gerade in den einleitenden Vorlesungen, also ehe der Student im Besitze eines nicht ganz redlich erworbenen analytischen Handwerkszeuges sich zu höheren Dingen berufen glaubt, auf eine strenge Einführung der arithmetischen Grundbegriffe hält. Ist eine solche Grundlage einmal vorhanden, so findet sich später auch das Interesse und das Bedürfnis, dieselbe weiter ausgebaut und verfeinert zu sehen.

Mit anderen Worten: ich halte diese Methode gerade für eminent pädagogisch. Sie wäre es freilich nicht, wenn die zweite der oben angedeuteten Eventualitäten einträte, d. h. wenn man damit dem Schüler das Anfangs-Studium der höheren Mathematik ungebührlich erschwerte, ja verleidete. Ich glaube, dafs diejenigen, welche diese Ansicht vertreten, teils die Auffassungskraft der Studirenden in Bezug auf arithmetische Begriffe unterschätzen, teils die Schwierigkeit überschätzen, den fraglichen Weg für den Anfänger „gangbar" zu machen. Ein definitives Urteil hierüber wird wohl weniger auf Grund theoretisirender Erörterungen, als praktischer Erfahrungen gefällt werden können. Und da solche Erfahrungen in ausreichender Weise wohl kaum von denjenigen gesammelt werden können, welche principiell an der älteren geometrisirenden Einführungsart in die Analysis festhalten, so erscheint es vielleicht nicht unbescheiden, darauf hinzuweisen, dafs ich seit etwa 10 Jahren in meinen sich alle zwei Jahre wiederholenden, sehr gut besuchten Elementar-Vorlesungen über Infinitesimal-Rechnung mich der angedeuteten Methode mit durchaus gutem Erfolge bedient habe. Diesem Urteile mag ja immerhin ein gewisses Mafs von Subjectivität innewohnen: Thatsache ist, dafs meine Zuhörer jenen Vorträgen stets mit Interesse und, soweit ich controlliren konnte, auch mit Verständnis gefolgt sind, und dafs der in jeder Vorlesung ja unvermeidliche partielle „Abfall" sich allemal lediglich in Dimensionen hielt, deren Geringfügigkeit mir die Überzeugung von der Verkehrtheit meiner Pädagogik bisher nicht beibringen konnte.

Um nun schliefslich etwas näher auf die von mir befolgte Methode einzugehen und in dieser Beziehung jedes Mifsverständnis auszuschliefsen, möchte ich vor allem hervorheben, dafs es sich dabei keineswegs um eine Behandlung der Analysis handelt, welche sich etwa im wesentlichen der von Herrn Lipschitz in seinem bekannten Lehrbuche gegebenen Darstellung anschliefst. Da dieses Buch besonders bei den Anhängern der Weierstrafs'schen Richtung in grofsem Ansehen steht, so mufs es jedenfalls aufserordentliche Vorzüge besitzen. Nichtsdestoweniger kann ich mich des Eindruckes nicht erwehren, dafs dasselbe einer arithmetisirenden Behandlungsweise der Elemente nicht allzuviele neue Freunde gewonnen zu haben scheint. Es ist hier nicht der Ort, dem Grunde dieser Er-

scheinung weiter nachzugehen. Aber das eine möchte ich doch, als mit dem Thema meines Vortrages in directem Zusammenhange stehend, ausdrücklich erwähnen, dafs ich gerade die Fassung der grundlegenden ersten drei Kapitel, welche von dem Zahl- und Grenzbegriffe handeln, für keine sehr glückliche halte. Da wird zunächst (§ 1) die (natürliche) Zahl als Anzahl gezählter Dinge definirt. Im § 10 erscheint dann die negative ganze Zahl als Inbegriff einer gewissen Anzahl von „wegzunehmenden Einheiten", mit anderen Worten als benannte Zahl. Dann kommen die Brüche (§ 11) als Multipla von gleichen Teilen einer plötzlich auftauchenden teilbaren Einheit (worunter ich mir doch schliefslich immer nur eine mefsbare Gröfse vorstellen kann). Zuletzt erscheinen (§ 14) in Anknüpfung an die Wurzel-Ausziehung die Cantor'schen Fundamentalreihen. Dabei wird *„das Sachverhältnis"*, dafs zwei unbegrenzte Reihen von Brüchen gewisse Eigenschaften besitzen, „durch den *Ausdruck* bezeichnet, dafs dieselben sich ein und derselben *Grenze* nähern" (S. 35, 36), und mit Bezug auf zwei etwas allgemeinere Reihen dieser Art wird in analoger Weise gesagt, dafs die Brüche der einen, wie der anderen Reihe „sich einem bestimmten *Grenzwerte* nähern" (S. 38). Sodann aber heifst es ohne jede weitere Vermittelung: „Auf *diese* (?) beiden Grenzwerte sollen die Grundoperationen der Rechnung angewendet werden." Und nun ist volle sieben Seiten beständig von „diesen" Grenzwerten, wie von realen Objecten die Rede, es wird ausführlich gezeigt, wie man mit „ihnen" rechnen kann, bis endlich (S. 45) das erlösende Wort fällt: „Nach diesen Vorbereitungen bleibt noch übrig, dafs man für die Grenzwerte, dem sich die einzelnen Brüche nähern, ein *eigenes Zeichen* einführt." Was aber das reale Object sei, welches hinter diesem Zeichen steckt, oder vielmehr, dafs in Wahrheit eben dieses Zeichen selbst das einzige reale Object ist, welches durch jenen Ausdruck Grenzwert bezeichnet wird, das wird mit keiner Silbe angedeutet. Und was man sich nun gar als Inhalt einer arithmetischen Formel vorstellen soll, in der ein solches Conglomerat von disparaten Elementen (gezählten Vielheiten, benannten Zahlen, Vielfachen von Einheits-Teilen und völlig wesenlosen Grenzwerten) vereinigt auftritt, das bleibt in tiefstes Dunkel gehüllt.

Will man überhaupt zu einem brauchbaren allgemeinen Zahlbegriffe gelangen, so mufs doch vor allen Dingen ein Mittel gefunden werden, um:

1. alle möglichen als Zahlen bezeichneten Objecte,
2. die zwischen ihnen bestehenden sogenannten Gröfsen-Beziehungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt zu bringen.

Das einfachste Mittel zur Lösung der ersten Aufgabe hat meines Wissens zuerst Heine in präciser Weise angegeben, indem

er den Satz aussprach*): „Ich nenne gewisse greifbare Zeichen Zahlen, sodaſs die Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht." Ich zweifle nicht, daſs dieser Satz von vielen auſserordentlich trivial, die darin angedeutete Auffassung platt und formalistisch befunden wird. In dieser Hinsicht erscheint es mir tröstlich, daſs gerade ein so tiefer Denker und zumal ein Naturforscher wie Helmholtz sich ausdrücklich zu derselben Auffassung bekannt hat.**)

Das geeignete Mittel zur Lösung der zweiten Aufgabe erblicke ich darin, daſs man die Beziehungen „gröſser und „kleiner" im allgemeinen lediglich als Ausdruck einer bestimmten Succession betrachtet: nur in besonderen, ausdrücklich dafür qualificirten Fällen dienen sie im Sinne des gewöhnlichen Sprachgebrauches dazu, durch Zählung oder Messung feststellbare Quantitäts-Verschiedenheiten anzuzeigen.***)

Ich definire also etwa die (reellen) Zahlen als ein unbegrenztes System von Zeichen, denen eine eindeutig bestimmte Succession zukommt, und mit denen nach bestimmten Vorschriften gerechnet werden kann.

Die im vorstehenden implicite ausgesprochene Trennung der Zahl von der Gröſse, genauer gesagt von der meſsbaren Gröſse, erscheint mir nicht nur im höheren Sinne principiell wichtig, sondern auch gerade für den Unterricht auſserordentlich zweckmäſsig. Wenn (nicht nur in älteren, sondern auch in neueren und neuesten Lehrbüchern der Analysis) bald gesagt wird, daſs Gröſsen durch Zahlen darstellbar seien, dann wiederum Zahlen ohne weiteres als Gröſsen bezeichnet werden und schlieſslich gar Gröſsen, weil sie mit beliebiger Annäherung durch rationale Zahlen darstellbar seien, Zahlen genannt werden,†) so scheint

---

*) Die Elemente der Functionen-Lehre, Journ. für Math., Band 74 (1872), S. 173.

**) „Ich betrachte die Arithmetik oder die Lehre von den reinen Zahlen als eine auf rein psychologische Thatsachen aufgebaute Methode, durch die die folgerichtige Anwendung eines Zeichensystems (nämlich der Zahlen) von unbegrenzter Ausdehnung und unbegrenzter Möglichkeit der Verfeinerung gelehrt wird." (Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet. Ges. Abh., Bd. III, S. 359).

***) Hierdurch wird nicht etwa dem Anfänger eine ganz neue und besondere Schwierigkeit zugemutet, vielmehr nur die wahre Bedeutung einer ihm längst vertrauten Gewohnheit deutlich hervorgehoben. Denn wenn ihm schon in der elementaren Arithmetik gelehrt wird, daſs z. B.

$$3 > -5, \qquad -4 < 0,$$

in Worten: „3 ist gröſser, als — 5", „— 4 ist kleiner, als 0" —, so werden diese Beziehungen durchaus in einem Sinne gebraucht, der mit Quantitäts-Vorstellungen und dem landläufigen Sprachgebrauche nicht das geringste gemein hat.

†) Ich könnte die Richtigkeit dieser vielleicht übertrieben klingenden Behauptungen durch Citate reichlich belegen, unterlasse dies jedoch, weil

mir hierin doch das Zeichen einer vollendeten Confusion zu liegen. Ich glaube, dafs gerade der leichtfertige und inconsequente Gebrauch des Wortes „Gröfse“ in den Köpfen der Mathematiker (nicht blofs der Anfänger) viel Unheil angerichtet hat, und sollte daher meinen, dafs es allgemein als ein wahrer Segen empfunden werden müfste, wenn dieser in seiner quallenhaften Unbestimmtheit geradezu gemeingefährliche terminus technicus aus dem Unterrichte möglichst verschwindet.

Bei der Einführung der Irrationalzahlen scheint es mir am passendsten, unmittelbar an diejenige formale Darstellungsart der letzteren anzuknüpfen, welche dem Anfänger von der Schule her schon bis zu einem gewissen Grade geläufig ist, und unter welcher er sich unwillkürlich eine solche irrationale Zahl allemal zu denken pflegt: an den „unendlichen“ Decimalbruch. Während er aber damit lediglich den verschwommenen, ich möchte sagen: im wesentlichen negativen Begriff des nur annäherungsweise-darstellbaren (also eigentlich nicht-darstellbaren) zu verbinden pflegt, so erscheint hier der unbegrenzt fortsetzbare (d. h. in jeder einzelnen, noch so weit entfernten Decimalbruch-Stelle eindeutig bestimmte) Decimalbruch als ein neues Zahlzeichen, dem ein haarscharf bestimmter Platz innerhalb der Succession der rationalen Zahlen angewiesen werden kann. Ist erst dieser Standpunkt an irgend einem, zugleich das Bedürfnis derartiger Betrachtungen verdeutlichenden Beispiele (etwa der Auflösung der Gleichung $x^2 = 2$) gründlich durchgeführt, so bietet es nicht die geringste principielle Schwierigkeit, zu allgemeineren „convergenten Zahlenfolgen“*) übergehend, die allgemeine Definition der Irrationalzahlen und der mit ihnen auszuführenden Rechnungsoperationen nach dem von Herrn Cantor gelehrten Verfahren festzustellen, und zugleich auch auf den Fall zu übertragen, dafs es sich um convergente Zahlenfolgen handelt, deren Terme selbst wiederum Irrationalzahlen sind.

Erst wenn „die irrationale Zahl vermöge der ihr durch die Definitionen gegebenen Beschaffenheit eine ebenso bestimmte Realität in unserem Geiste erlangt hat, wie die rationale, selbst wie die ganze rationale Zahl“,**) erscheint es mir überhaupt möglich, den Begriff des Grenzwertes in befriedigender Weise einzuführen, nämlich:

I. Definition. Wir sagen, die unbegrenzte Folge der (rationalen oder irrationalen) Zahlen a_ν besitzt einen bestimmten Grenzwert,

---

es mir nicht angemessen erscheint, da, wo so viele gesündigt, einzelne Namen herauszuheben.

*) Mit dieser, wie mir scheint, charakteristischeren Benennung pflege ich in meinen Vorlesungen die Cantor'schen „Fundamentalreihen“ zu bezeichnen.

**) Cantor, Math. Ann., Bd. 21, S. 568, 569.

wenn eine Zahl A von der Beschaffenheit existirt, daſs $|A - a_\nu|$ für alle hinlänglich groſsen Werte von ν beliebig klein wird.

II. Hauptsatz. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür besteht darin, daſs $|a_{\nu+\varrho} - a_\nu|$ für einen hinlänglich groſsen Wert von ν und jeden Wert von ϱ beliebig klein wird.

Was ich mir unter dieser ja wohl allgemein üblichen Definition eines „bestimmten" Grenzwertes denken soll, wenn die Zahl A „nur annäherungsweise darstellbar" ist, erscheint mir völlig unerfindlich. Und ebenso wenig habe ich eine Ahnung, wie der unentbehrliche Hauptsatz II ohne den präcisen Begriff der Irrationalzahl bewiesen werden soll.

Ich habe hierbei ausdrücklich zunächst nur von dem Grenzwerte einer abzählbaren Zahlenmenge gesprochen. Es erscheint mir nämlich auſserordentlich wichtig, daſs der Anfänger zuvörderst an dieser einfachsten Form des Grenzwertes das Wesen und die Natur dieses für die gesamte Analysis fundamentalen Begriffes kennen lerne. Die, wie ich glaube, nicht seltene Gepflogenheit, in solchen einleitenden Vorlesungen gleich von den Grenzwerten stetiger Veränderlicher und ihrer Functionen zu reden, halte ich — wenn ich mich auch einmal dieses Ausdruckes bedienen darf — für einen entschiedenen pädagogischen Fehler.

Aus dem eben angedeuteten Grunde finde ich es zweckmäſsig, die Lehre vom Grenzwerte nicht nur durch die späterhin sich nützlich erweisende Einführung der Zahl e als $\lim\limits_{\nu=\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu$ zu illustriren, sondern unmittelbar daran auch die Hauptsätze über die Convergenz unendlicher Reihen zu knüpfen, statt, wie zumeist üblich, sie erst bei Gelegenheit des Taylor'schen Lehrsatzes einzuschalten. Denn während sie dort lediglich als eine unliebsame Unterbrechung des eigentlichen Lehrganges erscheinen, so dienen sie hier in vorteilhaftester Weise dazu, den Begriff des Grenzwertes zu erläutern und zu befestigen. Zugleich giebt die Erscheinung der Divergenz Gelegenheit, den Begriff des „Unendlichen" in natürlichstem Zusammenhange einzuführen und zu erörtern.

Hiermit ist nun der Kreis derjenigen arithmetischen Grundlagen, welche mir für die Einführung in die höhere Analysis unbedingt notwendig scheinen, im wesentlichen abgeschlossen. Der zu ihrer Herleitung erforderliche, übrigens sehr mäſsige Zeitaufwand belohnt sich nach meinen Erfahrungen reichlich — nicht nur für die betreffende Einzel-Vorlesung, in der nunmehr mit ganz anderer Sicherheit vorwärts geschritten werden kann, sondern für das gesamte mathematische Studium. Denn, wie ich schon oben hervorhob, jene Grundlagen werden in der Mehrzahl der Fälle überhaupt

nicht mehr genügend nachgeholt, wenn der (nach meiner Meinung) dafür richtige Zeitpunkt versäumt wurde. Was aber etwa infolge des fraglichen Zeitaufwandes an geometrischen oder analytischen Anwendungen verloren geht, das läfst sich mit Leichtigkeit in Übungs-Stunden oder späteren Vorlesungen, ja mit Hülfe jedes beliebigen besseren Lehrbuches ergänzen.

Sind nun die arithmetischen Fundamente in dem besprochenen Umfange festgelegt, so mag die geometrische Anschauung in ihre Rechte treten. Man zeigt vor allem in der bekannten Weise, dafs jedem Punkte einer unbegrenzten Geraden stets eine und nur eine bestimmte (positive oder negative, rationale oder irrationale) Zahl zugeordnet werden kann. Dafs dann umgekehrt allen rationalen und gewissen irrationalen Zahlen (wie $\sqrt{2}$) bestimmte Punkte entsprechen, ist ebenso leicht ersichtlich; für jede beliebige Irrationalzahl gilt das analoge nur dann, wenn ein geeignetes geometrisches Axiom eingeführt wird,*) dem man verschiedene Fassungen geben kann: etwa die oben citirte, von Herrn Ascoli vorgeschlagene oder auch andere nicht minder einfache und anschauliche Formen, wie sie von Herrn Dedekind**) und Pasch***) angegeben worden sind. Wird jetzt ein solches Axiom†) ein für allemal acceptirt, so kann die gesamte Succession der reellen Zahlen der Succession der Punkte einer Geraden eindeutig-umkehrbar zugeordnet werden. Dadurch wird es ermöglicht, eine zwischen zwei beliebigen positiven Zahlen bestehende Beziehung von der Form $a \gtrless b$, welche bisher nur die Bedeutung einer bestimmten Succession hatte, als Beziehung zwischen Strecken, also als Gröfsen-Beziehung im eigentlichen Sinne zu deuten. Im übrigen enthält jenes Axiom den durch die Anschauung nicht erweislichen Teil jener Eigenschaft, welche wir als Stetigkeit der Geraden zu bezeichnen pflegen. Und hierdurch erscheint es dann hinlänglich motivirt, warum wir nunmehr auch die von uns geschaffene Succession der reellen Zahlen als eine stetige bezeichnen (ohne dafs es an dieser Stelle notwendig wäre, auf den arithmetischen Charakter einer solchen stetigen Mannigfaltigkeit des näheren einzugehen).

Ist auf diese Weise das Gebiet, in welchem sich die nunmehr einzuführende stetige Veränderliche und deren Functionen zu bewegen haben, arithmetisch wie geometrisch wohl definirt, so kann man fernerhin der Benützung geometrischer Anschauung

*) G. Cantor, Math. Ann., Bd. 5, S. 128.

**) Stetigkeit und irrationale Zahlen, Braunschweig 1872, S. 18.

***) Vorlesungen über neuere Geometrie, Leipzig 1882, S. 125.

†) Ich pflege dasselbe lieber als eine zweckmäfsige, unserem unvollkommenen Anschauungsvermögen zu Hülfe kommende Hypothese zu bezeichnen.

den weitesten Spielraum lassen, ohne dafs es deshalb nötig wird, den Boden strenger arithmetischer Beweisführung jemals unter den Füfsen zu verlieren.

Damit bin ich nun aber am Ziele meines Vortrages angelangt. Weit entfernt von der Prätension, darin irgend etwas wesentlich Neues gesagt zu haben, beabsichtigte ich nur, aus dem, was andere vor mir erdacht, dasjenige auszuwählen und übersichtlich zu gruppiren, was mir für den angedeuteten Zweck passend erschien, ohne etwa zugleich den von mir skizzirten Weg als den einzig möglichen und zweckmäfsigen hinstellen zu wollen.*) Immerhin werden vielleicht jüngere Docenten aus dem Gesagten diese oder jene brauchbare Andeutung entnehmen können. Im übrigen, wie dem auch sei: wesentlich lag mir zunächst nur daran, soweit als thunlich, nachzuweisen, dafs eine Umgestaltung der fraglichen Elementar-Vorlesungen in dem näher erörterten Sinne sowohl wünschenswert, als durchführbar erscheint.

„Das Wesen der Triumphe der Wissenschaft und ihres Fortschrittes“, sagt der englische Philosoph Whewell,**) „besteht darin, dafs wir veranlafst werden, Ansichten, welche unsere Vorfahren für unbegreiflich hielten und unfähig waren zu begreifen, für evident und notwendig zu halten.“ Nach meiner Überzeugung ist die Zeit nicht mehr fern, wo die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen für so „evident und notwendig“ gelten werden, dafs man eine Einführung in die Analysis ohne dieses Hülfsmittel für schlechthin unmöglich ansehen wird.

Über eine neue Begründung der Theorie der algebraischen Zahlen.

Von K. Hensel in Berlin.

Die Analogie zwischen den Resultaten der Theorie der algebraischen Functionen einer Variabeln und der der algebraischen Zahlen hat mir schon seit mehreren Jahren den Gedanken nahe ge-

*) Einen von dem meinigen durchaus abweichenden Weg, der sich an die Dedekind'sche Irrationalzahl-Theorie und im übrigen von vornherein mehr an die geometrische Anschauung anschliefst, hat bekanntlich Herr Pasch vorgezeichnet: Einleitung in die Diff.- und Int.-Rechnung, Leipzig 1882.

**) Ich entnehme dieses Citat dem Hankel'schen Buche „Theorie der complexen Zahlensysteme“ (Leipzig 1867), S. 60.

legt, die Zerlegung der algebraischen Zahlen mit Hülfe der idealen Primfactoren durch eine einfachere Behandlungsweise zu ersetzen, welche der Entwickelung der algebraischen Functionen in Potenzreihen für die Umgebung einer beliebigen Stelle völlig entspricht. Die Grundlagen dieser neuen Theorie liegen in den folgenden Sätzen:

Ist

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \cdots + \alpha_n = \alpha_0 (x - x_1) \cdots (x - x_n) = 0$$

eine beliebige ganzzahlige Gleichung n^{ten} Grades, so genügt jede rationale ganzzahlige Function $X = \varphi(x)$ von x ebenfalls einer ganzzahligen Gleichung $F(X) = 0$ desselben Grades. Betrachtet man nun irgend eine solche Gleichung als Congruenz für eine beliebig hohe Potenz p^M einer reellen Primzahl als Modul (etwa für $M = 10000$), so besteht der Satz:

Die Congruenz:

$$F(X) \equiv 0 \pmod{p^M}$$

besitzt genau so viele Wurzeln, als ihr Grad angiebt, wie grofs auch der Exponent M angenommen werde, und jene n Congruenzwurzeln $X_1, X_2, \cdots, X_n$ können stets in Potenzreihen entwickelt werden, welche nach steigenden Potenzen von p fortschreiten und höchstens eine endliche Anzahl von Anfangsgliedern mit negativen Exponenten besitzen.

Im allgemeinen schreiten alle diese Entwickelungen nach Potenzen von p mit ganzzahligen Exponenten fort, d. h. sie können folgendermafsen geschrieben werden:

$$(1) \qquad X = \frac{A_{-\lambda}}{p^\lambda} + \cdots + \frac{A_{-1}}{p} + A_0 + A_1 p + \cdots;$$

für diese Zahlen erhält man also genau dieselben Entwickelungen wie für eine algebraische Function in der Umgebung einer regulären Stelle.

Ausgenommen ist für jeden Zahlkörper nur eine beschränkte Anzahl von Primzahlen, nämlich die Teiler der Körperdiscriminante, oder, was im wesentlichen dasselbe ist, diejenigen Zahlen p, welche zugleich in den Discriminanten aller Gleichungen $F(X) = 0$ enthalten sind.*)

Für diese Zahlen schreiten nämlich jene Entwickelungen, genau

*) Man hat bei dieser zweiten Charakterisirung jener Ausnahmezahlen nur noch die sog. aufserwesentlichen Discriminantenteiler jenes Körpers fortzulassen, welche ich in meiner Dissertation bestimmt habe.

wie in der Umgebung eines Verzweigungspunktes eines algebraischen Gebildes, nicht nach ganzzahligen, sondern nach Potenzen von p mit rational gebrochenen Exponenten fort. Ist nämlich $\pi_1 = \sqrt[d]{p}$ eine richtig gewählte d^{te} Wurzel aus p, so erhält man für eine jener Wurzeln, etwa für X_1, eine Entwickelung der folgenden Art:

$$(2)\qquad X_1 = \frac{A_{-h}}{\pi_1^h} + \cdots + \frac{A_{-1}}{\pi_1} + A_0 + A_1\pi_1 + \cdots.$$

Sind ferner $\pi_2, \cdots \pi_d$ die zu π_1 conjugirten d^{ten} Wurzeln aus p, so stimmen die d conjugirten Entwickelungen:

$$(2\text{a})\ X_i = \frac{A_{-h}}{\pi_i^h} + \cdots + \frac{A_{-1}}{\pi_i} + A_0 + A_1\pi_i + \cdots, (i = 1, 2, \cdots d)$$

genau mit d von den n conjugirten Wurzeln von $F(X) \doteq 0$ überein; jene d Entwickelungen hängen hier also genau in derselben Weise zusammen, wie die d Zweige einer algebraischen Function in der Umgebung eines Verzweigungspunktes V_d von der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung. Es sollen daher diese Primzahlen Verzweigungszahlen genannt werden.

Während diese Resultate wörtlich mit den entsprechenden Sätzen für algebraische Functionen übereinstimmen, müssen nunmehr zwei Bemerkungen hinzugefügt werden, durch welche sich die höhere Arithmetik principiell von jener anderen Theorie unterscheidet.

In den unter (1) und (2) gegebenen Entwickelungen der algebraischen Zahlen können nämlich die Coefficienten A naturgemäſs nicht, wie dies in der Functionentheorie der Fall ist, als beliebige Constanten angenommen werden, vielmehr gehören sie für jede der n conjugirten Entwickelungen ganz bestimmten einfachen algebraischen Körpern an. Für eine bestimmte Wurzel, etwa für X_1, sind nämlich $A_{-h}, \cdots A_0, A_1, \cdots$ sämtlich von der Form:

$$A = a_0 + a_1\alpha_1 + \cdots + a_{k-1}\alpha_1^{k-1},$$

wo α_1 eine der k Wurzeln einer auch modulo p irreduciblen Gleichung:

$$(3)\ \varphi(\alpha) = \alpha^k + b_1\alpha^{k-1} + \cdots + b_k = (\alpha - \alpha_1)\cdots(\alpha - \alpha_k) = 0$$

ist, und wo die Coefficienten $a_0, a_1, \cdots a_{k-1}$ die Werte $0, 1, \cdots, p-1$ annehmen können.

Ersetzt man nun in einer Wurzel X in (1) oder in (2) in allen Coefficienten $A_i(\alpha_1)$ die algebraische Zahl α_1 der Reihe nach durch ihre conjugirten $\alpha_2, \cdots \alpha_k$, so ergeben sich k andere Entwickelungen, welche z. B. für (1) folgendermaſsen lauten:

$$X^{(g)} = \frac{A_{-k}(\alpha_g)}{p^k} + \cdots + \frac{A_{-1}(\alpha_g)}{p} + A_0(\alpha_g) + \cdots, \; (g = 1, 2, \cdots k),$$

und jede von diesen ist einer der n conjugirten Wurzeln $X_1, \cdots X_n$ congruent. Zu jeder Wurzel (oder, für eine Verzweigungszahl p, zu jedem Wurzelcyklus) gehören also k andere, welche ich verbundene Wurzeln oder Cyklen nennen möchte, von denen jede aus einer von ihnen dadurch hervorgeht, dafs man alle Coefficienten A_i durch ihre conjugirten ersetzt.

Der zweite fundamentale Unterschied zwischen beiden Theorien ergiebt sich aus der folgenden Bemerkung: Für einen Verzweigungspunkt V_d sind die d conjugirten d^{ten} Wurzeln aus p, nach welchen die d Entwickelungen (2a) fortschreiten, im allgemeinen die Wurzeln der reinen Gleichung:

$$(4) \qquad \psi(\pi) = \pi^d - p = 0,$$

d. h. sie unterscheiden sich hier, wie in der anderen Theorie, einzig und allein durch die d conjugirten Kreisteilungseinheiten $1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{d-1}$, wenn

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{d} + i \sin\frac{2\pi}{d}$$

angenommen wird.*)

Eine Ausnahme macht nur der ganz specielle Fall, wenn die Anzahl d der für einen Verzweigungspunkt conjugirten Wurzeln (2a) durch die betrachtete Primzahl p teilbar ist, ein Fall, der nur für ganz specielle Teiler der Körperdiscriminante, nämlich nur für diejenigen vorkommen kann, welche $\leqq n$ sind. Indessen haben gerade diese Zahlen der Wissenschaft grofse und bisher noch nicht überwundene Schwierigkeiten bereitet, und der Umstand, dafs auch hier die Entwickelungen der Wurzeln im wesentlichen dieselben sind, wie für die gewöhnlichen Verzweigungspunkte, dafs also jene Schwierigkeiten hier überhaupt nicht auftreten, scheint mir ein Beweis für die Berechtigung und Notwendigkeit dieser Theorie zu sein. In diesem Falle können nämlich die Zahlen $\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_d$ die conjugirten Wurzeln einer nicht reinen Gleichung d^{ten} Grades:

$$\psi(\pi) = \pi^d + p\varepsilon_{d-1}\pi^{d-1} + p\varepsilon_{d-2}\pi^{d-2} + \cdots + p\varepsilon_0 = 0$$

---

*) In Wahrheit lauten jene reinen Gleichungen:

$$\psi(\pi) = \pi^d - \varepsilon p = 0,$$

wo ε eine bestimmte, durch p nicht teilbare Zahl des Körpers $K(\alpha_1)$ ist. Da dieselbe für alle hier zu ziehenden Folgerungen unwesentlich ist, so wurde für diese kurze Darstellung der Theorie von ihr abgesehen.

sein, deren sämtliche Coefficienten durch p teilbare ganze Zahlen des Körpers $K(\alpha_1)$ sind, und deren constantes Glied $p\varepsilon_0$ diese Primzahl nur einmal enthält. Auch in diesem Falle unterscheiden sich die Zahlen π_i von $\sqrt[d]{p}$ nur durch Einheiten; nur sind dies nicht mehr die Kreisteilungseinheiten.

In der That, setzt man:

$$\pi = \omega \cdot \sqrt[d]{p},$$

so genügt ω der Gleichung:

$$\omega^d + \sqrt[d]{p^{d-1}}\,\varepsilon_{d-1}\omega^{d-1} + \sqrt[d]{p^{d-2}}\,\varepsilon_{d-2}\omega^{d-2} + \cdots + \varepsilon_0 = 0,$$

d. h. ω ist eine ganze algebraische Zahl, deren Norm ε_0 p nicht enthält, also eine Einheit für p. Je nachdem die conjugirten Zahlen $\pi_1, \cdots \pi_d$ für einen Verzweigungspunkt V_d einer reinen oder einer gemischten Gleichung d^{ten} Grades genügen, will ich diesen einen Verzweigungspunkt der ersten oder der zweiten Art nennen.

Alle diese Sätze können, wie in einer demnächst in den „Mathematischen Annalen" erscheinenden Abhandlung dargelegt werden soll, mit sehr einfachen Hülfsmitteln und völlig unabhängig von der Theorie der Ideale begründet werden. Es soll jetzt noch der Zusammenhang dieser Theorie mit der der Ideale kurz dargelegt werden.

Jeder von den n conjugirten Entwickelungen $X_1, \cdots X_n$ einer rationalen Function $X = \varphi(x)$ modulo p^M kann man, genau wie in der Theorie der algebraischen Functionen, je eine Stelle $(p, x_1), \cdots (p, x_n)$ des zugehörigen algebraischen Zahlengebildes eindeutig zuordnen; eine solche Stelle (p, x_i) ist dann regulär oder singulär, je nachdem die zugehörigen Entwickelungen aller Functionen $X_i = \varphi(x_i)$ modulo p^M nach ganzen oder gebrochenen Potenzen von p fortschreiten, und sie ist eine singuläre oder Verzweigungsstelle der ersten oder der zweiten Art, je nachdem die zugehörige Zahl π einer reinen oder einer gemischten Gleichung $\psi(\pi) = 0$ genügt. Eine beliebige Zahl X besitzt an der Stelle (p, x_i) eine ϱfache Nullstelle, wenn die Entwickelung von X_i erst mit der Potenz $A_\varrho p^\varrho$ (bzw. $A_\varrho \pi^\varrho$) beginnt, und sie hat dort einen ϱfachen Pol, wenn sie mit $\frac{A_{-\varrho}}{p^\varrho}$ oder $\frac{A_{-\varrho}}{\pi^\varrho}$ anfängt. Nach diesen Definitionen kann der Zusammenhang zwischen beiden Theorien einfach folgendermaßen ausgesprochen werden:

Ist p eine beliebige Primzahl und P ein idealer Primteiler von p für einen der n conjugirten Körper, etwa für $K(x_1)$, so ist

diesem eine Stelle (p, x_i) in der Weise zugeordnet, dafs eine algebraische Zahl X dann und nur dann durch P^ϱ teilbar ist, wenn X an der zugehörigen Stelle eine ϱfache Nullstelle hat, und dafs sie $P^{-\varrho}$ enthält, wenn X dort einen ϱfachen Pol besitzt. Der Primteiler P ist dann vom Grade k (d. h. es ist $Nm(P) = p^k$), wenn zu der Stelle (p, x_i) genau k verbundene Stellen gehören, und p ist genau durch P^d teilbar, wenn die zugehörige Stelle (p, x_i) einem Verzweigungspunkte $(d-1)^{\text{ter}}$ Ordnung angehört, der von der ersten oder von der zweiten Art sein kann.

In zwei weiteren Arbeiten*) sind die hier auseinandergesetzten Principien auf die Lösung einiger Aufgaben angewendet worden, deren Lösung mit Hülfe der Idealtheorie noch nicht gelungen war.

Über die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper.

Von **David Hilbert** in Göttingen.

In der Theorie der relativ Abel'schen Zahlkörper nehmen zunächst die Körper vom zweiten Relativgrade unser Interesse in Anspruch.

Es sei ein beliebiger Zahlkörper k vom Grade n als Rationalitätsbereich zu Grunde gelegt; unsere Aufgabe ist es dann, die Theorie der relativquadratischen Zahlkörper $K(\sqrt{\mu})$, d. h. derjenigen Körper zu begründen, die durch die Quadratwurzel aus einer beliebigen ganzen Zahl μ des Körpers k bestimmt sind. Die „disquisitiones arithmeticae" von Gaufs sind als der einfachste Fall in jenem Problem enthalten. Wir können unseren Gegenstand auch als die Theorie der quadratischen Gleichungen oder Formen bezeichnen, deren Coefficienten Zahlen des vorgelegten Rationalitätsbereiches k sind.

Für unsere Theorie ist vor allem die Erkenntnis notwendig, dafs auch in dem beliebigen Zahlkörper k ein Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste besteht. Das quadratische Reciprocitätsgesetz im Bereiche der rationalen Zahlen lautet bekanntlich:

---

*) Über die Bestimmung der Discriminante eines algebraischen Körpers. — Über die Fundamentalgleichung und die aufserwesentlichen Discriminantenteiler eines algebraischen Körpers, Göttinger Nachrichten v. J. 1897, Heft 3.

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}},$$

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

wo p, q beliebige ungerade rationale positive Primzahlen bedeuten. Aber diese Form des Reciprocitätsgesetzes ist, sobald wir den Zweck der Verallgemeinerung desselben vor Augen haben, aus mannigfachen Gründen — ich hebe nur die unübersichtliche Form der auftretenden Exponenten, den Mangel an Einheitlichkeit und die Ausnahmestellung der Zahl 2 hervor — eine unvollkommene. Nun spielt bekanntlich der Begriff der „primären" Zahlen in der bisherigen Fassung der höheren Reciprocitätsgesetze eine sehr wichtige Rolle. Doch für unser allgemeineres Problem werden wir von der Benutzung dieses Begriffes eine Beseitigung der angedeuteten Mifsstände nicht erwarten dürfen; denn wir müssen bedenken, dafs im Körper k die Zahl 2 im allgemeinen als Product von gewissen Potenzen von Primidealen zerlegt werden kann, und dafs demgemäfs die Definition des Begriffes „primär" eine Unterscheidung der verschiedenen Möglichkeiten dieser Zerlegung und die Einführung mannigfacher willkürlicher Annahmen nötig machen würde. Auch ist die Fassung, welche Kummer seinen allgemeinen Reciprocitätsgesetzen gegeben hat, schon deshalb für uns nicht verwendbar, weil wir bei ihrer Annahme dem Körper k die beschränkende Bedingung auferlegen müfsten, dafs seine Klassenanzahl ungerade ist; es wird sich aber zeigen, dafs uns der Fall einer durch 2 teilbaren Klassenanzahl zu den schönsten und wertvollsten Resultaten führt.

Aus den angegebenen Gründen erscheint mir die Einführung eines neuen Symbols $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ in die Zahlentheorie nötig, welches in unserem Falle der Theorie eines relativquadratischen Körpers, wie folgt, zu definiren ist. Sind ν, μ ganze Zahlen in k, dabei μ nicht Quadratzahl, und ist $\mathfrak{w}$ ein beliebiges Primideal in k, so bezeichne jenes Symbol den Wert

$$(1) \qquad \left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = +1,$$

sobald die Zahl ν mit der Relativnorm einer ganzen Zahl des durch $\sqrt{\mu}$ bestimmten relativquadratischen Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach dem Primideal $\mathfrak{w}$ congruent ist, und sobald aufserdem auch für jede höhere Potenz von $\mathfrak{w}$ eine ganze Zahl in $K(\sqrt{\mu})$ existirt, deren Relativnorm der Zahl ν nach jener Potenz von $\mathfrak{w}$ congruent ist; in jedem anderen Falle setzen wir

$$(2) \qquad \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = -1.$$

Diejenigen ganzen Zahlen ν, für welche die Gleichung (1) gilt, sollen Normenreste*) des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$, diejenigen Zahlen, für welche die Gleichung (2) gilt, Normennichtreste des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$ heifsen. Wenn μ das Quadrat einer Zahl in k ist, möge die Gleichung (1) gelten. Der Bildung der Begriffe „Normenrest" und „Normennichtrest" entspricht in der Functionentheorie gewissermafsen die Unterscheidung, ob eine algebraische Function einer Variablen an einer Stelle nach ganzen oder nach gebrochenen Potenzen der Variablen entwickelt werden kann.

Die ersten Sätze für das eben definirte Symbol sind in den Formeln enthalten:

$$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\mu,\,\nu}{\mathfrak{w}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu\nu',\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu',\,\mu}{\mathfrak{w}}\right),$$
$$\left(\frac{\nu,\,\mu\mu'}{\mathfrak{w}}\right) = \left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right)\left(\frac{\nu,\,\mu'}{\mathfrak{w}}\right);$$

die wichtigste Eigenschaft unseres Symbols spricht sich in dem folgenden Satze aus:

Wenn $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Körpers k ist, das nicht in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so ist jede zu $\mathfrak{w}$ prime Zahl in k Normenrest des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ nach $\mathfrak{w}$. Wenn dagegen $\mathfrak{w}$ ein Primideal des Körpers k ist, das in der Relativdiscriminante des Körpers $K(\sqrt{\mu})$ aufgeht, so sind bei genügend hohem Exponenten e von allen vorhandenen zu $\mathfrak{w}$ primen und nach $\mathfrak{w}^e$ einander incongruenten Zahlen in k genau die Hälfte Normenreste nach $\mathfrak{w}$.

Diese Thatsache entspricht dem bekannten Satze über die Verzweigungspunkte einer Riemann'schen Fläche, wonach eine algebraische Function in der Umgebung eines einfachen Verzweigungspunktes den Vollwinkel auf die Hälfte desselben conform abbildet.

Mit Benutzung des eben definirten Symboles drückt sich das allgemeinste Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste durch die Formel aus:

$$(3) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{w}}\right) = [\nu,\,\mu]\,[\nu',\,\mu'] \cdots [\nu^{(n-1)},\,\mu^{(n-1)}].$$

---

*) Vgl. meinen Bericht über die Theorie der Zahlkörper. Diese Berichte Bd. 4, S. 286 und 402.

Hierin bedeuten ν, μ zwei beliebige ganze Zahlen des Körpers k. Das Product linker Hand ist über alle Primideale $\mathfrak{w}$ des Körpers k zu erstrecken; da dem vorigen Satz zufolge das Symbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)$ nur für eine endliche Anzahl von Primidealen $\mathfrak{w}$ den Wert -1 haben kann, so kommt bei der Bestimmung des Wertes des Productes nur eine endliche Anzahl von Factoren in Betracht. Auf der rechten Seite der Formel (3) bedeuten ν', μ'; ... $\nu^{(n-1)}$, $\mu^{(n-1)}$ die zu ν, μ conjugirten Zahlen bez. in den zu k conjugirten Körpern k'; ...; $k^{(n-1)}$; das Zeichen $[\nu, \mu]$ bedeutet den Wert -1, wenn der Körper k reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν, μ negativ ist; in jedem anderen Falle bezeichnet $[\nu, \mu]$ den Wert $+1$. Entsprechend bedeutet $[\nu', \mu']$ den Wert -1, wenn k' reell und zugleich jede der beiden Zahlen ν', μ' negativ ausfällt, in jedem anderen Falle dagegen soll $[\nu', \mu']$ den Wert $+1$ haben, u. s. f.

Sind beispielsweise k und alle zu k conjugirten Körper imaginär, so lautet das Reciprocitätsgesetz

$$(4)\qquad \prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{w}}\right)=+1.$$

Im Falle, daſs k den Körper der rationalen Zahlen bedeutet, erhalten wir

$$(5)\qquad \prod_{(w)}\left(\frac{n,m}{w}\right)=[n,m],$$

wo n, m zwei beliebige ganze rationale Zahlen sind, ferner w alle rationalen Primzahlen durchläuft und $[n, m]$ den Wert $+1$ oder -1 bezeichnet, jenachdem wenigstens eine der Zahlen m, n positiv ausfällt oder beide negativ sind.*)

Die einfachsten Fälle des quadratischen Reciprocitätsgesetzes erhalten wir aus unseren Formeln (3), (4), indem wir für ν, μ Einheiten oder unzerlegbare Zahlen des Körpers k einsetzen. Insbesondere folgen aus (5) die bekannten Formeln des gewöhnlichen quadratischen Reciprocitätsgesetzes, indem wir für n, m die Zahlen -1, 2 oder beliebige ungerade Primzahlen p, q wählen.*)

Es sei insbesondere der Körper k nebst seinen sämtlichen Conjugirten imaginär und habe überdies die Klassenanzahl $h=1$. Bedeuten dann π, $\varkappa$, π', $\varkappa'$ irgend welche Primzahlen in k, die zu 2 prim sind und nach dem Modul 4 den Congruenzen

$$\pi\equiv\pi',\quad \varkappa\equiv\varkappa',\quad (4)$$

genügen, so gelten, wie wir aus (4) leicht erkennen, folgende specielle Gesetze:

---

*) Vgl. l. c. § 64 und § 69.

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right)=\left(\frac{\pi'}{\varkappa'}\right)\left(\frac{\varkappa'}{\pi'}\right),$$

und ferner wird, falls wenigstens eine der Primzahlen π, $\varkappa$ dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach dem Modul 4 congruent ist:

$$\left(\frac{\pi}{\varkappa}\right)=\left(\frac{\varkappa}{\pi}\right).$$

In den beiden letzten Formeln bedeutet allgemein das Symbol $\left(\frac{\nu}{\mu}\right)$ den Wert $+1$ oder -1, jenachdem ν dem Quadrat einer ganzen Zahl in k nach μ congruent ist oder nicht. Die beiden letzteren Gesetze können leicht auf die mannigfaltigste Weise durch numerische Beispiele bestätigt werden.

Es ist überaus bemerkenswert, daſs bei Anwendung unseres Symbols eine einzige Gleichung von so einfacher Bauart, wie es die Formel (3) ist, das quadratische Reciprocitätsgesetz für einen beliebigen Zahlkörper in vollster Allgemeinheit zum Ausdruck bringt: die Formel (3) gilt, gleichviel ob der zu Grunde gelegte Körper k ein Galois'scher ist oder irgend einen oder gar keinen Affect hat; die Formel (3) nimmt Rücksicht auf die vielen möglichen Fälle, je nach der Realität des Körpers k und seiner Conjugirten; sie gilt, wie auch immer die Zerlegung der Zahl 2 im Körper k ausfallen möge; sie enthält alle Ergänzungssätze; durch sie erscheint die exclusive Stellung der Zahl 2 und der in 2 aufgehenden Primideale beseitigt; vor allem endlich gilt die nämliche Formel (3) unabhängig davon, ob die Klassenanzahl des Körpers k ungerade oder durch irgend eine Potenz der Zahl 2 teilbar ist.

Das Reciprocitätsgesetz in der Fassung (3) erinnert an den Cauchy'schen Integralsatz in der Functionentheorie, demzufolge ein complexes Integral, um alle einzelnen Singularitäten einer Function geführt, insgesamt stets den Wert 0 ergiebt. Einer der bekannten Beweise des gewöhnlichen quadratischen Reciprocitätsgesetzes weist auch auf einen inneren Zusammenhang zwischen jenem zahlentheoretischen Gesetze und Cauchy's functionentheoretischem Fundamentalsatz hin.

Doch das Reciprocitätsgesetz (3) bildet nur den ersten wichtigen Schritt zur Begründung unserer Theorie der relativquadratischen Zahlkörper. Unsere weitere Aufgabe ist die Aufstellung aller relativquadratischen Körper und die Untersuchung ihrer Eigenschaften. Der Einfachheit halber sei fortan der zu Grunde gelegte Rationalitätsbereich k nebst sämtlichen Conjugirten imaginär. Da wir die Relativkörper durch ihre Relativdiscriminanten festlegen wollen, so ist offenbar die einfachste Frage diejenige nach den relativquadratischen Körpern mit der Relativdiscriminante 1. Nach einem in meinem Berichte über die Theorie der algebraischen Zahlkörper bewiesenen

Satze*) kann es einen solchen Relativkörper niemals geben, falls die Klassenanzahl des Körpers k ungerade ist; wir wählen daher den Körper k so, dafs seine Klassenanzahl gerade, und zwar der Einfachheit halber gleich 2 sei. In der That gelingt dann der Nachweis der Existenz eines Relativkörpers K mit der Relativdiscriminante 1. Dieser Körper werde der Klassenkörper**) von k genannt. Der Klassenkörper K besitzt folgende fundamentalen Eigenschaften:

1) Der Klassenkörper K hat in Bezug auf k die Relativdiscriminante 1.

2) Die Klassenanzahl des Klassenkörpers K ist ungerade.

3a) Diejenigen Primideale in k, welche in k Hauptideale sind, zerfallen in K in das Product zweier Primideale.

3b) Diejenigen Primideale in k, welche in k nicht Hauptideale sind, bleiben in K Primideale; sie werden jedoch in K Hauptideale.

Von diesen vier Eigenschaften 1, 2, 3a, 3b definirt bei unserer Annahme über den Körper k jede für sich in eindeutiger Weise den Klassenkörper K; wir haben somit die Sätze:

1) Es giebt aufser K keinen anderen relativquadratischen Körper mit der Relativdiscriminante 1 in Bezug auf k.

2) Wenn ein zu k relativquadratischer Körper eine ungerade Klassenanzahl hat, so stimmt derselbe mit dem Klassenkörper K überein.

3) Wenn alle Primideale in k, die in k Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper zerfallen, oder wenn alle Primideale in k, die in k nicht Hauptideale sind, in einem relativquadratischen Körper Primideale bleiben, so folgt jedesmal, dafs dieser relativquadratische Körper kein anderer als der Klassenkörper K ist.

Diese Gesetze für den Klassenkörper K sind einer weiten Verallgemeinerung fähig; sie lassen eine wunderbare Harmonie erkennen und erschliefsen, wie mir scheint, ein an neuen arithmetischen Wahrheiten reiches Gebiet.

Auch eine Theorie der Geschlechter läfst sich in unserem relativquadratischen Körper aufstellen; aus dieser fliefsen dann die Bedingungen für die Auflösbarkeit ternärer diophantischer Gleichungen, deren Coefficienten Zahlen des beliebigen Rationalitätsbereiches k sind.

Wir haben uns in diesem Vortrage auf die Untersuchung relativ Abel'scher Körper vom zweiten Grade beschränkt. Diese Beschränkung ist jedoch nur eine vorläufige, und da die von mir bei den Beweisen der Sätze angewandten Schlüsse sämtlich der Verallgemeinerung fähig sind, so steht zu hoffen, dafs die Schwierigkeiten nicht unüberwindliche sein werden, die die Begründung

*) Satz 94, S. 279.

**) Vgl. H. Weber, Über Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Drei Abhandlungen. Math. Ann., Bd. 48, 49, 50.

einer allgemeinen Theorie der relativ Abel'schen Körper bietet. Die oben in der Theorie des relativquadratischen Körpers auftretenden, in der Unterscheidung zwischen reellen und imaginären Körpern beruhenden Schwierigkeiten fallen in der Theorie der Abel'schen Körper von ungeradem Relativgrade sogar gänzlich fort, und die höheren Reciprocitätsgesetze erhalten deshalb einen noch einfacheren Ausdruck als das quadratische Reciprocitätsgesetz (3), indem dann in dieser Formel an Stelle der rechten Seite stets die Zahl 1 tritt.

Die Theorie der relativ Abel'schen Körper enthält als besonders einfachen Fall die Theorie derjenigen Zahlkörper, die die complexe Multiplication der elliptischen Functionen liefert. Da H. Weber*) für diese Körper die Eigenschaften 3a und 3b bewiesen hat, so werden wir hieraus schliefsen, dafs den nämlichen Zahlkörpern das volle System der oben angedeuteten arithmetischen Eigenschaften zukommt; es ist dann nicht schwer, den Nachweis dafür zu erbringen, dafs die Abel'schen Gleichungen im Bereiche eines quadratischen imaginären Körpers durch die Transformationsgleichungen elliptischer Functionen mit singulären Moduln erschöpft werden — und dies hiefse, den „liebsten Jugendtraum" Kronecker's verwirklichen, der diesen Gelehrten noch bis an seinen Lebensabend lebhaft beschäftigt hat.

Über die Beziehungen zwischen der Zahlentheorie und der Theorie der automorphen Functionen.

Von Robert Fricke in Braunschweig.

Die in der Überschrift genannten Beziehungen lassen sich nach drei Gesichtspunkten klassificiren.

Erstlich gestattet die geometrische Theorie gewisser zwei Gruppen von linearen Substitutionen $\zeta' = \frac{\alpha\zeta+\beta}{\gamma\zeta+\delta}$ einer complexen Variablen ζ eine Anwendung auf drei der überlieferten Zahlentheorie angehörende Gattungen binärer quadratischer Formen. Es handelt sich dabei einmal um die Modulgruppe, welche ganze rationale Zahlen α, β, γ, δ zu Coefficienten und unimodulare Substitutionen hat, sodann um die sogenannte Picard'sche Gruppe, bei welcher α, β, γ, δ ganze complexe Zahlen der Gestalt $m+in$ darstellen und die Substitutionen gleichfalls unimodular sind. Die quadratischen Formen aber sind einmal die Gaufs'schen $ax^2+2bxy+cy^2$, bei

*) Vgl. Elliptische Functionen und algebraische Zahlen, sowie die zweite und dritte der vorhin genannten Abhandlungen über Zahlengruppen.

denen a, b, c rationale ganze Zahlen sind, sodann die Dirichletschen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit ganzen complexen Coefficienten der Gestalt $m + in$, endlich die Hermite'schen Formen $ax\bar{x} + bx\bar{y} + \bar{b}\bar{x}y + cy\bar{y}$, bei denen a und c rationale ganze Zahlen sind und b eine complexe ganze Zahl der Gestalt $m + in$ bedeutet, während $\bar{x}$ zu x, $\bar{y}$ zu y, $\bar{b}$ zu b conjugirt complex sein soll. In allen drei Fällen gewinnt die Lehre von der Äquivalenz und Reduction der Formen auf Grund einer geeigneten geometrischen Deutung der Formen vermöge der Gruppendiscontinuitätsbereiche eine anschauliche Gestalt.

Nicht minder wichtig ist zweitens die Beziehung, in welcher die ternären indefiniten Formen zu den der Theorie der automorphen Functionen zu Grunde liegenden Gruppen stehen. Die „reproducirende Gruppe" einer einzelnen solchen Form ist freilich erst in „projectiver Gestalt" geradezu eine Hauptkreisgruppe von speciellem arithmetischen Bildungsgesetz. Es gelang auch, das arithmetische Bildungsgesetz der correspondirenden ζ-Substitutionen in gewissem Sinne vollständig aufzuklären, wobei der Gebrauch rationaler ganzer Zahlen unter Adjunction gewisser Quadratwurzeln ausreichte.

An dieser Stelle setzt die dritte Beziehung zwischen der Arithmetik und den fraglichen Gruppen ein. Die eben gemeinten arithmetischen Bildungsgesetze der ζ-Substitutionen wurden in der Art verallgemeinert, dafs an die Stelle der rationalen ganzen Zahlen ganze algebraische Zahlen eines Körpers höheren Grades treten. Die hierbei entspringenden Principien waren ausreichend für die arithmetische Erklärung zahlreicher, wenngleich keineswegs sämtlicher geometrisch definirbaren Gruppen.

Eine ausführliche Darstellung aller dieser Gegenstände findet man im dritten Abschnitt des ersten Bandes der „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen", welche F. Klein und der Vortragende jüngst haben erscheinen lassen.

Zur Theorie der zweiten Variation einfacher Integrale.

Von Adolf Kneser in Dorpat.

Es sei $f(x, y, y')$ eine analytische Function, die sich in einem gewissen Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär verhält; $\mathfrak{C}$ sei, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten, eine reelle analytische Curve, AB ein reguläres Stück derselben, längs dessen x von a bis b wächst und y als eindeutige Function von x bestimmt ist; jedes Element des Bogens AB ergebe ein dem Gebiet $\mathfrak{G}$ angehöriges Wertsystem

$$x,\ y,\ \frac{dy}{dx} = y'.$$

Wenn dann beim Fortgang längs der Curve $\mathfrak{C}$ die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0$$

gilt; wenn ferner die Function δy für $x = a$ und $x = b$ verschwindet, übrigens aber nebst ihrer Ableitung $\delta y'$ in dem Intervall von a bis b stetig ist, so kann man setzen:

$$\begin{aligned} \varDelta &= \int_a^b f(x,\, y + \delta y,\, y' + \delta y')\, dx - \int_a^b f(x,\, y,\, y')\, dx \\ &= \int_a^b dx(\varphi(\delta y,\, \delta y') + R); \end{aligned}$$

dabei ist

$$\varphi(\delta y,\, \delta y')$$
$$= \tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\delta y^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \beta\right)\delta y\,\delta y' + \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\delta y'^2\right\},$$

β bedeutet eine beliebige, nebst ihrer Ableitung in dem Intervall von a bis b stetige Function, und R eine Potenzreihe der Argumente δy und $\delta y'$, deren Glieder von mindestens dritter Dimension sind.

Nach Legendre bestimmt man nun β durch die Gleichung

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y'} - \beta\right)^2 = 0;$$

dann ist φ das Quadrat eines in δy und $\delta y'$ linearen Ausdrucks und positiv, wenn längs des Bogens AB die Ungleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} > 0$$

besteht. Man kann aber, wie Scheeffer bemerkt hat, aus dem positiven Zeichen der Gröfse φ noch nicht mit Sicherheit schliefsen, dafs $\varDelta$ positiv ist, auch wenn $|\,\delta y\,|$ und $|\,\delta y'\,|$ beliebig klein sind und β sich im Intervall von a bis b regulär verhält; denn in einer reellen Potenzreihe von n Argumenten können die Glieder dritter und höherer Dimension nur dann unbedingt gegen diejenigen der zweiten Dimension vernachlässigt werden, wenn diese eine definite quadratische Form der n Argumente bilden, deren Determinante nicht verschwindet. Dafs trotzdem unter den obigen Voraussetzungen und bei hinreichend kleinen Werten von $|\,\delta y\,|$ und $|\,\delta y'\,|$ die Gröfse $\varDelta$ positiv ist, hat Scheeffer im XXVI. Bande der Math. Annalen auf eine höchst eigentümliche Weise gezeigt; seine Betrachtungen scheinen aber nicht auf den Fall mehrerer unbekannten Functionen ausgedehnt werden zu können. Eine andere Argumentation, welche zu dem von Scheeffer erreichten Ziele führt und aufserdem verallgemeinert werden kann, beruht auf folgendem Ge-

danken, dessen Keim sich in Lagrange's Theorie der analytischen Functionen findet.

Man betrachte statt der Gleichung (1) die folgende:

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{d\beta}{dx}\right)\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'} - \beta\right)^2 = c^2, \tag{3}$$

in welcher c eine reelle Constante bedeutet. Die Gleichung (1) hat nun nach Jacobi ein im Intervall von a bis b reguläres Integral, wenn die Annahme (2) festgehalten wird und der Bogen AB kein Paar conjugirter Punkte enthält. Sind auch A und B nicht conjugirt, so kann man noch ein etwas gröſseres Intervall von a bis b_1 angeben, in welchem ebenfalls ein reguläres Integral der Gleichung (1) existirt. Alsdann lehrt eine einfache functionentheoretische Erwägung, daſs die Gleichung (3) ein reguläres Integral besitzt in einem Intervall von a bis b_0, dessen obere Grenze von b_1 beliebig wenig verschieden ist, sobald die Gröſse $|c|$ hinreichend klein genommen wird. Bei passender Wahl von c hat man daher

$$b < b_0 < b_1,$$

und die Gleichung (3) besitzt auch ein von a bis b reguläres Integral. Dabei ist jetzt die Form φ ordinär, da ihre Determinante den Wert c^2 hat; hieraus aber schlieſst man leicht, daſs R gegen φ zu vernachlässigen, mithin Δ eine positive Gröſse ist, sobald $|\delta y|$ und $|\delta y'|$ in dem ganzen Intervall von a bis b unterhalb einer gewissen Grenze verbleiben.

Will man ähnliche Betrachtungen für das Integral

$$\int_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2')\,dx$$

durchführen, in welchem die Functionen y den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1'}\right) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2'}\right) = 0$$

genügen, so setze man, indem man für μ und ν die Werte 1 und 2 nimmt,

$$a_{\mu\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu' \partial y_\nu'}, \quad a_{2+\mu,\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu \partial y_\nu'} - \beta_{\mu\nu} = a_{\nu,2+\mu},$$

$$a_{2+\mu,2+\nu} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_\mu \partial y_\nu} - \frac{d\beta_{\mu\nu}}{dx}, \quad \beta_{\mu\nu} = \beta_{\nu\mu},$$

$$D = \sum \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33}\,a_{44},$$

$$d_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1,2+\nu} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2,2+\nu} \\ a_{2+\mu,1} & a_{2+\mu,2} & a_{2+\mu,2+\nu} \end{vmatrix}.$$

Dann weifs man nach **Clebsch** und **Mayer**, dafs die Gleichungen

$$d_{11} = 0, \quad d_{12} = 0, \quad d_{22} = 0 \tag{4}$$

ein von a bis b reguläres Integralsystem besitzen, sobald die Curve, längs deren man integrirt hat, kein Paar conjugirter Punkte enthält. Dasselbe gilt, wie man leicht sieht, von den Gleichungen

$$d_{11} = h, \quad d_{12} = k, \quad d_{22} = l, \tag{5}$$

wenn unter h, k, l hinreichend kleine positive Constante verstanden werden. Nimmt man noch an, dafs auf der Curve, längs deren man integrirt, die Ungleichungen

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0 \tag{6}$$

bestehen, und dafs $hl - k^2$ eine positive Gröfse sei, so ergeben diese Ungleichungen zusammen mit der Identität

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot D = d_{11} d_{22} - d_{12}^2$$

und der ersten Gleichung (5), dafs die quaternäre quadratische Form φ, deren Coefficienten die Gröfsen a sind, definit und positiv ist und eine von Null verschiedene Determinante besitzt. Da man nun, wenn δy_1 und δy_2 an den Integrationsgrenzen verschwinden, setzen kann:

$$\begin{aligned} \varDelta = & \int_a^b f(x, y_1 + \delta y_1, y_2 + \delta y_2, y_1' + \delta y_1', y_2' + \delta y_2')dx \\ & - \int_a^b f(x, y_1, y_2, y_1', y_2')dx = \int_a^b dx \left\{ \tfrac{1}{2} \varphi\,(\delta y, \delta y') + R \right\}, \end{aligned}$$

wobei R die Gröfsen δy, $\delta y'$ nur in mindestens dritter Dimension enthält, so kann man schliefsen, dafs die Gröfse $\varDelta$ bei hinreichend kleinen absoluten Werten der Variationen δy und $\delta y'$ positiv ist. In der bisherigen Theorie war dieser Schlufs nicht statthaft, da bei den Gleichungen (4) und den Ungleichungen (6) die Determinante der Form φ verschwindet.

Nach der hier angedeuteten Methode kann man auch bei beliebig vielen unbekannten Functionen, welche Bedingungsdifferentialgleichungen unterworfen sind, aus der **Clebsch-Mayer**'schen Theorie der zweiten Variation in strenger Weise hinreichende Bedingungen des Maximums oder Minimums ableiten.

Ziele und Methoden der technischen Mechanik.

Von A. Föppl in München.

Von einem Gegensatze zwischen der technischen Mechanik und der Mechanik des Physikers kann kaum die Rede sein. Gröfser ist freilich der Unterschied zwischen der Mechanik des Mathematikers, wie sie heute gewöhnlich vorgetragen wird, und der Mechanik des Technikers. Aber auch hier verschwindet jeder eigentliche Gegensatz, solange es sich nur um solche Probleme handelt, die wirklich streng, d. h. nicht nur mathematisch streng, sondern damit zugleich auch physikalisch genau gelöst werden können.

Leider beherrscht jedoch die heutige Mechanik nur einen verhältnismäfsig kleinen Teil der in ihr Gebiet fallenden Naturerscheinungen mit hinreichender Genauigkeit. Meistens mufs man sich damit begnügen, die mechanischen Vorgänge nach ihren Hauptzügen darzustellen und die minder wichtigen Nebenerscheinungen dagegen zu vernachlässigen. In der Regel schlägt nun, wo dies nötig wird, der Techniker andere Wege ein, als der nur durch die Schule der theoretischen Mechanik gegangene Mathematiker.

Der Grad der Genauigkeit, den die heutige Mechanik in der Darstellung der Wirklichkeit erreicht, ist auf verschiedenen Erscheinungsgebieten aufserordentlich verschieden. Am besten ist die Übereinstimmung bei den Bewegungen der Himmelskörper. Trotz mancher Zweifel, die gerade neuerdings wieder gegen die unbedingte Gültigkeit des Newton'schen Gravitationsgesetzes ausgesprochen wurden, hat sich dieses Gesetz doch bisher als ausreichend erwiesen, die astronomischen Erscheinungen bis ins Einzelne hinein mit aller wünschenswerten Genauigkeit zu verfolgen. Auf einem solchen Gebiete ist die sorgfältigste Untersuchung aller durch mathematische Deduction aus dem gegebenen Ausgangspunkt ableitbaren Folgerungen zugleich von gröfster praktischer Bedeutung. Von jeher ist daher auch die astronomische Mechanik das bevorzugte Anwendungsgebiet der sich mit Fragen der Mechanik beschäftigenden Mathematiker gewesen. Schon bei Gelegenheit der Entdeckung der allgemein gültigen Grundgesetze der Mechanik hat einst die Theorie der Planetenbewegung eine ausschlaggebende Rolle gespielt und bis auf den heutigen Tag erblicken viele in den grofsartigen Erfolgen der Mechanik der Himmelskörper den rechten Mafsstab für die Anforderungen, die sie an die übrigen Teile der Mechanik stellen zu müssen glauben.

Daher stammt wohl in letzter Linie jene viel vertretene Richtung der Mechanik, die es verschmäht, neue Ansätze zur Berücksichtigung besonderer Umstände zu bilden, und die als wissenschaftlich berechtigt nur solche Entwickelungen gelten lassen möchte, die sich ausschliefslich auf die Grundvorstellungen stützen, deren Aufstellung

die grofse wissenschaftliche That der beiden vorausgehenden Jahrhunderte war. Bei den Vertretern dieser Richtung beherrscht der Wunsch, alle Erscheinungen möglichst aus einer einzigen Fundamentalformel, also etwa aus dem Hamilton'schen Princip oder aus dem Hertz'schen verallgemeinerten Trägheitsgesetze abzuleiten, und überhaupt das Verlangen nach formalen Umgestaltungen des im wesentlichen bereits gesicherten Wissens den gröfsten Teil der wissenschaftlichen Thätigkeit. Daneben handelt es sich für sie nur noch um die Lösung gewisser Differentialgleichungen mit gegebenen Anfangsbedingungen oder umgekehrt um die Aufsuchung solcher Systembedingungen, für die man die Lösungen der Differentialgleichungen bereits anzugeben vermag. Für diese Richtung giebt es in der Mechanik nur noch mathematische Probleme und keine physikalischen mehr; die ursprüngliche Aufgabe der Mechanik, die sich rings um uns in der Aufsenwelt abspielenden überaus vielseitigen Bewegungsvorgänge möglichst vollständig zu erforschen und die sich in ihnen kundgebenden Gesetzmäfsigkeiten auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen, tritt bei dieser Richtung vollständig in den Hintergrund.

Dieser ausschliefslich deductiven Richtung, die sich der inductiven Forschungsmethode ganz entschlagen hat oder sie gar als unwissenschaftlich brandmarken möchte, stehen nun freilich die Techniker fast verständnislos und jedenfalls ablehnend gegenüber. Freilich kann es kaum als ein besonderes Verdienst der Techniker bezeichnet werden, dafs sie diesen Irrweg — denn für sie wäre es jedenfalls ein Irrweg — im grofsen ganzen glücklich vermieden haben. Nur zu oft sind sie ihrerseits in denselben Fehler verfallen. Der Widerspruch mit der Erfahrung, dem sie stetig ausgesetzt waren, und der sich oft gar bitter bemerklich machte, sowie die harte Notwendigkeit, sich mit gewissen Dingen unbedingt so abfinden zu müssen, dafs dieser Widerspruch, wenn nicht ganz vermieden, so doch in unschädlichen Grenzen gehalten würde, haben aber immer von neuem wieder dafür gesorgt, dem inductiven Verfahren zu seinem Rechte zu verhelfen.

Aufser den astronomischen Problemen dürfen namentlich jene, die in der Mechanik des starren Systems behandelt werden, Anspruch auf praktische Bedeutung machen, weil die Lösungen, zu denen man dabei gelangt, den Anforderungen an die physikalische Genauigkeit sehr oft in hohem Mafse entsprechen. Auf diesem Gebiete giebt es daher auch keinen Widerstreit verschiedener Richtungen in der Mechanik. Eine so dankenswerte Arbeit wie die der Herren Klein und Sommerfeld über die Theorie des Kreisels darf stets auch bei den Vertretern der technischen Mechanik der aufmerksamsten Beachtung sicher sein. Bei solchen Fragen tritt in unseren Kreisen wohl nur der eine Wunsch stärker hervor als in den Ihrigen, nämlich die Darstellung so weit als nur irgend thunlich zu vereinfachen.

Gröfser sind schon die Widersprüche, die sich zwischen der heute gültigen, sogenannten strengen Theorie und der Erfahrung einstellen, auf dem Gebiete der elastischen Erscheinungen. Mathematisch durchaus einwandfreie Lösungen der Differentialgleichungen für elastische Körper stehen oft genug im schroffen Widerspruche mit den wirklich beobachteten Erscheinungen.

Schlimmer noch sieht es auf dem Gebiete der Hydrodynamik aus. Man kann fast sagen, dafs es heute überhaupt noch keine Hydrodynamik im ursprünglichen Sinne des Wortes giebt, d. h. keine physikalisch genaue Dynamik des in der Natur vorkommenden Wassers. Einige einfache Fälle fügen sich ja wohl mit halbwegs ausreichender Genauigkeit in die übliche theoretische Fassung; — solange es aber nicht gelungen ist, solche fundamentalen Vorgänge wie das Fliefsen des Wassers in einem regelmäfsig gestalteten Flufsbette oder in einem Wasserleitungsrohre zu zergliedern, darf man nicht behaupten, über die allerersten Anfänge der Hydrodynamik hinausgekommen zu sein.

Woran fehlt es da nun? — etwa daran, dafs es bisher nicht gelungen wäre, die Differentialgleichungen der Hydrodynamik für die betreffenden Grenzbedingungen zu integriren? Keineswegs; — man hat ja im Gegenteile für die Bewegung in Röhren eine solche Lösung gegeben, die sich nach den Poiseuille'schen Versuchen bei sehr engen Röhren bewährt hat. Warum trifft diese Lösung aber durchaus nicht bei gröfseren Rohrdurchmessern zu? Gerade nach jener Theorie, die auf die Capillarkräfte gar keine Rücksicht nimmt, sollte die absolute Gröfse des Rohr-Durchmessers (oder auch die absolute Gröfse der Geschwindigkeiten) belanglos für die allgemeine Form der Lösung sein. Man mag daraus entnehmen, wie viel Wert jener scheinbaren Bestätigung durch die Poiseuille'schen Versuche beizumessen ist.

Oder betrachten Sie die Bewegung eines starren Körpers, etwa einer Kugel, durch das Wasser. Nicht nur die Gleichungen für reibungsfreie, auch die für zähe Flüssigkeiten führen zu Lösungen, die beim Vergleiche mit der Erfahrung versagen.

Um hierin Wandel zu schaffen, bedarf es der Bildung neuer Ansätze, neuer Hypothesen; mit blofsen mathematischen Folgerungen aus den einmal angenommenen Gleichungen kommt man um keinen Schritt weiter. Wer nur die durch ihr Alter ehrwürdig gewordenen hydrodynamischen Gleichungen als einen zulässigen Ausgangspunkt für wissenschaftlich strenge Untersuchungen gelten lassen will, stellt sich dem auf diesem Gebiete dringend nötigen Fortschritte der Wissenschaft hindernd in den Weg. Möge man immer auch nach dieser Richtung weiter arbeiten; man soll nur nicht unterlassen, die Widersprüche, zu denen man dabei mit der Erfahrung gelangt, gebührend hervorzuheben, und sich die Notwendigkeit eingestehen, die

Grundlagen des ganzen Gebäudes zu ändern, wenn man diese Widersprüche beseitigen will.

Niemand vermag die schönen Untersuchungen von Helmholtz über die Wirbelbewegungen höher zu schätzen, als ich es thue. Über dieser Wertschätzung darf man aber nicht vergessen, daſs das Gesetz, dem die Wirbelbewegungen im wirklichen Wasser unterworfen sind, noch ganz unbekannt ist. Gerade an dieser Stelle dürfte nach meiner Meinung der geeignete Angriffspunkt zu einer Umgestaltung der Hydrodynamik, die den Forderungen der physikalischen Genauigkeit besser entspricht, zu suchen sein; also etwa durch die Annahme einer Hypothese über das Verhalten eines sich selbst überlassenen Wirbelfadens.

Man kann hier die Frage einwerfen, ob es denn etwa der technischen Mechanik bereits gelungen sei, einen erheblichen Fortschritt nach dieser Richtung hin herbeizuführen. Ich muſs diese Frage natürlich verneinen, denn ein solcher Fortschritt hätte auch Ihnen nicht lange unbekannt bleiben können. Wohl aber darauf darf ich hinweisen, daſs die Auffassung, die der Techniker von den Aufgaben der Mechanik hegt, unmittelbar zu solchen Fragestellungen führt, und ich glaube auch behaupten zu dürfen, daſs die ersten schüchternen Anläufe zur Lösung solcher Fragen, die von einem vermeintlich überlegenen Standpunkte aus oft recht geringschätzig beurteilt werden, die rechte Vorstufe für einen durchschlagenden Fortschritt bilden. Wie dies aber auch sein möge, — jedenfalls besteht der erste Schritt zur Besserung des Bestehenden darin, daſs man sich die vorhandenen Mängel offen eingesteht und kein Mittel unversucht läſst, sie zu heben.

Nicht anders als in der Hydrodynamik steht es bei einer groſsen Zahl anderer Aufgaben, die in der technischen Mechanik auftreten. Mit strengen Lösungen im Sinne der astronomischen Mechanik wäre, selbst wenn sie gefunden werden könnten, oft kaum etwas anzufangen. Es würde ihnen die physikalische Genauigkeit fehlen, weil sich die Abstractionen, auf denen ihre Ansätze beruhen, zu weit von der Wirklichkeit entfernen.

Aus diesen Bemerkungen werden Sie bereits entnommen haben, worin das Ziel besteht, das sich die technische Mechanik setzt, und welche Wege sie einschlägt, um sich diesem Ziele zu nähern. Das letzte Ziel unterscheidet sich kaum von jenem, das auch jeder andere Forscher vor Augen hat, der sich mit der Mechanik beschäftigt. Nur die Wege dazu sind verschieden und mit ihnen auch die näher liegenden Ziele.

Nach meiner Auffassung, die, so viel ich weiſs, mit jener der überwiegenden Mehrzahl der Techniker übereinstimmt, soll und darf die Mechanik nichts weiter sein, als eine abgekürzte, möglichst einfache, daher auch — wenn es sein kann — aus möglichst wenigen Grundsätzen abgeleitete, vor allem aber thunlichst genaue und thun-

lichst umfassende Umschreibung der Erfahrungsthatsachen. Aus dieser Formulirung, die sich an den Wortlaut der von Hertz in seiner Mechanik erhobenen Forderungen anlehnt, werden Sie am besten den Unterschied erkennen, der zwischen dem von mir vertretenen Standpunkte des Technikers und dem von Hertz besteht. Die Einschränkung der Zahl der zu Grunde liegenden Hypothesen erscheint mir zunächst viel minder wichtig als Hertz. Ganz unerläſslich sind für die technische Mechanik nur die beiden Forderungen, daſs ihre Lehren als Unterlagen für das praktische Handeln hinreichend genau dem wirklichen Verhalten der Körper entsprechen, und daſs zugleich die Durchführung der Methoden, die sie zur Lösung der gestellten Aufgaben in Bereitschaft hält, bei der Anwendung auf einen gegebenen Fall keinen unverhältnismäſsig groſsen Aufwand an Zeit und Mühe erfordern darf.

Es ist natürlich kein Zufall und es liegt auch nicht an der geringeren mathematischen Durchbildung der Techniker gegenüber den Mathematikern von Beruf, daſs wir in diesen Punkten von Ihnen abweichen. Auch in unseren Reihen giebt es Männer genug, die vor keiner Schwierigkeit zurückschrecken würden, um sich das anzueignen, wovon sie sich eine erhebliche Förderung versprechen zu dürfen glaubten. Der Grund ist ein anderer. Der Mathematiker kann fast immer, und auch der Physiker kann sehr oft der Beantwortung einer von auſsen an ihn herantretenden Frage, für die er keine ihn befriedigende Antwort findet, aus dem Wege gehen. Er ist in der Wahl des Stoffes für seine Untersuchungen freier als der Techniker. Der Techniker dagegen steht unter dem unerbittlichen Zwange, sich mit den Thatsachen, die ihm störend oder fördernd in den Weg treten, unbedingt auf irgend eine Art, so gut es eben gelingen will, abzufinden. Er kann die Lösung eines Problems nicht so lange zurückschieben, bis sie ihm in bester Weise gelungen ist, sondern muſs sich einstweilen mit der relativ besten begnügen, die ihm erreichbar ist, falls sie nur überhaupt in dem vorher erörterten Sinne brauchbar ist.

Diese ihm durch den Zwang der Umstände aufgedrängte Auffassung seiner Aufgabe hat den Techniker auch schon frühzeitig davor bewahrt, die Arithmetisirung der Mechanik, die durch die Arbeiten von Lagrange eingeleitet worden war, in vollem Umfange mitzumachen. Bald wendeten sich die Techniker den graphischen Methoden wieder zu, und lange Zeit hindurch blieb diese Seite der Mechanik ihrer Pflege ausschlieſslich anvertraut.

Ich bin weit davon entfernt, die bisherigen Leistungen der technischen Mechanik zu überschätzen, also etwa die heutige technische Mechanik als einen fertigen Bau zu betrachten, der es an feiner Ausarbeitung mit der Mechanik des Himmels aufnehmen könnte. Wenn ihr auch schon vieles gelungen ist, gar manches auch, was

inzwischen schon längst in das Lehrgebäude der allgemeinen Mechanik Aufnahme gefunden hat, so bleibt doch noch das meiste zu thun. Aber darüber bin ich nicht im Zweifel, daſs sie sich ihre ferneren wie ihre näheren Ziele richtig gesteckt hat, und daſs sie sich im groſsen ganzen auf dem richtigen Wege zu ihnen befindet. Es ist derselbe Weg, den auch einst die Begründer unserer heutigen allgemeinen Mechanik eingeschlagen haben, um sich in der vielgestaltigen Erscheinungswelt zunächst einmal zu orientiren.

Diese allgemeinen Ausführungen würden in einem zu unbestimmten Lichte erscheinen, wenn ich es unterlassen wollte, etwas näher ins Einzelne einzugehen und sie durch die Anführung einiger der bemerkenswertesten Beispiele zu beleuchten.

Zunächst mache ich darauf aufmerksam, daſs die Statik in der technischen Mechanik weit mehr in den Vordergrund tritt als in den von Mathematikern verfaſsten Lehrbüchern. Während die Statik dort gewöhnlich als ein mit wenigen Formelsätzen erledigtes Gebiet erscheint, bietet sie dem Techniker eine Fülle eigenartiger Aufgaben. Auch dann, wenn es sich nicht um Gleichgewichtsaufgaben handelt, bildet das statische Problem, das nach der Anwendung des d'Alembert'schen Princips zurückbleibt, gewöhnlich den eigentlichen Kern der Aufgabe. Aus dem Gebiete der Statik habe ich daher auch die Beispiele, die ich Ihnen vorführen möchte, vorwiegend zu entnehmen.

Nur mit einigen Worten sei vorher auf eine Anzahl dynamischer Untersuchungen hingewiesen, die auf dem Boden der technischen Mechanik erwachsen sind. Ganz bekannt sind die Untersuchungen über die Trägheitskräfte, die im Kurbelgetriebe und in anderen Mechanismen vorkommen, und die damit zusammenhängenden Betrachtungen über die Verwandlung von mechanischer Arbeit in lebendige Kraft, die im Schwungrade aufgespeichert wird und umgekehrt, — Betrachtungen, die das Vorbild für die Entwickelungen der heutigen Energetik abgegeben haben. Beispiele dieser Art läſst sich heute wohl kaum irgend ein Lehrer der Mechanik entgehen. — Dahin gehören ferner gewisse Untersuchungen über verschiedene Schwingungsbewegungen, z. B. jene, die ein Brückenträger unter dem Einflusse einer bewegten Last ausführt, worüber vor kurzem Herr Zimmermann, der hervorragende Techniker des preuſsischen Ministeriums der öffentlichen Arbeiten, eine schätzenswerte Arbeit veröffentlicht hat. Auch der Erklärung, die ich selbst von den eigentümlichen Schwingungserscheinungen sehr schwanker, schnell umlaufender Wellen gegeben habe, darf ich an dieser Stelle gedenken. Andere Beispiele bilden die Untersuchungen über die Wirkungsweise der Regulatoren und die Frage der Massenausgleichung bei Schiffsmaschinen, die in letzter Zeit ernsthafter in Angriff genommen wurde.

Bei allen diesen dynamischen Untersuchungen zeigt sich aber die der technischen Mechanik eigentümliche Richtung weniger deutlich als in der Statik. Es handelt sich dabei fast immer nur um die unmittelbare Anwendung der allgemein gültigen mechanischen Grundgesetze, und nur aus der Art, wie die nötigen Vernachlässigungen eingeführt werden, kann man gelegentlich erkennen, daſs der Bearbeiter durch die Schule der technischen Mechanik gegangen ist.

Der schönste Erfolg, den die technische Mechanik bisher aufzuweisen hat, dürfte in der Aufstellung der Lehre vom Fachwerke liegen. Diese Lehre ist auch dem Mathematiker heute nicht mehr fremd. Vor einigen Jahren hat Ihnen Herr Henneberg ein ausführliches Referat darüber gegeben, dem ich namentlich darin vollständig beistimme, daſs wenigstens die Lehre vom ebenen, statisch bestimmten Fachwerke für die technische Mechanik bereits erledigt ist. Die seitdem darüber veröffentlichten tiefgehenden Untersuchungen des Herrn Schur stehen schon ganz auf dem Boden der Mechanik des Mathematikers; sie verarbeiten den einmal geschaffenen Begriff nach verschiedenen Seiten weiter, können aber den Techniker durch die dabei erlangten Ergebnisse, wenigstens meiner Schätzung nach, nicht mehr merklich fördern. Etwas anders scheint es mir freilich bei dem räumlichen Fachwerke zu liegen, das auffälligerweise von den Mathematikern, die sich mit diesen Dingen beschäftigten, bisher ganz unbeachtet gelassen wurde, obschon es an sich viel interessanter ist und noch mehr nutzbare Ausbeute verspricht.

Die groſse wissenschaftliche That, um die es sich auf diesem Gebiete handelt, ist freilich nicht in allen diesen weiteren Ausarbeitungen, sondern in der Aufstellung des Begriffes selbst zu suchen, die viel weiter zurückliegt.

Die Not macht erfinderisch. — Als sich vor einem halben Jahrhundert die heutige Brückenbaukunst zu entwickeln begann, bedurfte sie unbedingt eines Einblicks in die Verteilung der inneren Kräfte in einem aus einzelnen Stäben zusammengesetzten Traggerüste. Eine strenge Lösung im Sinne der theoretischen Mechanik war aussichtslos. Da wurde der Ausweg gefunden, die Hauptzüge aus dem ganzen Erscheinungsbilde, losgelöst von den mehr nebensächlichen Umständen, zu betrachten, nämlich die Biegung der einzelnen Stäbe bei der elastischen Formänderung zu vernachlässigen und nur die Längsspannungen zu beachten. So entstand der Begriff des Fachwerks, der, wie sich bald zeigte, ein recht brauchbares Bild von dem wirklichen Verhalten gegliederter Trag-Constructionen lieferte. Ohne die Schaffung dieses Begriffes wäre die groſse Entwickelung, die die Kunst des Baues eiserner Brücken seitdem genommen hat, gar nicht möglich gewesen.

Gestatten Sie mir übrigens darauf hinzuweisen, daſs der Entwickelungsgang, den die technische Mechanik bei dieser Gelegenheit

einschlug, in keiner Weise von der Art abweicht, wie ursprünglich alle Vorstellungen und alle Hypothesen der Mechanik in der Zeit ihrer Begründung, oft genug gleichfalls im Anschlusse an Aufgaben der Technik, entstanden sind. Nur auf diesem Wege ist der theoretischen Mechanik alles Material zugeflossen, das sie heute verarbeitet und in immer wieder neuen Wendungen darzustellen sucht.

Auch sonst hat übrigens gerade auf dem Gebiete der Fachwerkslehre das praktische Bedürfnis den Anstofs zu manchen Untersuchungen gegeben, die inzwischen so weit ausgereift sind, dafs sie selbst vom rigorosen mathematischen Standpunkte aus als sehr annehmbar bezeichnet werden müssen. Sie sind bisher in mathematischen Kreisen anscheinend wenig bekannt geworden, und ich bedaure daher, dafs ich hier nicht mehr Zeit auf ihre Erörterung verwenden kann. Da ist zunächst die Frage nach der elastischen Formänderung eines Fachwerkträgers unter einer Belastung. Keinem geringeren als dem grofsen Physiker Maxwell ist das Verdienst der ersten Lösung dieser Frage zuzuschreiben. Er hat seinen durchdringenden Scharfsinn damit kaum weniger bewiesen, als durch die unvergänglichen Arbeiten, durch die er auf anderen Gebieten seinen Namen zu einem der gefeiertsten dieses Jahrhunderts gemacht hat. Freilich ging es ihm in der Technik nicht anders als mit der Mehrzahl seiner physikalischen Arbeiten: Er wurde zunächst nicht verstanden, und erst nachdem Herr Mohr die schöne Maxwell'sche Methode von neuem entdeckt hatte, konnte sie zur allgemeinen Einführung gelangen. Der Maxwell'sche Satz von der Gegenseitigkeit der elastischen Verschiebungen, der aus diesen Untersuchungen gleichfalls hervorging, entspricht allen Anforderungen mathematischer Eleganz und zugleich gröfster praktischer Nutzbarkeit, denn er hat die früher zuweilen recht umständlichen Berechnungen in vielen Fällen aufserordentlich abzukürzen gestattet.

In diesem Zusammenhange ist noch der von Castigliano und bald darauf unabhängig von Fränkel aufgestellte Satz vom Minimum der elastischen Formänderungsarbeit zu nennen, der in seiner Fassung an die altbekannten Minimumsätze der Mechanik erinnert, und der heute mit Vorliebe zum Ausgangspunkte für die Festigkeitsberechnungen der technischen Mechanik gewählt wird.

Damit komme ich auf die Untersuchungen über Elasticität und Festigkeit, die in der technischen Mechanik neben der Fachwerkslehre eine dominirende Rolle spielen. Auf diesem Gebiete waren früher die Franzosen unbestritten unsere Meister. In keinem anderen Lande sind aber Technik und Mathematik von jeher in so enger Fühlung geblieben, als in Frankreich. Daher kommt es, dafs die hervorragenden Namen der französischen technischen Mechanik meist auch den Mathematikern aller Länder geläufig sind und mit ihnen viele der Arbeiten, die mit diesen Namen verbunden sind. Die

Schriften eines de Saint-Venant z. B., der wohl nie den Ehrgeiz hatte, etwas anderes zu sein, als ein hervorragender Techniker, werden kaum noch als solche der technischen Mechanik betrachtet, sondern eher der mathematischen Litteratur zugerechnet. Es wäre aber ungerecht, wenn man verkennen wollte, dafs u. a. die heutige Theorie der Torsion von Stäben aus der technischen Mechanik hervorgegangen ist. Es war wohl auch kaum ein zufälliges Zusammentreffen, dafs die Aufstellung der Differentialgleichungen für die elastischen Körper von einem Kreise von Männern ausging, die mit der Technik alle in näherem oder fernerem Zusammenhange standen. Natürlich will ich damit nicht sagen, dafs eine solche Gestaltungskraft, wie sie zum Aufbau eines derartigen neuen Ansatzes erforderlich war, nur von dieser Seite her erwartet werden konnte. Ich erblicke darin vielmehr nur einen weiteren Beleg dafür, dafs die Hereinziehung neuer Thatsachengebiete und die Bildung neuer Ansätze zu ihrer Bewältigung eine Art der Thätigkeit ist, zu der der Techniker von vornherein angeleitet und später immer von neuem wieder genötigt wird.

Mit der Aufstellung dieser Differentialgleichungen war aber der Gegenstand noch keineswegs so weit erschöpft, dafs es sich von da ab nur noch um die Integration dieser Gleichungen, also um rein mathematische Probleme gehandelt hätte. Diese Gleichungen enthalten nur einen Teil der ganzen Wahrheit. Wir wissen heute, dafs sich viele Körper ihnen durchaus nicht fügen, und wir sehen, wie die technische Mechanik eifrig bemüht ist, für solche Fälle Rat zu schaffen. Wenn es sich dabei zunächst auch nur um erste Versuche handelt, die von vornherein dazu bestimmt erscheinen, später durch eine verbesserte Theorie ersetzt zu werden, so scheint es mir doch weit nützlicher zu sein, einen bescheidenen Anfang zu machen, als sich auf die Behandlung der Theorie nach den hergebrachten Hypothesen zu beschränken und die Abweichungen von der Wirklichkeit auf sich beruhen zu lassen.

Um ein sehr bemerkenswertes Beispiel dieser Art kennen zu lernen, wollen wir annehmen, es handle sich um die Aufgabe, die Verteilung des Druckes zu berechnen, den eine Eisenbahnschwelle in einem Geleise auf die Kiesbettung ausübt, wenn ein Eisenbahnwagen über ihr auf den Schienen steht. Sie werden leicht einsehen, dafs der Techniker unbedingt ein Verfahren besitzen mufs, um sich über diese Frage zum mindesten ungefähr Rechenschaft zu geben, denn wenn auch noch manche andere Umstände dabei mitsprechen, so beruht doch die Theorie des Eisenbahnoberbaues in erster Linie auf der Beantwortung dieser Frage. Es ist darum selbstverständlich, dafs eine sonst vielleicht naheliegende Ausrede, es sei kein ausreichender Ansatz zur Lösung einer solchen Aufgabe, die sich gerade in den Vordergrund drängt, bekannt, in der technischen Mechanik

ganz unzulässig ist. Wie Sie aus meinen Ausführungen bereits entnommen haben werden, besteht vielmehr in den Augen der Techniker die Hauptaufgabe der Mechanik gerade darin, für jeden in der Wirklichkeit vorkommenden Fall einen passenden Ansatz ausfindig zu machen.

Natürlich hängt die Druckverteilung in unserem Falle wesentlich von den Eigenschaften des Erdkörpers ab, der die Unterlage des Geleises bildet. Die Vermutung liegt nahe genug, ihn als elastisch im Sinne der gewöhnlichen Elasticitätstheorie aufzufassen. In der That weiſs man, dass der Erdboden Schallwellen fortzupflanzen vermag, und man kann auch ohne weitere Hülfsmittel mit bloſsem Auge beim Vorbeifahren eines Eisenbahnzuges die elastischen Einsenkungen des Geleises beobachten. Ein möglicher Ansatz für die näherungsweise Lösung der Aufgabe besteht also jedenfalls darin, auſser Schienen und Schwellen auch den Erdkörper als elastisch anzusehen und von den Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie auszugehen. Zu einem solchen Vorgehen liegen auch in der That schon einige recht nützliche Vorarbeiten vor. Boussinesq und andere haben das elastische Gleichgewicht eines einseitig von einer Ebene begrenzten Körpers untersucht, auf dessen Oberfläche in gewissen Teilen gegebene Druckkräfte übertragen werden, während der Rest der Oberfläche frei bleibt. Die Möglichkeit, an Entwickelungen der gewöhnlichen Elasticitätstheorie anzuknüpfen und die Lösung des Problems auf diesem Boden zu versuchen, war also durchaus gegeben. Ein Vertreter der strengen mathematischen Richtung würde unter solchen Umständen kaum ein anderes Vorgehen für zulässig gehalten haben.

Die Techniker haben aber die Sache anders angegriffen. Das unmittelbare Bild der Erscheinung, wie es die Erfahrung kennen lehrt, hatte sich ihnen fest eingeprägt und sie hatten dabei wohl bemerkt, daſs die Kiesbettung unmittelbar unter der Last sehr stark zusammengedrückt wird, während die Senkung nach den Seiten hin schnell abnimmt. Sie gingen also nicht viel fehl, wenn sie die Senkung an jeder Stelle proportional mit dem dort übertragenen Drucke setzten. Diesen Ansatz hat Winkler zuerst gewählt; für die Gestalt der elastischen Linie der Schwelle führt er auf eine gewöhnliche Differentialgleichung vierter Ordnung, deren Lösung in Exponentialfunctionen sich sofort niederschreiben läſst. Auch die Bestimmung der Integrationsconstanten und die ganze numerische Ausrechnung macht nicht die geringste Schwierigkeit. Durch das Buch von Zimmermann über die Berechnung des Eisenbahnoberbaues ist diese Theorie ganz allgemein zur Anerkennung gelangt und in die praktische Benutzung übergegangen. Zimmermann unterlieſs übrigens auch nicht, durch Beamte der Eisenbahnverwaltung einige Versuchsreihen zur Prüfung der heute gewöhnlich nach ihm benannten Theorie

anstellen zu lassen. Die Übereinstimmung war genügend, um die Anwendbarkeit der Theorie zu bestätigen. Grofse Genauigkeit hatte hier natürlich von vornherein niemand erwartet.

Nun mag es sein, dafs jemand dieses Resultat einstweilen ganz gerne hinnimmt, es aber nur als eine Abschlagszahlung auffafst und als das, was eigentlich anzustreben ist, die Integration der Differentialgleichungen der Elasticitätstheorie bezeichnet. Ich will nun niemand abhalten, nach dieser Richtung hin zu arbeiten; nur davor möchte ich ihn bewahren, dafs er sich der falschen Meinung hingebe, die im Sinne dieser Elasticitätstheorie strenge Lösung sei voraussichtlich in Bezug auf die physikalische Genauigkeit der Lösung der Techniker überlegen oder sie könne sich auch nur entfernt mit ihr darin vergleichen. Höchstwahrscheinlich wäre vielmehr die strenge Lösung des mathematischen Problems wegen der mangelnden physikalischen Genauigkeit vollständig unbrauchbar.

Ich schliefse dies aus Versuchen, die ich im letzten Sommer in meinem Laboratorium anstellte. Wenn die üblichen Differentialgleichungen die elastischen Bewegungen des Erdkörpers richtig wiedergeben sollten, müfste nach der Lösung von Boussinesq beim Aufbringen einer Einzelbelastung auf den Erdboden die Senkung im Umkreise nach der ersten Potenz der Entfernung abnehmen; die horizontale Oberfläche des Bodens würde also zu einem Rotationshyperboloid deformirt erscheinen. In Wirklichkeit nehmen aber, wie meine Messungen lehrten, diese Senkungen viel schneller mit der Entfernung ab. Wenn man sie von einer Potenz der Entfernung abhängen lassen will, mufs man etwa die $2\frac{1}{2}$te wählen, um die Versuchsergebnisse annähernd richtig darzustellen. Also schon diese Lösung für den einfachen Fall ist physikalisch durchaus falsch, irreleitend und unbrauchbar.

Freilich ist ja die jetzt von den Technikern benutzte Theorie auch nicht gerade mustergültig, da sie ganz augenscheinlich von einem ungenauen Ansatze ausgeht. Wenn man aber hierin etwas bessern will, kann man es nur dadurch, dafs man die Differentialgleichungen der gewöhnlichen Elasticitätstheorie für diesen Fall verwirft und sie durch andere ersetzt, die sich dem wirklichen Verhalten des Erdbodens besser anschliessen. Eine Lösung, die auf solcher Grundlage gewonnen wäre, könnte sich der von den Technikern heute benutzten wohl als überlegen erweisen.

Ich bitte, mir es nicht zu verdenken, wenn ich die mir durch die Aufforderung des Herrn Vorsitzenden der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gegebene Gelegenheit dazu benutzte, mehr die Lichtseiten des von mir vertretenen Faches hervorzuheben. In der technischen Litteratur laufen natürlich gar viele unreife und schwächliche Arbeiten mit unter, ebenso oder mehr vielleicht wie in den meisten anderen Fächern. Gar mancher hält sich da für berufen, über Dinge zu ur-

teilen, für die ihm jede Vorbedingung des Verständnisses fehlt. Und wenn ich es vorher als einen wichtigen Vorzug der technischen Mechanik hinstellte, dafs sie immer wieder die Anregung zur Aufstellung neuer Ansätze liefert, lag es mir natürlich ferne, einem zügellosen Spiele der Phantasie das Wort zu reden. Über Leistungen dieser Art gehe ich lieber mit dem Stillschweigen hinweg, das sie verdienen.

Bei aller Betonung der guten Seiten der technischen Mechanik habe ich mich redlich bemüht, auch gegen die anderen Richtungen, die ich durchaus nicht verkleinern möchte, gerecht zu bleiben. Wenn mir dies nicht überall geglückt sein sollte, bitte ich um Ihre freundliche Nachsicht.

Über die constanten Geschofsabweichungen.

Von Carl Cranz in Stuttgart.

M. H. Folgen Sie mir auf ein Gebiet, welches gegenwärtig von den Fachmathematikern selten betreten wird, jedoch der interessanten und z. T. noch wenig durchforschten Partien genug aufzuweisen hat, das Gebiet der Ballistik; ich möchte Ihnen einen Überblick über diejenigen Probleme aus dem durch das Thema gekennzeichneten Teil der Ballistik geben, welche zur Zeit die Ballistiker und auch mich bewegen; naturgemäfs kann es sich an dieser Stelle nur um eine rasche teleskopische Umschau handeln.

Wenn man mit demselben Gewehr oder Geschütz unter gleichen Umständen, also mit demselben Visir und derselben Munition, nach dem gleichen Zielpunkt eine Schufsreihe abgiebt, so zeigen sich bekanntlich Abweichungen des Treffpunkts von dem beabsichtigten Zielpunkt; unter diesen Abweichungen hat man die zufälligen von den constanten zu unterscheiden.

Die zufälligen Abweichungen rühren her von kleinen unvermeidlichen und uncontrollirbaren Änderungen in Pulverladung, Geschofsgewicht, Geschofsform, Abgangswinkel, Luftdichte, Luftströmung u. s. f.; ihre Theorie fällt zusammen mit der Anwendung der Wahrscheinlichkeitslehre auf die Ballistik und bildet einen wichtigen Teil derselben. Von diesen Abweichungen soll jetzt nicht die Rede sein, sondern von den einseitigen, constanten, die in einem bestimmten Sinn, einer bestimmten Richtung erfolgen. Diese sind mehr oder weniger vermeidbar, da sie entweder berechnet und darnach corrigirt oder durch Wiederholung der Schüsse eliminirt werden können. Das letztere ist z. B. der Fall, wenn man, zur Vermeidung

von Fehlern durch einseitigen Reflex des Sonnenlichts auf der Visirfläche während des Zielens, Vor- und Nachmittags schiefst, oder wenn man Winters und Sommers Schiefsversuche anstellt und das Mittel nimmt. Berechnet werden können z. B. die Einflüsse von controllirbaren Änderungen der Anfangsgeschwindigkeit, des Abgangswinkels, der Luftdichte natürlich dadurch, dafs man die betreffenden Differentialausdrücke mittelst der Gleichungen des ballistischen Systems aufstellt und benützt. (Um durch einige wenige Zahlen einen Begriff von der Gröfse jener Einflüsse zu geben, so sei folgendes erwähnt: es änderte sich einmal bei Versuchen mit einer Kanone nur die Anfangsgeschwindigkeit von 600 m auf 606 m, ein zweites Mal nur der Abgangswinkel um 15′, ein drittes Mal bei sonst gleichen Umständen nur die Luftdichte von 1,206 kg pro cbm auf 1,293 kg, — das letztere nämlich durch Sinken der Lufttemperatur von + 15° Cels. auf — 2° bei gleichem Barometer- und Hygrometerstand —; dadurch änderte sich die Schufsweite das erste Mal um 95 m, das zweite Mal um 40 m, das dritte Mal um 160 m.)

Von den sonstigen Ursachen einseitiger Abweichungen möchte ich 5 erwähnen, 4 davon ganz kurz, und bei einer derselben etwas länger verweilen.

1) Wenn ein Gewehr während des Zielens verdreht gehalten wird, so ergeben sich Abweichungen am Ziel, nach der Höhe, nach der Seite und in der Horizontalrichtung des Schusses, die man durch einfache stereometrische Betrachtungen berechnen kann, indem man sich denkt, das Gewehr werde um die Ziellinie oder Visirlinie, die Linie über Visir und Korn, gedreht. Beim Geschütz entspricht dies dem Fall, wo dasselbe auf geneigtem Boden steht, die Räderaxe nicht horizontal ist. Die Abweichung nach der Seite, die ziemlich beträchtlich ist, — z. B. bei der deutschen schweren Feldkanone auf 5000 m Schufsweite und einem Schiefstehen der Räderaxe um 1, 2, 3, 4, 5 Grad der Reihe nach 25, 49, 74, 99, 135 Meter beträgt, — wird in der Praxis beim Geschütz, das eine Verstellung des Visirs nicht nur nach der Höhe, sondern auch nach der Seite zuläfst, durch Seitlichstellen des Visirs corrigirt.

2) Die Erdrotation erzeugt aus bekanntem Grund eine Abweichung nach der rechten Seite der Schützen, wozu eine Änderung der Schufsweite kommt; die Berechnung auf Grund der Gleichungen für die relative Bewegung kommt für den lufterfüllten Raum auf die Auswertung zweier Doppelintegrale hinaus, für welche wenigstens zwei Grenzen unschwer angegeben werden können. Die Seitenabweichung, welche im luftleeren Raum relativ sehr grofs wäre, beträgt in Wirklichkeit, selbst bei grofsen Schufsweiten, nur wenige Meter und ist kleiner als der mittlere Fehler eines einzelnen Schusses

gegenüber dem mittleren Treffpunkt, weshalb dieser Einfluſs in der Praxis nicht corrigirt zu werden braucht.

3) Die Ablenkung durch Wind beruht auf einer relativen Bewegung secundärer Art; denn bei herrschendem Wind bewegt sich erstens das Geschoſs bezüglich der Luft und zweitens diese bezüglich der Erdoberfläche, — wie vorher (Nr. 2) das Geschoſs bezüglich der Erdoberfläche und diese bezüglich der Erdaxe —; die Berechnung kann folglich ebenfalls mit Hülfe der Gleichungen der relativen Bewegung erledigt werden, und diese Berechnung ist für die Anlage der Schuſstafeln unumgänglich notwendig, weil die Schieſsresultate, die man z. B. mit demselben Gewehr an verschiedenen Tagen bei verschiedener Witterung erhalten hat, nur dann leicht vergleichbar sind, wenn sie alle auf gleiche Witterungsverhältnisse, also z. B. auch auf gleiche Windverhältnisse, auf Windstille, reducirt werden. Da dieser Einfluſs sehr erheblich ist, — z. B. die Schuſsweite 5300 m einer Granate von 500 m Anfangsgeschwindigkeit und 15° Abgangswinkel muſste, bei einer Componente der Windgeschwindigkeit in der Schuſsrichtung von 10 m, um nicht weniger als 147 m corrigirt werden —, und da andererseits die Berechnungen meist wenig genau sind, da die Windgeschwindigkeit selten constant ist, so werden zuverlässige Schieſsresultate nur erhalten, wenn die Versuche bei nahezu ruhiger Luft angestellt wurden.

4) Besonders wichtig und mechanisch interessant sind die Abweichungen durch Rotation der Geschosse. Ich muſs dabei die früheren kugelförmigen und die jetzigen Langgeschosse unterscheiden.

Schon im vorigen Jahrhundert bemerkten Robins und Euler, — welch letzterer recht eigentlich als der Vater der theoretischen äuſseren und inneren Ballistik betrachtet werden kann, wie Newton als deren Groſsvater —, daſs vielfach Rotationen der Kugeln ganz erhebliche Abweichungen zur Folge hatten. Anlaſs zu Rotationen war genugsam gegeben, z. B. dadurch, daſs immer etwas Spielraum zwischen Kugel und Rohrwand blieb, und deshalb die Pulvergase zum Teil mit, zum Teil vor der Kugel sich hinausdrängten und wegen der vermehrten Reibung ein Rollen derselben bewirkten, oder auch durch Reflexion der Kugel im Rohr, einmalige oder zweimalige, wie solche z. B. General Didion constatirte.

Mit der Erklärung der Abweichungen von Kugeln durch Rotation, wozu 1794 die Berliner Akademie durch eine Preisaufgabe Anregung gegeben hatte, mühten sich zahlreiche Mathematiker und Officiere ab; es sind mir ca. 15 vergebliche Erklärungsversuche vor Magnus 1852 bekannt geworden; hiervon kamen diejenigen des französischen Generals Didion 1841 und des preuſsischen Generals Otto 1843 der jetzt allgemein als richtig angenommenen Erklärungsweise von Magnus sehr nahe; beide scheint Magnus nicht gekannt zu haben. Nur der Erklärungsversuch von Poisson

1839 möge Erwähnung finden. Die Kugel bewege sich in der ruhenden Luft, oder umgekehrt, der Schwerpunkt der Kugel ruhe, und dieser entgegen ströme die Luft; die Kugel möge in Rotation geraten sein, etwa um eine horizontale Axe durch den Schwerpunkt, und rotire von oben über vorn nach unten — (die Ausdrücke vorn, hinten, rechts, links etc. sollen sich stets auf den Standpunkt des Schützen beziehen). Dann, schlofs Poisson, ist die Luftdichte auf der vorderen Seite gröfser als auf der hinteren Seite der Kugel; somit ist auch die Reibung zwischen Kugel und Luft vorn gröfser als hinten; dieser Umstand allein aber mufs eine Abweichung des Schwerpunkts der Kugel nach oben bewirken; in der That, denkt man sich gegen die vordere Seite der rotirenden Kugel ein Brett gehalten, so wird wegen der Reibung zwischen Kugel und Brett die erstere an dem Brett gewissermafsen emporzurollen streben, — wie man ähnliche Erscheinungen vielfach beim Billard- und Kegelspiel beobachten kann. Allein schon Poisson selbst und nach ihm eingehend Heim berechneten, dafs diese Wirkung des tangentiellen Luftwiderstandes eine nur minimale sei und die Abweichung nicht erklären könnte.

Die thatsächliche Abweichung ist auch in diesem Fall nicht nach oben, sondern unten gerichtet, infolge eines kräftigeren Einflusses, auf welchen erst Magnus aufmerksam machte: nämlich die an der Kugel adhärirende und mit ihr rotirende Luft bewegt sich unterhalb im gleichen Sinn wie die gegen die Kugel heranströmende Luft, oberhalb dieser entgegen; somit entsteht oben Vergröfserung, unten Verminderung des Luftdrucks; die Folge ist ein Überdruck von oben nach unten, eine Abweichung des Schwerpunkts der Kugel von oben nach unten.

Bis in die dreifsiger Jahre des Jahrhunderts waren diese Abweichungen der Kugeln durch Rotation zufällige Abweichungen, da die Richtung der Rotationsaxe eine zufällige war. Um die Rotation zu einer im voraus bestimmbaren, die Abweichung zu einer constanten zu machen, wurden auf Grund von preufsischen Versuchen von ca. 1830 ab eine Zeitlang excentrische Kugeln benützt. (Die Excentricität wurde durch eine Höhlung bewirkt; um den Radius zu ermitteln, auf dem der Schwerpunkt lag, liefs man die Kugel auf Quecksilber schwimmen; und die Entfernung von Schwerpunkt S und geometrischen Mittelpunkt O wurde erhalten, indem man seitlich in A ein Gewicht anhängte; eine einfache Rechnung mit dem Momentensatz, in S Gewicht der Kugel, in A angehängtes Gewicht, in O Auftrieb gleich beiden zusammen, ergab die Gröfse OS der Excentricität.)

Wurde nun eine solche Kugel z. B. mit „Schwerpunkt unten“ in das Rohr eingelegt und abgefeuert, so drehte sich, wenigstens anfangs, die Kugel um eine horizontale Axe durch den Schwerpunkt

von oben über vorn nach unten, da die Resultante der Pulvergasdrücke nach dem geometrischen Mittelpunkt der Kugel gerichtet war; dann aber erfolgte nach dem vorhin Erwähnten eine Abweichung des Schwerpunkts der Kugel nach unten; im andern Fall, mit Schwerpunkt oben eingelegt, erfuhr die Kugel eine Abweichung nach oben. Major Heim in Ulm führt aus dem Jahr 1840 u. a. zwei höchst interessante Schüsse an, welche beide mit derselben Ladung und demselben Abgangswinkel 85^0 aus dem gleichen Mörser verfeuert wurden: das erste Mal, mit Schwerpunkt unten eingelegt, flog die Kugel 273 Schritt; das zweite Mal, mit Schwerpunkt oben, stieg die Kugel in die Höhe, bumerangartig über den Mörser weg und schlug 29 Schritt hinter dem Mörser auf dem Boden auf.

Das Bestreben, durch Vergröfserung der Geschofsmassen ohne gleichzeitige Vergröfserung des Geschützkalibers gröfsere Wirkungen zu erzielen, führte naturgemäfs auf die Verwendung von Langgeschossen, und letztere wieder auf die Anbringung von Schraubenzügen im Lauf: indem das Langgeschofs durch das Rohr geprefst wird, ähnlich wie eine Schraubenspindel durch eine Schraubenmutter, erhält es eine rasche Rotation um die Längsaxe. Im luftleeren Raum würde folglich die Geschofsaxe dieselbe Richtung im Raum beibehalten; dasselbe wäre der Fall, wenn die Luftwiderstände gegen die einzelnen Teile der Geschofsoberfläche sich zu einer Resultanten zusammensetzten, welche stets im Schwerpunkt auf der Axe angriffe; letzteres ist indes nicht der Fall, sondern der Angriffspunkt A liegt für kleine Winkel α zwischen Geschofsaxe und Flugbahntangente sehr nahe dem Ende des cylindrischen Teils des Geschosses, mit wachsendem α rückt A dem Schwerpunkt S immer näher. Jedenfalls wirkt sonach auf das Geschofs eine äufsere Kraft, die nicht durch den Schwerpunkt geht, und damit ist Anlafs zu einer Präcessionsbewegung, zu einer conischen Pendelung der Geschofsaxe um den Schwerpunkt gegeben. Diese Kegelpendelung geht bei unseren deutschen, mit rechtsläufig gewundenen Zügen (Rechtsdrall) versehenen Geschützen rechtsläufig vor sich; die Geschofsspitze hebt sich somit anfangs und geht sodann nach rechts und abwärts; der Luftwiderstand wirkt also mehr gegen die linke Seite des Geschosses, wie gegen ein schiefgestelltes Brett oder Segel, und drückt das Geschofs aus der normalen Flugbahnverticalebene nach der rechten Seite heraus.

Diese Seitenabweichung, die relativ sehr grofs ist, z. B. bei der Granate der deutschen Feldkanone auf 6500 m Schufsweite schon 156 m beträgt, wird in der Praxis bekanntlich durch Seitlichstellen des Visirs, an welchem eine kleine Tabelle angebracht ist, compensirt.

Sofort wird sich nun jedem die Frage aufdrängen: warum tritt nicht späterhin Linksabweichung, dann wieder Rechtsabweichung u. s. f.

abwechslungsweise ein —, wie ja notwendig auch der Schwerpunkt des Geschosses abwechslungsweise gehoben und gesenkt wird?

Magnus und Kummer antworteten, ohne übrigens rechnerisch auf diese Frage einzugehen: Die Pendelung geht so langsam vor sich, dafs selbst bei den gröfsten Schufsweiten nicht einmal ein halber Kegel durch die Geschofsaxe beschrieben wird. Diese Behauptung, die sich noch in der neuesten und von deutschen Officieren viel benützten Waffenlehre von General v. Wille 1896 (pag. 256) findet, wird durch die Versuche mit den die Geschofsbewegung nachahmenden Modellen von Perrodon und Pfaundler deshalb nicht widerlegt, weil bei diesen Apparaten nur relativ kleine Luftwiderstände erzielt werden können. General Mayevski, Hauptmann Haupt, Oberst von Wuich und andere Ballistiker antworten auf Grund ihrer Berechnungen: Die Geschofsspitze bleibt überhaupt stets auf der rechten Seite der Flugbahnvertikalebene, d. h. der Ebene durch Schwerpunkt und Flugbahntangente; sie bewegt sich in kleinen Schwankungen abwärts und entfernt sich dabei stetig nach rechts hin von jener Ebene.

Die Beobachtungen, die ich kenne, weisen durchweg auf volle Kegelpendelungen, meist in beträchtlicher Anzahl während desselben Geschofsflugs, hin. Allerdings sind dies nur wenige Beobachtungen: erstens und vor allem diejenigen von Herrn Neesen, der bekanntlich in der Granate selbst eine photographische Platte anbrachte und durch ein Loch in der Seitenwandung das Sonnenlicht auf der Platte zeichnen liefs; dies sind die einzigen exacten Messungsversuche; ferner erhielt ich von Herrn Hauptmann Heydenreich zwei Mitteilungen, wonach die Geschofspendelungen an Geschützgranaten direct mit dem blofsen Auge beobachtet wurden; die Zeit für eine volle Pendelung betrug darnach in den drei Fällen resp. 0,55; 0,50; 0,25 Secunde. Andererseits liefert die aus Betrachtungen ähnlich der Kreiseltheorie abgeleitete und von den Ballistikern benützte Formel $w = M/(C \cdot r)$ (M das variable Moment des Luftwiderstandes bezüglich des Schwerpunkts, wozu ein Factor kommt, der von 1 wenig verschieden ist, C das Trägheitsmoment des Geschosses um die Längsachse, r die Winkelgeschwindigkeit um dieselbe) für die Winkelgeschwindigkeit w der Präcessionsbewegung der Figurenaxe in diesen drei obigen Fällen der Reihe nach die Zeiten 9; 3,5; 0,9 Secunden. Der Vergleich dieser Zahlen mit den obigen zeigt, dafs die beobachteten Pendelungen weit rascher vor sich gehen, als jene gewöhnlich benützte Formel verlangt. Wie ist dieser Widerspruch zu erklären?

Ich habe in der letzten Zeit das Problem der konischen Geschofspendelung und damit auch der Seitenabweichung mit Hülfe der analytischen Mechanik von neuem in Angriff genommen und dasselbe für jedes beliebige Luftwiderstandsgesetz zu lösen, wenigstens auf Quadraturen zurückzuführen gesucht. Der Ideengang war dabei

der folgende: Da die drei Gleichungen der Rotation von denen der Translation und auch umgekehrt abhängen, und da wegen der grofsen Complicirtheit des Problems — es ist ja sowohl die Resultante des Luftwiderstandes gegen das rotirende Geschofs, als auch der Winkel derselben mit der Geschofsaxe, endlich auch die Lage des Angriffspunkts auf der Axe, in wenig einfacher Weise mit der Zeit veränderlich — an eine genaue Lösung nicht zu denken ist, so wird zunächst eine erste Näherungslösung der Gleichungen der Translation ohne Rücksicht auf die Rotation aufgesucht, sodann werden die betreffenden Ausdrücke in die Gleichungen der Rotation eingeführt und diese näherungsweise gelöst; die so erhaltenen Integrale werden endlich dazu verwertet, um rückwärts in den drei ersten Näherungslösungen für die Gleichungen der Translation je ein Correctionsglied hinzuzufügen. Es ist dies dasselbe Verfahren successiver Annäherung, das auch in den Störungsrechnungen der Astronomie Verwendung findet.

Speciell das die Bahn der Geschofsspitze während einer Pendelung betreffende geometrische Resultat war dabei das folgende: die Spitze bewegt sich auf einer Kugel um den Schwerpunkt S; auf dieser Kugel beschreibt die Spitze einen veränderlichen Kreis, der stets durch den Anfangspunkt A geht, dessen Radius sich in bestimmter Weise mit der Zeit vergröfsert, und dessen Mittelpunkt stetig nach abwärts geht und von der durch den Schwerpunkt S und die Flugbahntangente gelegten Flugbahnverticalebene mehr oder weniger nach rechts hin sich entfernt. Die Bahn der Spitze auf der Kugel ist sonach eine spiralenförmige Linie, welche mehr auf der rechten, als auf der linken Seite der Flugbahnverticalebene verläuft. Diese Spirale ist offenbar das Analogon zu dem Kreis, den man bei der langsamen „pseudo-regulären" Präcessionsbewegung eines um einen festen Punkt sich bewegenden Kreisels wahrnimmt. Die variable Winkelgeschwindigkeit, mit der die Spiralwindungen beschrieben werden, ist die obige $M/(C \cdot r)$.

So verhält es sich, falls angenommen wird, dafs anfangs, beim Verlassen der Rohrmündung, das Geschofs lediglich eine Rotation um seine Längsaxe, zugleich Hauptträgheitsaxe und verlängerte Rohraxe, besitze. Ich habe nun die allgemeinere Annahme versucht, dafs das Geschofs nicht centrirt die Mündung verlasse, also die Drehaxe nicht mit der Figurenaxe zusammenfalle. Auf dasselbe läuft es hinaus, wenn angenommen wird, dafs das Geschofs anfangs einen seitlichen Stofs erhalte, sei es durch Bucken des Geschützrohrs, sei es durch Vibration des Gewehrlaufs, sei es endlich, dafs die beiden anfangs auf das Geschofs wirkenden Kräfte (der Luftwiderstand von vorn, der Druck der Pulvergase von hinten), welche ohne Zweifel wenige Centimeter vor der Mündung der Gröfse nach gleich sind, nicht durch den Schwerpunkt gehen. Bei dieser An-

nahme über den Anfangszustand traten in den hier nicht wiederzugebenden Ausdrücken für die Coordinaten der Geschoſsspitze in Function der Zeit weitere Glieder auf, welche eine andere, und zwar kürzere, Periode enthalten; diese Periode ist von der Gröſse des Anfangsstoſses nahezu unabhängig und wird in erster Linie durch r, C, B (r Winkelgeschwindigkeit um die Längsaxe, C Trägheitsmoment um dieselbe, B Trägheitsmoment um eine Senkrechte zur Längsaxe durch den Schwerpunkt) und erst in zweiter Linie durch den Luftwiderstand bedingt. Die geometrische Bedeutung ist die, daſs jene Spirale nur die Leitcurve bildet für Nutationsbögen oder Teilbögen, die von der Geschoſsspitze beschrieben werden und die ähnlich denen verlaufen, welche in der Heſs'schen Arbeit (Math. Annalen, Band 29, Tafel) sich finden, abgesehen davon, daſs es sich in unserem Fall um einen veränderlichen, nicht um einen festen Kreis handelt. Die punktweise numerische Berechnung der Bahn der Geschoſsspitze in einem speciellen Fall und bei einer bestimmten Annahme über den Stoſs ergab Teilbögen, die in ihrem Verlauf sehr befriedigend mit den von Herrn Neesen durch Beobachtung erhaltenen Pendelungsbögen übereinstimmen. Die Zeit für einen vollen Umlauf ergab sich darnach in den beiden ersten der obigen drei Fälle zu 0,40 resp. 0,35 Secunden; diese Zahlen stimmen mit den Beobachtungszahlen 0,55 und 0,50 nicht vollkommen überein, immerhin liegen sie weit näher als 9 und 3,5 Secunden; dazu ist noch zu bemerken, daſs ich genötigt war, die beiden Trägheitsmomente B und C aus der äuſseren Gestalt der Granate zu berechnen; ein Blick auf die hier vor Ihnen liegende Granate der deutschen Feldkanone zeigt jedoch, daſs wegen der Kupferführungen, der mannigfachen Ausfräsungen, des Hohlraums, des massiven Kopfteils und des massiven Bodens die Berechnung wenig genaue Resultate liefern kann; die experimentelle Bestimmung (es fehlt leider an einer durch systematische Schwingungsversuche erhaltenen empirischen Formel für die Trägheitsmomente von Langgeschossen der jetzt üblichen Form) würde darnach ohne Zweifel einen etwas gröſseren Wert für B liefern, dann wird die Annäherung an die Wirklichkeit noch bedeutender. Verwendet man aber den betreffenden Versuch von Herrn Neesen für die Bestimmung einer empirischen Constanten in $B : C$ und berechnet damit die Zeit einer Pendelung in dem zweiten Fall von neuem, so stimmen die beiden Zahlen, die durch Berechnung und die durch Beobachtung erhaltene 0,50, vollkommen überein, — ein Beweis für die Exactheit der Neesen'schen Versuche, vielleicht auch mit für die Richtigkeit der Theorie.

Mit alledem ist es mir wenigstens wahrscheinlich*) geworden,

*) Indessen haben eigene mit einem kleinen selbstconstruirten Mörsermodell angestellte Versuche, bei welchen die Pendelungen deutlich zu sehen waren, diese Wahrscheinlichkeit zur Gewiſsheit erhoben.

dafs die conischen Geschofspendelungen, die mit dem blofsen Auge beobachtet werden, und die auch von Herrn Neesen photographisch fixirt wurden, meist Nutationen infolge eines Anfangsstofses, nicht Präcessionsbewegungen sind. Immerhin wäre es sehr wünschenswert, wenn über diese Pendelungen, deren Kenntnis nicht nur für den Artillerieofficier wegen der Beurteilung der Geschofsstabilität wichtig ist, sondern neuerdings auch für den Militärarzt wegen des Studiums der Geschofswirkungen im Körper Bedeutung erlangt hat, weitere exacte Beobachtungen angestellt würden; das Verfahren des Herrn Neesen scheint bisher die einzige Möglichkeit zu bieten.

5) Auch bei Infanteriegeschossen mufs eine Seitenabweichung durch conische Pendelung existiren, wiewohl dieselbe mitunter bezweifelt wird; es ist nur schwierig, diese Seitenabweichung beim fertigen Gewehr nachzuweisen, aus zwei Gründen: erstens wird schon in der Fabrik das Visir und Korn für eine ganz bestimmte, in der Praxis besonders häufig benützte Schufsweite (z. B. 270 m) so angebracht, dafs für diese Zielpunkt und mittlerer Treffpunkt zusammenfallen; zweitens und vor allem wird diese Abweichung durch Rotation von einer stärkeren Abweichung anderer Art überdeckt, (beide Abweichungen lassen sich trennen, aber nur auf umständliche Weise: man dreht successiv das Gewehr um die Seelenaxe und giebt in jeder Lage Schufsreihen ab; die mittleren Treffpunkte auf der Scheibe liegen dann auf einem Kreis; dessen Mittelpunkt steht von der Verticalebene durch die ruhende Seelenaxe um eine Strecke ab, welche für die betreffende Schufsweite die Abweichung durch Pendelung darstellt); diese Abweichung zweiter Art rührt von einer Verbiegung, einer Vibration des Laufs her: fast alle unsere Gewehre scheinen in dem Moment, wo das Geschofs die Mündung passirt, mit dem Mündungsteil nach rechts hin verbogen zu sein; der Grund dieser Verbiegung wird von Major Thiel in der Unsymmetrie der Verschlufsconstruction des Hinterladers gesucht; in der That, ich habe hier zwei serbische Gewehre ganz desselben Systems, und zwar ist bei dem einen, dem normalen Gewehr, wie üblich der Hülsenausschnitt auf der rechten Seite angebracht; dieses Gewehr schiefst rechts; das Visir ist, wie man deutlich sieht, nach der linken Seite der Rohraxe, das Korn nach rechts verschoben; bei dem andern (von Herrn Commercienrat Mauser in Oberndorf a. N. zum Studium dieser Erscheinung hergestellt) befindet sich der Hülsenausschnitt links; dieses Gewehr schiefst zu weit links; das Visir mufste deshalb nach rechts, das Korn nach links gerückt werden.

Aus dieser Laufvibration in horizontalem Sinn erklärt sich vielleicht auch die eigentümliche Thatsache, dafs, wenn auf ein Gewehr das Seitengewehr als Bajonett aufgesteckt wird, das Geschofs erheblich nach links abweicht; es ist noch nicht sicher constatirt, ob diese Erscheinung durch die Verlegung des Gesamtschwerpunkts

zwischen Gewehr und Bajonett nach der rechten Seite der Laufaxe, oder durch Änderung der Laufvibration durch die angehängte Bajonettmasse oder durch beides zusammen bedingt ist.

Auch in verticaler Ebene vibrirt der Lauf während des Schusses; und das Studium dieser verticalen Schwingungen, welche die horizontalen an Gröfse übertreffen, ist von Wichtigkeit für die Anlage von Schufstafeln irgend eines Gewehrs, speciell für die Angabe des wahren Abgangswinkels d. h. des anfänglichen Horizontalneigungswinkels der Flugbahntangente: Man nehme an, es werde in horizontaler Richtung über Visir V und Korn K weg nach einem bestimmten Punkt der nahen Scheibe gezielt; die gegen die Visirlinie geneigte Laufaxe oder Seelenaxe sei im Ruhezustand SS_1; man sollte nun vermuten, es falle der Winkel zwischen VK und SS_1, oder der sogenannte Visirwinkel, mit jenem Abgangswinkel zusammen, sodafs, wenn man SS_1 bis zum Punkt A der Scheibe verlängert und von A aus um die Fallhöhe bis Punkt B abwärts geht, B der Durchschlagspunkt des Geschosses auf der Scheibe sein müsse; dem ist aber nicht so, sondern der wirkliche mittlere Treffpunkt liegt meist tiefer oder höher als B, in B_1, und zwar fast durchgängig bei den Gewehren desselben Systems in demselben Sinne; z. B. bei dem früheren deutschen Infanteriegewehr Modell 71 schon auf 10 m Entfernung um $BB_1 = 2{,}4$ cm im Mittel unter B. Man schliefst in diesem Fall, der Lauf sei in dem Augenblick, wo das Geschofs die Mündung verläfst, nach abwärts verbogen, um einen gewissen Winkel ε gegen die Ruhelage SS_1, den sog. Abgangsfehlwinkel oder Vibrationswinkel. Dieser Winkel wird in diesem Fall vom Visirwinkel subtrahirt und die Differenz als der wahre Abgangswinkel in die Schufstafel eingetragen. Zur Bestimmung des Vibrationswinkels ε kennt man jedoch nur die Strecke BB_1 auf der Scheibe, also die Entfernung zwischen dem idealen Treffpunkt B und dem wahren mittleren Treffpunkt B_1; dagegen die Lage der Spitze dieses Winkels ist nicht gegeben; in den Gewehrfabriken und, wie es scheint, auch bei den Gewehrprüfungscommissionen wird angenommen, dafs die Spitze O des Winkels ε, also der vorderste Ruhepunkt des Laufs bei seiner Vibration, an der Stelle liege, wo mutmafslich der Lauf sich an den Schaft beim Rückstofs anlehnt, also bei solchen Gewehren ohne Zapfenlager in der beim Kolbenhals liegenden sog. Kreuzschraube; dies ist jedoch nur eine Vermutung; zudem wäre noch die Geschwindigkeit des Geschosses senkrecht zur Laufaxe in Betracht zu ziehen. Seit etwa einem Jahr ist Prof. Dr. Koch (Stuttgart) in Gemeinschaft mit mir damit beschäftigt, diese Vibrationen von Gewehrläufen, zunächst diejenigen in verticalem Sinn, experimentell genauer zu untersuchen, insbesondere den vorderen Knotenpunkt O bei dieser Vibration aufzusuchen; es geschieht dies u. a. mittelst Momentphotographie des Laufs, wobei das fliegende Geschofs selbst,

beim Verlassen des Rohrs, die Beleuchtungsfunken gleichzeitig auslöst. Die Versuche sind noch nicht abgeschlossen, aber schon jetzt kann als Vermutung ausgesprochen werden, dafs der Gewehrlauf eines Hinterladers keineswegs nur als Ganzes im Grundton schwingt, sondern und vor allem im ersten Oberton, sodafs jener Knotenpunkt nahe der Mündung liegt.

Damit schliefse ich. Ich hoffe wenigstens das eine gezeigt zu haben, dafs auf diesem interessanten Gebiet der Ballistik mehrere offene Fragen existiren, die ihrer vollständigen Erledigung durch die analytische Mechanik oder durch das Experiment oder am besten wohl durch beides zusammen noch harren.

Die Beseitigung von Schiffsvibrationen durch Ausgleichung der Massenwirkungen der Maschinen.

Von **H. Lorenz** in Halle und **H. Schubert** in Hamburg.

Alle durch eigene Maschinen vorwärts bewegten Fahrzeuge, insbesondere Schiffe, erleiden infolge der Massenwirkungen, d. h. der durch Änderungen der kinetischen Energie der Teile der Kurbelmechanismen der Maschinen auftretenden Trägheitskräfte, Vibrationen. Bezeichnet man in einem Kurbelmechanismus, dessen Schubstange unendlich lang angenommen sei, mit P das Gewicht der lediglich hin- und hergehenden Masse, mit ε die als constant anzusehende Winkelgeschwindigkeit der Kurbel vom Radius r, mit g die Beschleunigung der Schwere, mit φ die Kurbelstellung gegen die Totlage, so ist der in die Bewegungsrichtung von P fallende Massendruck $Q = -Pr\frac{\varepsilon^2}{g}\cos\varphi$, während senkrecht dazu nur der Massendruck der Kurbel, welche für sich durch Gegengewichte ausgeglichen werden kann, wirkt. Während nun für einen Kurbelmechanismus ein vollständiger, d. h. zum Verschwinden von Q führender Ausgleich solcher Wirkungen undurchführbar ist, hat der Ingenieur Schlick*) diese Möglichkeit für mehrkurbelige Maschinen an derselben Welle (Drehaxe) erwiesen. Bedeuten $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ die Winkel der Kurbeln mit der ersten, so verschwinden die Massendrücke an dem System, wenn

$$\Sigma Pr\cos\alpha = 0$$
$$\Sigma Pr\sin\alpha = 0$$

wird. Sind ferner $a_2, a_3, \ldots a_n$ die Abstände der Bewegungsebenen der einzelnen Getriebe vom ersten, so verschwinden auch die Kipp-

---

*) Deutsches Reichs-Patent Nr. 80974.

momente um eine Axe senkrecht zur Welle und zur gemeinschaftlichen Bewegungsebene der hin- und hergehenden Teile, wenn

$$\Sigma Pra \cos\alpha = 0$$
$$\Sigma Pra \sin\alpha = 0.$$

Für endliche Schubstangenlängen $l_1 l_2 \dots l_n$ läfst sich die Ausgleichung nur näherungsweise erreichen. Der Massendruck eines Getriebes wird hier nicht nur durch das verwickeltere Bewegungsgesetz, sondern auch durch die Massenwirkung der pendelnd hin- und hergehenden Schubstange beeinflufst. Es läfst sich nun leicht nachweisen, dafs man in den Reihenentwickelungen für die Massendrücke und Momente, in welche noch die statischen und Trägheitsmomente der Stange eintreten, mit den 3 ersten Gliedern für alle praktischen Fälle ausreicht. Alsdann aber ist der Ausgleich unter der Voraussetzung, dafs die Kurbel für sich ausgeglichen, die Schubstangengewichte dagegen den nur hin- und hergehenden Gewichten proportional sind, erreichbar, wenn die 8 Gleichungen

1) $\Sigma Pr \cos\alpha = 0$	5) $\Sigma Pr \cos 2\alpha = 0$
2) $\Sigma Pr \sin\alpha = 0$	6) $\Sigma Pr \sin 2\alpha = 0$
3) $\Sigma Pra \cos\alpha = 0$	7) $\Sigma Pra \cos 2\alpha = 0$
4) $\Sigma Pra \sin\alpha = 0$	8) $\Sigma Pra \sin 2\alpha = 0$

erfüllt sind.

Hierbei verschwinden auch diejenigen Momente, welche das ganze System um die Drehaxe selbst zu kippen bestrebt sind.

Herr Schubert, der sich auf Anregung von Herrn Consul Schlick schon vor etwa zwei Jahren mit der mathematischen Theorie der Aufhebung der Schiffsvibrationen beschäftigt hatte, war schon damals zu den jetzt auch von Herrn Lorenz entwickelten acht Gleichungen gelangt und durch eine genaue Discussion derselben zu Resultaten geführt, die er im Anschlufs an die Ausführungen des Herrn Lorenz vorträgt. Die n Producte $P \cdot r$ geben durch ihre Verhältnisse $n - 1$ Gröfsen, die n Kurbeln geben durch die Winkel, die sie miteinander bilden, weitere $n - 1$ Gröfsen, endlich liefern die n Entfernungen a, durch die Abstandsverhältnisse der Cylinder von einander $n - 2$ Gröfsen. Zwischen diesen $3n - 4$ Gröfsen bestehen, im Fall des Schlick'schen Patents, d. h. wenn man die Schubstange, dem Kurbelradius gegenüber, als unendlich lang ansieht, die oben mit den Zahlen 1) bis 4) bezeichneten Gleichungen, so dafs dann $3n - 8$ Gröfsen willkürlich gewählt werden können. Doch mufs $n > 3$ sein, wenn man die durch die Praxis gebotene Bedingung stellt, dafs kein Cylinderabstand null sein soll. Wenn $n = 4$ ist, so ergiebt sich eine Relation, die allein zwischen den Cylinderabständen und den Kurbelrichtungen besteht. Diese Re-

lation bedeutet geometrisch, dafs vier Punkte, die in gerader Linie so liegen, wie die Cylinder zu einander stehen, projectiv sind zu vier Strahlen, die von einem Punkt aus parallel den Kurbel-Richtungen gezogen werden. Wenn man die Endlichkeit der Schubstange berücksichtigt, also die Gleichungen 5) bis 8) mitgelten läfst, so ergeben sich Resultate, durch welche die Schiffsvibrationen nahezu, aber nicht vollständig verschwinden. (Näheres in den Mitteilungen der Hamburger Mathem. Gesellschaft von 1898.) Nach diesen Resultaten sind in Deutschland und im Auslande in letzter Zeit die Maschinen vieler grofser Dampfschiffe gebaut, u. a. auch die Maschinen von „Kaiser Wilhelm der Grofse".

Über das Bach-Schüle'sche Gesetz der elastischen Dehnungen.

Von R. Mehmke in Stuttgart.

Das in der Überschrift genannte Gesetz (vgl. C. Bach, Allgemeines Gesetz der elastischen Dehnungen, Zeitschr. d. V. deutscher Ingen., Bd. 41, S. 248, 1897), von dem Ingenieur W. Schüle aus den Ergebnissen zahlreicher Versuche Bach's mit den verschiedensten Baustoffen abgeleitet, lautet:

$$\varepsilon = \alpha\sigma^m,$$

(ε = elastische Dehnung, σ = Spannung, α und m Constanten), und ist bestimmt, an Stelle des als besonderer Fall ($m = 1$) darin enthaltenen, 1660 von Hooke gefundenen Gesetzes

$$\varepsilon = \alpha\sigma$$

in der Festigkeitslehre verwendet zu werden. Wenn man versucht, die Biegungslehre diesem Gesetz gemäfs umzugestalten, stöfst man auf mathematische Schwierigkeiten. Der Vortragende findet, dafs innerhalb der in der ausführenden Technik als zulässig erachteten Spannungsgrenzen die leichter anwendbare Formel von Hodgkinson (1849)

$$\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2$$

hinreichend genaue Ergebnisse liefert, und verweist bezüglich aller Einzelheiten auf einen demnächst in der Zeitschrift für Mathematik und Physik erscheinenden Aufsatz.*)

*) Derselbe ist inzwischen erschienen (Bd. 42 der genannten Zeitschrift, S. 327—338, 1897). Es hat sich herausgestellt, dafs obiges Gesetz auch schon früher, z. B. 1729 von Bülffinger, in Betracht gezogen worden ist. (Anm. während des Drucks.)

Über stabile und instabile Bewegungen in unserem Planetensystem.

Von **Martin Brendel** in Greifswald.

Herr Poincaré hat in seinen „Nouvelles Méthodes de la Mécanique Céleste" den gegenwärtigen Standpunkt des Drei-Körper-Problems klargelegt und vor allem gezeigt, inwieweit die zu seiner Lösung angewandten analytischen Hülfsmittel berechtigt sind. Es hat sich erwiesen, dafs die Frage, ob es in unserem Planetensystem stabile Bewegungen giebt, zum Teil ganz andere Schwierigkeiten bietet, als man annahm. Namentlich zeigt Herr Poincaré, dafs die von den Astronomen angewandten Reihen nicht unbedingt convergiren, dafs sie aber die Lösungen genähert darstellen; er giebt eine Theorie solcher „asymptotischen Reihen".

Der Vortragende macht kurze Mitteilungen über ein Integrationsverfahren, das aus den Gyldén'schen Methoden entstanden ist und auch nur eine genäherte Lösung in Form von unbedingt convergenten Reihen giebt. Weitere Untersuchungen müssen zeigen, wie weit genähert diese Lösung ist, Untersuchungen, die im grofsen und ganzen mit denen über die asymptotischen Reihen zusammenfallen.

Das genannte Verfahren beseitigt vollständig die Schwierigkeiten, die die sogenannten kleinen Integrationsdivisoren der älteren Störungstheorien in den Fällen bieten, in denen die mittleren Bewegungen des gestörten und des störenden Körpers sehr nahe in einem commensurablen Verhältnis stehen; auch führt es zu einer begründeten Erklärung der Lücken, die sich im System der kleinen Planeten zeigen, da die aus den Beobachtungen bestimmten mittleren Bewegungen gewisse Werte, die sich um die Commensurabilitäten gruppiren, garnicht annehmen können.

Es zeigt sich, dafs diese Commensurabilitätsfälle sich mit wesentlich denselben analytischen Hülfsmitteln lösen lassen wie die gewöhnlichen Fälle, und dafs der Wert der Integrationsconstanten, die der mittleren Bewegung entspricht, keinen Einflufs auf die Stabilität oder Instabilität des Planeten hat: Ist eine gewisse Lösung stabil, so sind die in Bezug auf die mittlere Bewegung benachbarten Lösungen ebenfalls stabil.

Geometrischer Beweis des Dupin'schen Theorems und seiner Umkehrung.

Von **A. Sommerfeld** in Clausthal.

Die Beweismethode, deren ich mich im Folgenden bediene, stellt eine Verallgemeinerung der kinematischen Methoden von Herrn Darboux dar. Darboux läfst bekanntlich an den zu untersuchen-

den Curven oder Flächen ein starres rechtwinkliges Dreikant entlang gleiten und liest geometrische Eigenschaften aus den kinematischen Eigenschaften dieser Bewegung ab. Dabei kommt der Fundamentalsatz der Kinematik starrer Systeme zur Geltung: dafs jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers sich durch Combination einer Parallelverschiebung und einer Drehung ersetzen läfst.

Ich verallgemeinere diese Methode insofern, als ich die Kinematik nichtstarrer Körper in Betracht ziehe. Der entsprechende Fundamentalsatz lautet hier: Jede unendlich kleine Bewegung eines beliebigen Mediums lässt sich für einen hinreichend kleinen Bereich desselben ersetzen durch Combination einer Parallelverschiebung, einer Drehung und einer Deformation nach drei zu einander senkrechten Axen.

Die drei Scharen orthogonaler Flächen, von denen der Dupin'sche Satz spricht, unterscheiden wir als Flächen 1, 2, 3 und betrachten die Durchdringungscurven C von 1 und 2, welche eine „Curvencongruenz" definiren. Die Richtung der durch den Punkt x, y, z hindurchlaufenden Curve der Congruenz legen wir durch 3 Functionen u, v, w fest, welche sich wie die Richtungscosinusse der Curventangente gegen die Coordinatenaxen verhalten. Dieses Functionentripel (u, v, w) definirt für jeden Punkt des Raumes einen Vector. Wir fassen ihn als Geschwindigkeitsvector einer Flüssigkeitsströmung auf. Der aus diesem abgeleitete Vector

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

der sog. „Curl" des ersteren, giebt die mit der Strömung (u, v, w) verbundene Drehgeschwindigkeit nach Gröfse und Axe an. Allgemein berechnet man für einen beliebigen Punkt P die Componente des Curls in einer beliebigen Richtung, indem man senkrecht zu dieser Richtung durch P eine Ebene hindurchlegt und das Linienintegral

$$\int u dx + v dy + w dz$$

über eine den Punkt P umschliefsende Curve in der genannten Ebene erstreckt. Die fragliche Componente des Curls ist dann gleich dem Grenzwerte, welchem das Verhältnis des Linienintegrals zu dem Inhalte der geschlossenen Curve zustrebt, wenn man letztere auf den Punkt P zusammenzieht.

Wir beweisen zunächst folgenden

Hülfssatz: Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine Curvencongruenz $(u : v : w)$ flächennormal ist, d. h. ein System von Orthogonalflächen besitzt, besteht darin, dafs der Vector (u, v, w) auf dem zugehörigen Curl senkrecht steht.

1. Wir zeigen erstens: Wenn die Curvencongruenz flächennormal ist, so steht der Curl auf dem Vector senkrecht. Zum Beweise um-

geben wir den beliebigen Punkt P mit einer geschlossenen Curve, welche auf der durch P verlaufenden Orthogonalfläche liege. Da die Curve auf dem Vector (u, v, w) überall senkrecht steht, so verschwindet das Linienintegral dieses Vectors. Die Componente des Curls in Richtung des Vectors ist also gleich Null, d. h. der Curl steht auf dem Vector senkrecht.

2. Wir zeigen zweitens: Wenn der Curl auf dem Vector überall senkrecht steht, so giebt es eine zu der Curvencongruenz orthogonale Flächenschar. Zu dem Ende greifen wir irgend eine Fläche F heraus, welche von Curven der Congruenz gebildet wird, und construiren in ihr die orthogonalen Trajectorien C' zu den Curven C. Durch die Punkte von C' legen wir solche Curven C'' hindurch, welche überall in Richtung des Curls verlaufen. Alle diejenigen Curven C'', welche ein und dieselbe Curve C' treffen, fassen wir zu einer Fläche Φ zusammen. Wir erhalten so ein System von Flächen Φ und zeigen, dafs, zwischen irgend zwei Punkten A und B derselben Fläche Φ erstreckt, das Linienintegral

$$\int u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

verschwindet.

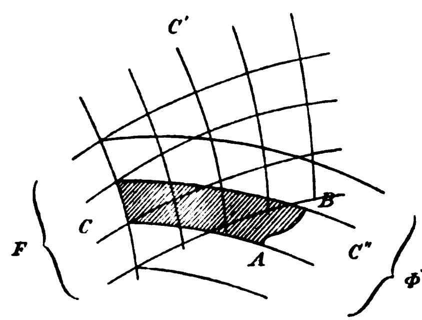


Fig. 1.

Wir wenden zu dem Ende den **Stokes'schen Satz** auf das Curvenviereck an, welches (vergl. Fig. 1) gebildet wird von der (beliebigen) Verbindungslinie der Punkte A und B, von den durch A und B verlaufenden Curven C''_A und C''_B und von dem Stück der Curve C', welches zwischen den Schnittpunkten von C''_A und C''_B mit der Fläche F enthalten ist. Da die Richtung des Curls überall in die Fläche Φ fällt, so ist die Normalcomponente des Curls längs Φ gleich Null. Aus dem **Stokes'schen** Satze folgt alsdann, dafs das Linienintegral des Vectors u, v, w, über die gesamte Begrenzung unseres Vierecks erstreckt, verschwindet. Nun verschwinden aber diejenigen Teile des Linienintegrals, welche sich auf die Curven C' und C'' beziehen, einzeln, weil diese Curven senkrecht stehen auf der Richtung des Vectors. Also verschwindet auch das von A nach B geführte Linienintegral.

Hieraus folgt, wenn man noch A und B zusammenrücken läfst, dafs längs jeder Fläche Φ für jede beliebige Tangentenrichtung der Fläche

$$u\,dx + v\,dy + w\,dz = 0$$

ist. Die Flächen Φ bilden also ein zu der Curvencongruenz orthogonales System.

Unser Hülfssatz ist damit bewiesen. In analytischer Fassung ist er wohlbekannt. Er besagt nämlich, dafs die notwendige und hinreichende Bedingung für die Integrabilität des Differentialausdrucks

$$(1) \qquad u\,dx + v\,dy + w\,dz$$

durch die Gleichung geliefert wird:

$$(2) \qquad u\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) + v\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right) + w\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0\,.$$

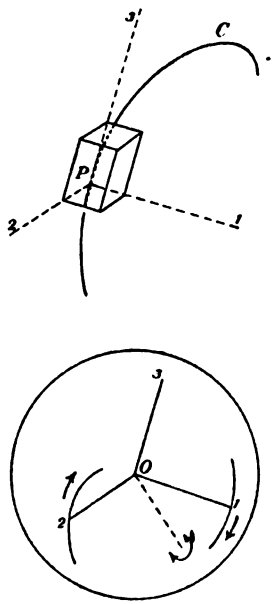


Fig. 2.

In der That bedeutet diese „Integrabilitätsbedingung“ geometrisch nichts anderes als die senkrechte Lage von Curl und Vector.

Indem wir uns jetzt zum Beweise des Dupin'schen Theorems wenden, wollen wir zunächst die Gröfse der u, v, w, welche bisher nur ihren Verhältnissen nach festgelegt sind, dadurch normiren, dafs wir bestimmen: unsere Strömung soll jede Fläche des Systemes 3 in eine ebensolche überführen.

Schneiden wir uns nun aus der Flüssigkeit ein rechtwinkliges Volumelement heraus, welches nach den Normalen der drei Orthogonalflächen orientirt ist. Bei der Strömung u, v, w wird dieses Volumelement mit einem seiner Punkte (P) längs der Curve C entlang geschoben. Die drei in P zusammenlaufenden Kanten desselben, welche zu den Flächen 1, 2, 3 normal sind und dementsprechend beziehungsweise mit 1, 2, 3 bezeichnet werden mögen, bleiben bei der Bewegung zu einander rechtwinklig.

Wir ziehen nun unsern kinematischen Fundamentalsatz heran. Das rechtwinklige Axensystem, nach welchem die Deformation zu erfolgen hat, und welches bei der Bewegung rechtwinklig bleibt, ist in unserem Falle ohne weiteres bekannt; es ist unser Dreikant 1, 2, 3. Wir ordnen diesem naturgemäfs ein zweites Dreikant zu, welches, dem ersten parallel, sich um einen festen Punkt O, den Mittelpunkt der Gaufsischen Einheitskugel, dreht. Seine Durchstofsungspunkte mit der Einheitskugel werden der Reihe nach abermals mit 1, 2, 3 bezeichnet. Die Frage ist: Wie bewegt sich dieses Dreikant bei der Strömung u, v, w?

Offenbar liefern von den 3 Bestandteilen, in welche die Strömung zerlegt werden kann, weder die Parallelverschiebung noch die Deformation zu den Bewegungen dieses Dreikants irgend einen Beitrag. Es kommt also nur auf den dritten Bestandteil, die Drehung, an. Nun steht aber nach unserem Hülfssatz die (in der Figur punktirte) Drehungsaxe auf $O3$ senkrecht. Daraus folgt (vergl. die Figur), dafs die Punkte 1, 2 auf der Kugeloberfläche beständig parallel zu $O3$ fortschreiten müssen. Die Punkte 1 und 2 sind aber gleichzeitig die Bildpunkte von P bei Abbildung der Flächen 1 und 2 durch parallele Normalen. Diese Bildpunkte bewegen sich also, wenn P die Curve C beschreibt, beständig in der Tangentenrichtung von C. Da nun Krümmungslinien solche Curven sind, welche ihrem sphärischen Bilde parallel laufen, so sehen wir: Die Schnittcurven C der Orthogonalflächen 1 und 2 sind Krümmungslinien derjenigen beiden Flächen, welche sich in ihnen durchdringen. Dies ist die Behauptung des Dupin'schen Theorems.

Bisher wurde nur benutzt, dafs die Orthogonalität von Curl und Vector eine notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines zur Curvencongruenz C rechtwinkligen Flächensystems ist. Berücksichtigen wir, dafs diese Bedingung nach unserem Hülfssatz auch hinreichend ist, so ergiebt sich folgende Umkehr des Dupin'schen Theorems, welche von Darboux*) herrührt:

Wenn bei einem zweifach orthogonalen System die Durchdringungscurven C Krümmungslinien in Bezug auf eine der beiden Flächenscharen sind, so existirt ein zu beiden Systemen orthogonales drittes Flächensystem.

Betrachten wir wieder eine Strömung u, v, w, deren Strömungslinien die Curven C sind. Wir haben zunächst die Gröfse der Strömung passend zu normiren. Zu dem Zwecke greifen wir eine Curve c der Congruenz heraus. In den durch sie verlaufenden beiden Flächen 1 und 2 markiren wir die Curven C und construiren ihre orthogonalen Trajectorien C'. Dasselbe thun wir mit allen Flächen des Systems 1. Darauf bestimmen wir ein Flächensystem 3 durch folgende Festsetzung: Je eine Fläche von 3 soll von allen Curven C' gebildet werden, welche in den Flächen des Systems 1 verlaufen und eine und dieselbe Curve C' auf der Fläche 2 schneiden. Dafs dieses System 3 zu der Curvencongruenz C orthogonal ist, können wir natürlich zunächst nicht behaupten; wohl aber folgt aus unserer Construction, dafs die Flächen 3 speciell die Curve c rechtwinklig schneiden. Die Normirung der Geschwindigkeit (u, v, w) soll nun so getroffen werden, dafs bei der Strömung jede Fläche des Systems 3 in eine ebensolche übergeführt wird.

Darauf betrachten wir ein Volumelement, dessen Kanten in

*) Vgl. Annales de l'École Normale 1866, pag. 180.

einem Punkte P von c zu den Flächen 1, 2, 3 orthogonal sind. Bei der Strömung wird der Punkt P längs c entlang geschoben, wobei das Dreikant 1, 2, 3 ein rechtwinkliges bleibt. Wir gehen wieder zum parallelen Dreikant über, welches sich um den Mittelpunkt der Gaufsischen Einheitskugel dreht. Der Durchstofsungspunkt 1 desselben mit der Kugel muss, da nach Voraussetzung c eine Krümmungslinie etwa von 1 ist, parallel zu der Tangentenrichtung von c, d. h. parallel zu $O3$ fortschreiten. Alsdann liegt aber die Axe, um welche sich das Dreikant O (1, 2, 3) instantan dreht, notwendig senkrecht zu $O3$ (vgl. Fig. 2). Mit anderen Worten: Der Curl steht bei unserer Strömung längs der Curve c auf dem Geschwindigkeitsvector senkrecht.

Nun ist klar, dafs, was von der Curve c gezeigt ist, bei anderer Normirung von jeder beliebigen Curve C gilt. Mithin mufs der Curl überall auf dem Vector senkrecht stehen. Bei Berücksichtigung unseres Hülfssatzes folgt hieraus die Umkehr des Dupin'schen Theorems.

Zum Schlufs bemerke ich, dafs zwischen den Integrabilitätsbedingungen des allgemeinen n-gliedrigen Differentialausdrucks

$$u_1 dx_1 + u_2 dx_2 + \cdots + u_n dx_n$$

und der Kinematik deformirbarer Medien im R_n ein Zusammenhang besteht, welcher sich dahin aussprechen läfst:

Die Integrabilitätsbedingungen des genannten Differentialausdrucks bedeuten geometrisch, dafs die mit der Strömung $u_1, u_2, \ldots u_n$ verbundene Drehung einen linearen R_{n-2}, den man als Axe des zugehörigen Curls bezeichnen kann, punktweise ungeändert läfst, und dafs dieser R_{n-2} auf dem Vector $u_1, \ldots u_n$ senkrecht steht.

Über die angenäherte Geradführung mit Hülfe eines ebenen Gelenkvierecks.

Von Reinhold Müller in Braunschweig.

Ein Gelenkviereck bewirkt eine angenäherte n-punktige Geradführung, wenn ein bestimmter Punkt der Koppelebene eine Bahncurve beschreibt, die von einer gewissen geraden Linie zwischen n aufeinanderfolgenden Schnittpunkten nur verschwindend wenig abweicht; dabei ist n höchstens $= 6$. Liegen die n Schnittpunkte einander unendlich nahe, so wird die Geradführung als eine n-punktig genaue bezeichnet.

Construirt man in der Koppelebene alle Kreise, die im Verlaufe der Bewegung zu Wendekreisen werden, so umhüllen diese einerseits

die Polcurve, andererseits den Ort u derjenigen Systempunkte, deren Bahncurven einen Undulationspunkt besitzen. Dann erstreckt sich auf der einen Seite von u ein schmales Gebiet von Systempunkten, von denen jeder zwei benachbarten Wendekreisen angehört. Jeder dieser Punkte beschreibt also eine Bahncurve mit zwei dicht aufeinanderfolgenden Inflexionen, die zu einer angenäherten vierpunktigen Geradführung verschmelzen, wenn man den Systempunkt hinreichend nahe an u annimmt.

Die Curve u hat im allgemeinen eine feste Anzahl von Spitzen, in denen sich jedesmal drei unendlich benachbarte Wendekreise schneiden. Die Systempunkte, die innerhalb u in der Nähe einer solchen Spitze liegen, liefern eine angenäherte fünfpunktige Geradführung, während die Bahncurve der Spitze selbst eine fünfpunktig genaue Geradführung darstellt.

Wird endlich das Gelenkviereck so gewählt, dafs ein bestimmter Punkt der Koppelebene eine Bahnstelle mit sechspunktig berührender Tangente durchschreitet, so hat die Curve u in diesem Punkte eine Singularität, die aus der Vereinigung von zwei Spitzen entstanden ist. Um von hier aus zu einer angenäherten sechspunktigen Geradführung zu gelangen, mufs man zunächst die eine Seite des Vierecks in geeigneter Weise ein wenig verändern, wodurch jene Singularität in zwei benachbarte Spitzen aufgelöst wird. Dann gehen durch jeden Systempunkt, der sich innerhalb der neuen Curve u in unmittelbarer Nähe der beiden Spitzen befindet, vier verschiedene Wendekreise; die zugehörige Bahncurve besitzt also, wie erforderlich, vier dicht aufeinanderfolgende Inflexionen.

Nun ist die Aufgabe der fünf- und sechspunktig genauen Geradführung bereits an andrer Stelle vom Vortragenden in allgemeinster Weise gelöst worden.*) Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich demnach ein bequemes Mittel, um auch die entsprechenden angenäherten Geradführungen zu finden. Wie an zahlreichen Figuren erläutert wird, liefert die so erhaltene angenäherte n-punktige Geradführung scheinbar längere Anschlufsstrecken als die n-punktig genaue, aus der sie hervorgegangen ist; sie verdient also vor dieser vom praktischen Standpunkte aus den Vorzug.

(Ein ausführlicher Bericht über den gehaltenen Vortrag mit Figuren erscheint im 43. Jahrgange der Zeitschrift für Mathematik und Physik.)

*) Vergl. den Aufsatz „Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks" in der „Festschrift der herzogl. technischen Hochschule Carolo-Wilhelmina zur LXIX. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte".

Über einige meiner weniger bekannten Abhandlungen über Gastheorie und deren Verhältnis zu derselben.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

§ 1. Ich habe unlängst darauf hingewiesen*), dafs wir keineswegs die Dinge selbst denken, sondern uns Vorstellungsbilder construiren, durch welche wir den Zusammenhang unserer Erfahrung darstellen. Wenn wir nun die Phänomene durch partielle Differentialgleichungen darstellen, so bilden wir uns zunächst immer die Vorstellung einer sehr grofsen endlichen Zahl von — sagen wir Einzeldingen, die eine Mannigfaltigkeit von meist drei Dimensionen bilden, und deren zeitliche Veränderungen nach bestimmten Gesetzen von den Zuständen der benachbarten abhängen.

Wenn ich sage, ich habe darauf hingewiesen, so soll das nicht etwa heifsen, dafs ich es entdeckt habe. Die Mathematiker wissen das, wie ich glaube, seit je. Ich hielt nur für notwendig, es den Physikern wieder ins Gedächtnis zu rufen. Unter diesen ist es jetzt sehr verbreitet, mit dem Hinschreiben von Differentialgleichungen zu beginnen und diese dann als das vollkommenste Bild der Phänomene zu betrachten. Man nennt diese Methode, da sie die Phänomene ohne jede Rücksicht auf die ihnen zu Grunde liegenden Ursachen zu beschreiben strebt, die Phänomenologie. Ihr Wesen besteht nach einem von Maxwell und Hertz unabhängig von einander angewandten Gleichnisse darin, dafs man sich begnügt, die nackten Thatsachen durch Formeln wiederzugeben, ohne ihnen das bunte Mäntelchen von Hypothesen umzuhängen.

Es liegt mir fern, gegen die Berechtigung der Vorliebe dieser beiden grofsen Forscher für das Nackte etwas einwenden zu wollen. Die Darstellung des rein Thatsächlichen mit möglichst wenig willkürlichem Beisatze ist zu allen Zeiten wünschenswert und wichtig. Nur darf man nicht meinen, die Vorstellung des Continuums sei eine einfachere, weniger über die Thatsachen hinausgehende als die Atomistik im allgemeinen, von speciellen, allzu verkünstelten atomistischen Bildern natürlich nicht zu reden. Im Gegenteil, die Definition der Differentialgleichung geht zunächst ebenfalls von der Forderung der Vorstellung einer endlichen Zahl von Einzelwesen aus und fügt nur noch nachher die neue Behauptung bei, dafs nur die Limite für stets wachsende Zahl der Einzelwesen die Erscheinungen am besten darstellt.

Um möglichste Freiheit von Hypothesen zu erzielen, mufs die Phänomenologie den Einzelwesen höchst complicirte, mancher würde

*) Wien. Sitzungsber. IIa, Bd. 105, S. 907, Nov. 1896. — Wied. Ann. Bd. 60, S. 231, 1897; Bd. 61, S. 790, 1897.

sagen paradoxe, Eigenschaften beilegen (dafs sie Vectoren sind, entstehen und verschwinden können etc.) und mufs für jedes Erscheinungsgebiet wieder ganz andere, gerade diesem Erscheinungsgebiete angepafste Eigenschaften wählen, weshalb sie von den Einzelwesen lieber schweigt und gleich die Differentialgleichungen hinschreibt. Durch Totschweigen dürfte aber der Mangel nicht verbessert werden. Diese Nachteile sind eben durch die Vorteile, welche sie erreichen will, bedingt.

Deshalb erscheint mir nicht statt, aber neben der Phänomenologie eine Theorie von Interesse und Wichtigkeit, welche in aufrichtigster Weise von möglichst einfach und klar construirten Einzelwesen ausgeht, aus einer einzigen Gattung von Einzelwesen oder aus einer geringen Zahl lediglich quantitativ verschiedener Einzelwesen die Differentialgleichungen für eine Reihe von Erscheinungsgebieten rein logisch herausconstruirt und unentschieden läfst, ob die Annahme einer grofsen endlichen Zahl von Einzelwesen oder erst die Limite, der die Erscheinungen bei unendlich wachsender Zahl derselben zueilen, die Erscheinungen am besten darstellt.

Eine solche Theorie ist die Gastheorie.

Ihre Grundannahme kann ich als bekannt voraussetzen und bemerke nur, dafs man sich die Molecüle als kleine elastische Kugeln oder als Abstofsungscentra oder mit complicirteren, noch unbekannten Eigenschaften begabt denken kann. Ihr Grundcharakter bleibt derselbe; die Durchführung der Rechnung im Detail und die Veranschaulichung wird natürlich um so schwieriger, je allgemeinere Annahmen man macht. Auch die Erklärung des Gasdruckes, des Boyle'schen Gesetzes und die einstigen Controversen darüber, die aber schon längst abgeschlossen sind, fallen aufserhalb des Rahmens des hier Vorzubringenden.

§ 2. Ich beginne sogleich mit den inneren Vorgängen in einem Gase oder Gasgemisch.

Die einfachsten Vorgänge der Reibung, Diffusion und Wärmeleitung wurden zuerst von Clausius und Maxwell unter der Hypothese, dafs die Molecüle verschwindend wenig deformirbare elastische Kugeln sind, in höchst genialer Weise entwickelt. Ersterer wies speciell für die Wärmeleitung nach, dafs der letztere an manchen Stellen Glieder von derselben Gröfsenordnung, wie die ausschlaggebenden, vernachlässigte, berücksichtigte in mühsamen Rechnungen diese Glieder dort, wo es anging, und beseitigte so den Defect der Maxwell'schen Formel für die Wärmeleitung, dafs dieselbe, verbunden mit dieser, auch einen Massentransport liefert. Dafür liefert Clausius' Formel so grofse Druckdifferenzen im wärmeleitenden Gase, dafs man sie längst bemerkt haben müfste. Wer später die Wärmeleitung aus der Gastheorie berechnete, berücksichtigte oder vernachlässigte nach Geschmack bald da, bald dort Glieder, sodafs

fast immer dieselbe Formel — aber jedesmal wieder mit anderen numerischen Coefficienten — herauskam. Die zehn verschiedenen so für das Wärmeleitungsvermögen erhaltenen Coefficienten, die ich einmal gesammelt habe*), sind wahrscheinlich noch die Minderzahl aller erhaltenen. Um diese Rechnungsmethode schlagend zu charakterisiren, lasse ich hier eine Stelle aus einer Abhandlung Hofrat von Lang's**) folgen. Nachdem dieser bemerkt, dafs ein anderer Factor den neuesten Beobachtungen über Wärmeleitung besser entspreche, als ein von ihm früher durch Rechnung gefundener, sagt er wörtlich: „Es ist aber leicht, die von mir gegebene Ableitung so zu transformiren, dafs dieser Factor herauskommt, und ich glaube, dafs durch diese Änderung mein Verfahren nur noch logischer wird."

Ähnlich wurde die Diffusion und innere Reibung behandelt, doch war da die Anzahl der erhaltenen Coefficienten nicht so grofs.

Man hatte dabei das sogenannte Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung, überhaupt den Umstand, dafs unter den Molecülen die verschiedensten Geschwindigkeiten vorkommen, nicht berücksichtigt. Was man unter dem Geschwindigkeitsverteilungsgesetze versteht, kann ich wohl als bekannt voraussetzen; übrigens werde ich darauf noch zurückkommen. Es war nun eine meiner Erstlingsarbeiten, die mir nahe lag, da ich ja dies Geschwindigkeitsverteilungsgesetz zum Gegenstande meines speciellen Studiums gemacht hatte, die eben besprochenen Rechnungen Maxwell's, Clausius' und ihrer Nachfolger durch Berücksichtigung dieses Gesetzes zu ergänzen. Ich veränderte auch in einem Punkte die Methode. Statt nämlich planlos bald hier, bald dort Glieder von der passenden Gröfsenordnung zu suchen, formte ich dieselben nach einem möglichst einfachen Schema. Ich erhielt so Formeln für den Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungscoefficienten, von denen ich mir eine Zeitlang einbildete, sie seien exact. Dieselben enthielten drei bestimmte Integrale, die ich mühevoll durch mechanische Quadraturen auf sieben Decimalen genau auswertete.

Aber vor ihrer Publication entdeckte ich, dafs in diesen meinen neuen Formeln auch wieder Glieder von der Ordnung des ausschlaggebenden vernachlässigt waren. Aus Ärger liefs ich alles unpublicirt liegen. Glücklicherweise nahm ich dann die Schlufsformel und den Wert eines der bestimmten Integrale in eine im Jahre 1881 publicirte Abhandlung auf.***) Es kam nämlich noch später Tait auf dieselbe Idee und publicirte identisch dieselben Formeln und be-

*) Wien. Sitzungsber. II, Bd. 81, S. 122, 1880.
**) Wien. Sitzungsber. II, Bd. 65, S. 415, 1872.
***) Wien. Sitzungsber. II, Bd. 84, S. 45, Juni 1881.

stimmten Integrale, nur letztere mit vier Decimalen weniger, ohne mich zu erwähnen.*)

Daſs er meine frühere Publication übersah, darin liegt gewiſs gar nichts besonderes. Das kann bei der gegenwärtigen Ausbreitung der Litteratur einem jeden jeden Tag passiren; aber daſs er gerade gegen diese meine Abhandlungen polemisirte und schlieſslich als höchste Errungenschaft eine Formel herausbrachte, die in einer dieser selben Abhandlungen gleich zu Anfang unter Nachweis ihrer Unvollständigkeit angeführt wurde, habe ich dann doch in einer neuen Publication höflich, aber mit Nachdruck ins rechte Licht gesetzt.**) Jetzt kommt aber noch das beste. Dieselbe Formel, meine alte Jugenderinnerung, wird in dem 1890 posthum erschienenen 3. Bande von Clausius' Wärmetheorie, Seite 99 und 100, wieder unter ausschlieſslicher Nennung Tait's angeführt. Keine meiner jetzt schon ziemlich zahlreichen Abhandlungen über diesen Gegenstand wird dabei erwähnt. Und ich hatte Tait aus seiner Unkenntnis der deutschen Litteratur einen Vorwurf gemacht.

§ 3. Die Bedeutung der früher erwähnten Vernachlässigung ausschlaggebender Glieder will ich nur oberflächlich am Beispiele der Diffusion erläutern. Am Boden eines cylindrischen Gefäſses soll reiner Sauerstoff, an der Decke reiner Stickstoff, dazwischen aber alle möglichen Mischungen dieser Gase sein. In jeder Schicht soll anfangs dieselbe Geschwindigkeitsverteilung herrschen, die herrschen würde, wenn das ganze Gefäſs mit einem Gase von gleichem Mischungsverhältnisse erfüllt wäre. Dann würde im ersten Moment eine Diffusion eintreten, welche der von mir und nachher von Tait abgeleiteten Formel entspricht. Durch diese Diffusion wird aber der anfangs vorausgesetzte Zustand sofort gestört. Es stoſsen nämlich die schnelleren Molecüle öfter an andere und machen daher kürzere Wege als die langsameren. Dadurch wird die Geschwindigkeitsverteilung gestört, und diese Störung bedingt neue Glieder in dem Ausdrucke für die Menge des diffundirenden Gases, die von derselben Gröſsenordnung wie die durch die besprochene Formel gegebenen sind.

Ich versuchte die Berücksichtigung dieser neuen Glieder und gelangte dadurch zu einer Reihenentwickelung, auf Grund deren jedoch wegen ihrer Weitläufigkeit und der fehlenden Gewiſsheit der Convergenz die Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsconstante wohl kaum je numerisch berechnet werden wird.

§ 4. Maxwell schlug einen anderen Weg ein. Wenn man annehmen würde, daſs der Durchmesser eines Molecüls um so kleiner

*) Trans. of t. Roy. soc. of Edinb., Bd. 33, part. XII, S. 260, 1887. — Phil. Mag. (5) Bd. 23, S. 143.

**) Wien. Sitzungsber. II, Bd. 96, S. 894, Okt. 1887.

ist, je rascher es sich bewegt, so würden die rascheren Molecüle wegen ihrer gröſseren Geschwindigkeit öfter, wegen des kleineren Durchmessers aber wieder weniger oft zusammenstoſsen, und es wäre ein solches Verhältnis zu suchen, daſs sich beide Ursachen gerade compensiren.

Maxwell fand, daſs diese Compensation eintritt, wenn die Molecüle materielle Punkte sind, die sich mit einer der fünften Potenz der Entfernung verkehrt proportionalen Kraft abstoſsen. Dann nähern sich zwei Molecüle bei einem Zusammentreffen um so mehr, je gröſser ihre relative Geschwindigkeit ist. Der Effect ist also derselbe, als ob die schnelleren Molecüle kleinere Durchmesser hätten als die langsameren. Unter der Maxwell'schen Annahme läſst sich nicht nur die Reibungs-, Diffusions- und Wärmeleitungsconstante berechnen, sondern es ergeben sich die completen hydrodynamischen Differentialgleichungen samt den Gesetzen der Diffusion und Wärmeleitung. Das Schöne dabei ist folgendes: man braucht jedes dieser Phänomene nicht etwa besonders in die Gleichungen hineinzulegen, sondern diese wissen alles schon vorher, daſs in erster Annäherung die älteren hydrodynamischen Gleichungen ohne Reibung gelten, wann und nach welchen Gesetzen Reibung eintreten muſs, daſs diese Wärme erzeugen muſs, und wie die letztere wieder modificirend auf die Bewegung wirkt. Nach dieser Theorie aber sind alle unsere bisherigen Formeln bloſs angenähert richtig. Im wärmeleitenden Gase z. B. müſste der Druck nicht an allen Stellen und nach allen Richtungen vollkommen gleich sein. Der Druckunterschied ergiebt sich aber jetzt so klein, daſs das Resultat nicht den bisherigen Beobachtungen widerspricht, sondern zu neuen reizt. Die Resultate der in Rede stehenden Maxwell'schen Theorie werden sich sicher nicht numerisch exact bestätigen, da ja die zur Erleichterung der Rechnung den Molecülen beigelegten Eigenschaften nur ein ganz rohes, provisorisches Bild sind; aber einige Aussicht, daſs sie sich im groſsen und ganzen bestätigen, ist sicher vorhanden.

Ich bemerke noch, daſs Maxwell in einigen Zusätzen, die er in seinen letzten Lebensmonaten einer Abhandlung*) beigefügt hat, zeigt, daſs sich für jede Kugelfunction der Geschwindigkeitscomponenten eines Molecüls die Veränderung durch die Zusammenstöſse besonders leicht berechnen läſst. Entwickelt man die Functionen, deren Veränderung zu berechnen ist, in eine Reihe von Kugelfunctionen, so lassen sich die Rechnungen bis zu einem früher nicht gehofften Grade von Annäherung treiben. Maxwell teilt bloſs in wenigen Zeilen die von ihm erhaltenen Resultate mit. Ich führte die Rechnungen nach seiner Methode durch. Da meine Resultate nicht in allen Punkten mit denen Maxwell's stimmen, hätte ich,

*) Cambr. phil. trans. 1879, part. 1, S. 231.

als ich in England war, gern Maxwell's Originalmanuscript gesehen, das einmal vorhanden gewesen sein mufs, aber nicht mehr gefunden wurde.

§ 5. Nun noch einige Worte über das Geschwindigkeitsverteilungsgesetz. Man sieht sofort ein, dafs selbst, wenn alle Molecüle anfangs dieselbe Geschwindigkeit gehabt hätten, in kurzer Zeit alle möglichen Geschwindigkeiten von Null bis zu einer Geschwindigkeit, die weit gröfser ist, als die mittlere, vertreten sein werden. Die Rechnung lehrt nun, dafs bei gegebener lebendiger Kraft des ganzen Gases weitaus die gröfste Mehrzahl der Zustände desselben die Eigenschaft hat, dafs die Häufigkeit der verschiedenen Gröfsen der Geschwindigkeit V dasselbe Gesetz befolgt wie die Häufigkeit der verschiedenen Gröfsen der Beobachtungsfehler (Maxwell's Zustand), dafs diese Häufigkeit also proportional

$$e^{-hl} \tag{1}$$

ist, wo $l = v^2$, h eine Constante ist. Wenn also auch natürlich unendlich viele Zustände des Gases möglich sind, wo die Verteilung der Geschwindigkeit eine andere ist, so sind diese doch unendlich wenige gegenüber den dem Maxwell'schen Zustande sehr nahen, und wenn sich das Gas auch anfangs in einem solchen seltenen Zustande befunden hätte und auch nach Äonen wieder einen solchen annimmt, so wird sein Zustand doch jedesmal sehr bald einem Maxwell'schen sehr nahe kommen und in jeder beobachtbaren Zeit sehr nahe bleiben.

Für ein Gemisch zweier einfachen Gase fand Maxwell, dafs in Formel (1) blofs an Stelle von l für jedes Gas die lebendige Kraft eines Molecüls tritt und h für zwei gemischte Gase denselben Wert haben mufs. Daraus folgt die Gleichheit der mittleren lebendigen Kraft eines Molecüls für beide Gase, und damit das Avogadro'sche Gesetz. Ebenso fand Maxwell, dafs, wenn die Molecüle starre Körper sind, die Wahrscheinlichkeit, dafs die Lage der augenblicklichen Drehungsaxe und die Winkelgeschwindigkeit der Rotation zwischen gewissen, unendlich nahen Grenzen liegen, wieder durch Formel (1) gegeben ist, wo aber jetzt l die ganze lebendige Kraft bedeutet. Daraus folgte für das Verhältnis der Wärmecapacitäten ein nicht mit der Erfahrung stimmender Wert, woraus Maxwell schlofs, dafs die Molecüle nicht als starre Körper betrachtet werden dürfen. Ich erweiterte den Satz und zeigte, dafs bei Molecülen, die beliebig aus materiellen Punkten (Atomen), zwischen denen Centralkräfte thätig sind, bestehen, und auf welche beliebige äufsere Kräfte wirken, noch immer eine der Formel (1) analoge besteht, worin aber jetzt l die Summe der gesamten lebendigen Kraft und Kraftfunction ist. Es ist wieder die mittlere lebendige Kraft jedes Atoms gleich, das Verhältnis der Wärmecapacitäten

stimmte aber wieder nicht mit der Erfahrung. Maxwell erweiterte den Satz noch mehr, indem er ihn auf Molecüle übertrug, deren Zustand durch beliebige generalisirte Coordinaten bestimmt ist. Routh wies einen Fehler in den betreffenden Rechnungen Maxwell's nach, ich zeigte jedoch, dafs Maxwell's Resultat richtig ist, und stützte es durch einen verbesserten einwurfsfreien Beweis.

Nun ergab sich, dafs genau das durch die Erfahrung für Luft und die meisten einfachen Gase gefundene Verhältnis der Wärmecapacitäten herauskommt, wenn man annimmt, dafs die Molecüle starre Rotationskörper sind. Maxwell hatte in der früher erwähnten Abhandlung blofs an Nichtrotationskörper gedacht. Hätte er auch Rotationskörper betrachtet, so hätte die ganze Entwickelung der Gastheorie eine andere Wendung genommen. Maxwell hätte schon damals für Gase, deren Molecüle Rotationskörper sind, genau das für die meisten einfachen Gase experimentell gegebene, für Gase, deren Molecüle keine Rotationskörper sind, das für Chlor, Brom und mehrere andere Gase experimentell gefundene Verhältnis der Wärmecapacitäten erhalten, und an Stelle des Schlusses, dafs es zu Widersprüchen mit der Erfahrung führt, die Molecüle in dieser Beziehung als starre Körper zu betrachten, hätte er schon damals sagen müssen, dafs diese Annahme Werte für das Verhältnis der Wärmecapacitäten liefert, die für die einfacheren Gase ausgezeichnet mit der Erfahrung stimmen, wodurch viel Kopfzerbrechen über diesen vermeintlichen Widerspruch zwischen der Gastheorie und Erfahrung den Physikern erspart geblieben wäre.

Den Molecülen der zusammengesetzten Gase freilich mufs man eine complicirtere Structur zuschreiben, und zur Erklärung der Spectra etc. mufs man annehmen, dafs auch die Molecüle der einfachen Gase mannigfacher Zustandsänderungen fähig sind, die aber entweder gar nichts mit der Molecularbewegung zu thun haben (elektrische Schwingungen), oder sich so langsam mit den übrigen Molecularbewegungen ins Wärmegleichgewicht setzen, dafs sie bei Bestimmung der Wärmecapacitäten nach den bisher üblichen Methoden nicht mitreden.

§ 6. Die Formel (1) gilt auch für äufsere Kräfte, daher ist z. B. in einem schweren Gase die auf die Volumeneinheit entfallende Molecülzahl (die Dichte) proportronal e^{-hgz}, wo g die Beschleunigung der Schwere, z die Erhebung über den Erdboden ist (Formel für das barometrische Höhenmessen). Die Formel (1) gilt ferner auch für die chemischen Kräfte, welche die Atome in chemischer Verbindung zusammenhalten.*) Nur mufs man da annehmen, dafs die Atome keineswegs einzelne materielle Punkte und die chemischen

*) Wien. Sitzungsber. IIa, Bd. 105, S. 701, Juli 1896.

Kräfte zwischen denselben wirkende Centralkräfte sind. Man muſs vielmehr den Atomen eine bestimmte Gestalt zuschreiben und annehmen, daſs die chemischen Kräfte nur in einem sehr kleinen Spielraume der möglichen relativen Lagen, dann aber sehr energisch thätig sind. Unter dieser Annahme ergeben sich aus Formel 1) alle Gesetze der Dissociation. In bestimmten Fällen sind z. B. unterhalb einer gewissen Temperatur bis auf verschwindend wenige Ausnahmen je zwei Atome zu einem Molecül vereint. Dann kommt ein Temperaturintervall, wo die Zersetzung genau nach den durch die Erfahrung für sich dissociirende Gase gefundenen Gesetzen vor sich geht, während bei noch höheren Temperaturen (wieder bis auf verschwindend wenige Ausnahmen) alle Atome einzeln herumfliegen.

§ 7. Die Erfahrung lehrt nun, daſs ein System von in Wechselwirkung tretenden Körpern sich „anfangs" immer in einem sehr unwahrscheinlichen Zustande befindet und bald den wahrscheinlichsten (den des Wärmegleichgewichts) annimmt, der nun für alle beobachtbaren Zeiten andauert und nur durch Einwirkung einer fremden Entropiequelle (z. B. der Sonne oder von Körpern, auf welche die Sonne gewirkt hat) wieder in einen unwahrscheinlichen Zustand versetzt werden kann. Das letztere ist nach unserer Theorie begreiflich, aber da wir die Sonne doch als Teil des Weltganzen auffassen müssen, so entsteht die Frage, warum ist das Weltganze in einem so unwahrscheinlichen Zustande und nicht auch in einem wahrscheinlichen, oder gar in einem so exceptionellen Zustande, daſs es von wahrscheinlichen zu unwahrscheinlicheren Zuständen übergeht. Mir schiene es nicht unwissenschaftlich, die Thatsache, daſs die Welt anfangs in einem noch unwahrscheinlicheren Zustande war als gegenwärtig und heute noch immer zu wahrscheinlicheren übergeht, einfach der Theorie als Annahme vorauszustellen, wie die Kant-Laplace'sche Theorie für die ursprüngliche Drehung des Weltnebels keine Ursache angiebt, oder eine Betrachtung der Welt als Ganzes und eines von der Welt unendlich lange getrennten Systems überhaupt abzulehnen. Doch wer dem Reize, sich in Phantasien über das Weltall zu ergehen, nachgeben will, der könnte sich die ganze Welt in Ewigkeit im Wärmegleichgewichte denken. Wenn sie nur groſs genug gedacht wird, so werden immer verhältnismäſsig winzige Partien derselben (Einzelwelten), die aber noch immer so groſs wie unsere Fixsternwelt sein können, in gegen die Dauer der Welt verschwindenden Zeiträumen, die aber für uns Äonen sein können, sich vom wahrscheinlichsten Zustand weit entfernen (Proceſs a), ein Maximum der Zustandsunwahrscheinlichkeit erreichen und dann sich wieder dem wahrscheinlichsten Zustande nähern (Proceſs b). Ein Wesen, das diese Einzelwelt während des Processes a bewohnt, wird ebenso wie ein Wesen, das sie während des Processes b bewohnt, einen dem zweiten Hauptsatze analogen

Satz vorfinden. Beide Wesen werden ihre Zeit von den Momenten grösserer Zustandsunwahrscheinlichkeit gegen die grösserer Zustandswahrscheinlichkeit, also gerade im entgegengesetzten Sinne zählen, was aber niemals entdeckt werden kann, da beide Wesen durch Äonen und von denen anderer Einzelwelten durch Milliarden von Fixsternweiten getrennt sind. Für die Gesamtwelt aber sind beide Zeitrichtungen vollkommen gleichberechtigt. Findet man überhaupt an solchen Phantasien Gefallen, so scheint mir dies der einzige Weg, den zweiten Hauptsatz ohne die abgeschmackte Annahme eines Wärmetodes der Gesamtwelt zu erklären. Dieser wird durch die Auflösung jener Einzelwelten in die im Wärmegleichgewichte befindliche Umgebung ersetzt.

§ 8. Die Gastheorie, sowie überhaupt die Theorie, dass die Wärme auf einer steten Bewegung kleinster Einzelwesen beruht, ist, wie jede Theorie, sicher nur ein Bild der Erscheinungen. Unsere Vorstellungen von den Molecülen sind noch ganz rohe und werden wohl immer unvollkommene bleiben. Doch stimmt diese Theorie in so vielen, so disparaten Einzelheiten mit der Erfahrung, gestattet schon so vieles vorherzusagen (die Schilderung Rich. Meyer's in der 1. allgemeinen Sitzung in Braunschweig, wie Kekulé den Benzolring im Geiste schaute, erinnerte mich neuerdings daran) und ergiebt noch so viele Fingerzeige zu neuen Experimenten und Speculationen, dass ich wohl glaube, dass ihre Grundlinien nie aus der Naturwissenschaft verschwinden werden. Auf Einwände, welche gegen diese Theorie von Poincaré in sehr feiner und scharfsinniger, von Bertrand in minder höflicher und auch minder scharfsinniger Weise gemacht wurden und auch in Deutschland Wiederhall fanden, will ich hier nicht eingehen. Diese Sache bildet noch immer den Gegenstand von Controversen, doch glaube ich auch von den Molecülen beruhigt sagen zu können:

Und dennoch bewegen sie sich!

Kleinigkeiten aus dem Gebiete der Mechanik.

Von **Ludwig Boltzmann** in Wien.

§ 1. Das Gleichgewicht eines conservativen ruhenden Systems ist durch die Bedingung bestimmt, dass die Kraftfunction V, deren positive partielle Ableitungen nach den Coordinaten die auf das System wirkenden Kräfte liefern, ein Grenzwert ist. Helmholtz nennt deshalb die Kraftfunction das statische Potential. Ebenso sind die Bewegungsgleichungen eines bewegten Systems dadurch bestimmt, dass die sogenannte Wirkung

$$w = \int_0^t (V + T)\, dt$$

ein Grenzwert sein soll. Dabei ist T die lebendige Kraft des Systems. Die Zeit t, über welche integrirt wird, und die Anfangs- und Endwerte der Coordinaten sind als invariabel zu betrachten. Deshalb nennt Helmholtz die Gröfse w/t, die offenbar auch ein Grenzwert wird, das mittlere kinetische Potential.

Dieselbe Function V, also das statische Potential, liefert auch für den Fall des Gleichgewichtes das Kriterium der Stabilität. Dieses besteht nämlich darin, dafs der Wert der Kraftfunction oder des statischen Potentials, verglichen mit den allen möglichen Nachbarlagen zukommenden Werten, ein wahres Maximum wird. Die Arbeiten mehrerer Forscher (Appell, mec. rat. II, art. 458, Thomson und Tait I, art. 350, 355, 358—361, Routh, rig. dyn., art. 102, Routh, stability of motion, Lond. 1877, Ad. prize-schrift, Poincaré c. r. 124, S. 713, 1897, Painlévé, c. r. 124 S. 1222, 1340) behandeln analoge Eigenschaften des kinetischen Potentials. So besteht bei der Centralbewegung im Kreise ebenfalls zwischen der Stabilität und der Maximumeigenschaft des kinetischen Potentials oder der Gröfse w eine Beziehung, allerdings von etwas anderer Art. Es ist nämlich für den Fall der Labilität der Bewegung w ein wahres Maximum.

Dieser Satz ist allerdings von dem für das statische Potential geltenden disparat genug, zeigt aber trotzdem eine gewisse Beziehung dazu. Ich fand noch nicht Zeit, zu prüfen, ob er sich auf die von Korteweg ebenfalls untersuchte Bedingung der Labilität der Centralbewegung in einer ellipsenartigen Bahn ausdehnen läfst.

Für die Bewegung eines materiellen Punktes auf einer krummen Fläche ohne Einwirkung sonstiger Kräfte gilt teilweise, aber nicht allgemein, ein ähnlicher Satz. Da dann $V = 0$ ist, so reducirt sich w auf $\int T dt$. Ist daher m die Masse und v die Geschwindigkeit des Beweglichen, so wird $w = \frac{1}{2} m \int v ds$.

Nimmt man v nicht constant, so wird w jedenfalls vergröfsert gegenüber den Werten, die es bei gleicher Bahn und constantem v hat. Beschränkt man daher die Variation durch die Bedingung, dafs v constant sein soll, so kann man keine Variationsart ausschliefsen, durch welche w kleiner wird als bei den betrachteten. Dann wird aber

$$w = \frac{1}{2} m v \int ds = m s^2/2t.$$

Da t als constant zu betrachten ist, so ist w ein Minimum, wenn s ein solches ist.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dafs die unvariirte Bewegung in einer geschlossenen Bahn geschieht, und lassen bei

ihr und daher auch bei der variirten Bewegung immer den Anfangspunkt der Integration mit dem Endpunkte zusammenfallen. Die Bewegung auf dem gröfsten Kreise einer Kugel, sowie die auf derjenigen Ellipse des dreiaxigen Ellipsoides, deren Ebene die gröfste und mittlere oder die mittlere und kleinste Axe enthält, wollen wir stabil nennen, weil bei jeder unendlich kleinen Störung die Bahn immer unendlich nahe der ungestörten bleibt. Diese Begriffsbestimmung ist vollkommen analog der Korteweg'schen Definition der Stabilität der Centralbewegung im Kreise. Doch machte mich Herr Sommerfeld darauf aufmerksam, dafs nicht auch der Ort des Beweglichen unendlich nahe dem Orte ist, an dem sich dasselbe bei der ungestörten Bewegung nach Verlauf derselben Zeit befand. Dies gilt sowohl hier, als auch bei der stabilen Centralbewegung im Kreise. Für alle diese Bewegungen ist sv, daher auch w ein Maximum-Minimum. Die Bewegung auf der Kehlellipse des einschaligen Hyperboloids oder in einer auf der Axe senkrechten Ebene auf einem Cylinder mit elliptischer oder kreisförmiger Basis nennen wir eine primär labile, da bei jeder kleinsten Störung die Bahn sich ununterbrochen von der ungestörten entfernt. Für diese Bahnen ist auch analog dem für die Centralbewegung im Kreise gefundenen Satz s, und daher auch w, ein absolutes Minimum.

Für die Bewegung auf dem dreiaxigen Ellipsoide in der Ellipse, welche die gröfste und kleinste Axe enthält, oder auf dem Rotationsellipsoid in einer Meridianellipse geht bei unendlich kleiner Störung der Bewegung die Bahn im allgemeinen in eine solche über, welche die ursprüngliche zwar schneidet, aber sich doch allmählich um endliches davon entfernt. Wir wollen eine Bewegung, welche diese Eigenschaft zeigt, secundär-labil nennen. In dem eben betrachteten Falle ist w ein Maximum-Minimum. Ich fand auch noch nicht Zeit, zu untersuchen, wie sich w bei Drehung eines Körpers um die Axe seines gröfsten oder mittleren oder kleinsten Trägheitsmomentes verhält.

§ 2. In seinen Rechnungen über zusammengesetzte monocyklische, resp. gefesselte polycyklische Systeme beobachtet Helmholtz Fälle von folgendem Typus. An zwei parallelen Axen sei je ein coaxialer Rotationskörper befestigt. Diese beiden Rotationskörper mögen sich so nach entgegengesetzten Seiten verjüngen, dafs in einer continuirlichen Reihe von Ebenen, die alle senkrecht zu beiden Axen stehen, derselbe beide Axen verbindende Transmissionsriemen oder ein ebensolches Frictionsrad laufen kann, was ohne Gleitung geschehen soll. Riemen oder Frictionsrad kann masselos oder mit Masse begabt sein. Durch Verschiebung der Riemenebene parallel zu sich selbst um ein Stück p aus ihrer Anfangslage kann die Übersetzungszahl (das Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten der beiden Axen) continuirlich verändert werden.

An jeder der Axen soll ein coaxialer, mit Masse gleichmäſsig erfüllter Rotationskörper (oder eine an einer Stange langsam verschiebbare Masse) befestigt sein. w und ω seien deren Drehungswinkel um die Axen gegen bestimmte Anfangslagen. Der Wert von p und dw/dt bestimmt allerdings im ersten Falle den äuſserlich sichtbaren Zustand des Systems vollständig, da die Körper als vollkommene Rotationskörper gedacht sind, deren absolute Winkelstellung dem Auge nicht erkennbar sein soll, wogegen ihre Winkelgeschwindigkeit an den Centrifugalkräften u. s. w. bemerkbar sein soll. Es fragt sich nun, ob daraus folgt, daſs man richtige Gleichungen erhält, wenn man die lebendige Kraft T durch p und dw/dt ausdrückt, also daraus $d\omega/dt$ eliminirt und dann die Differentialgleichungen für die Änderung von p und w nach der Lagrange'schen bekannten Schablone so ableitet, als ob die Gröſsen p und w gewöhnliche generalisirte Coordinaten wären.

Bei Ableitung der Lagrange'schen Gleichungen wird nämlich vorausgesetzt, daſs durch die Werte der generalisirten Coordinaten allein die Position jedes materiellen Punktes des Systems bestimmt ist, unabhängig von der Art und Weise, wie sie von ihren Anfangswerten zu diesen Werten übergegangen sind, abgesehen vielleicht von einzelnen Verzweigungspunkten. Mit anderen Worten: die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z jedes materiellen Punktes des Systems können vielleicht mehrdeutige Functionen der generalisirten Coordinaten sein, aber es dürfen nicht zu jeder Wertcombination der generalisirten Coordinaten alle überhaupt möglichen Werte der Coordinaten x, y, z eines materiellen Punktes gehören.

Mit noch anderen Worten: wenn $p_1, p_2, \ldots$ die generalisirten Coordinaten sind, so müssen die Differentialgleichungen

$$dx = \xi_1\, dp_1 + \xi_2\, dp_2 + \cdots,$$
$$dy = \eta_1\, dp_1 + \eta_2\, dp_2 + \cdots \text{ u. s. w.}$$

integrabel sein. Dies gilt von den Gröſsen w und p nicht. Je nachdem man zuerst den Transmissionsriemen verschiebt und dann den ersten Körper dreht oder umgekehrt, kann man bewirken, daſs zu einem bestimmten Wertpaare von p und w die verschiedensten sich continuirlich folgenden Lagen des zweiten Körpers gehören, was man in neuerer Zeit häufig als das Fehlen der Holonomie bezeichnet. Wenn man p als generalisirte Coordinate auffaſst, so kommt nur, wenn der Transmissionsriemen Masse hat, nicht aber, wenn er masselos gedacht wird, der Differentialquotient von p nach der Zeit in T vor. Das Fehlen des Differentialquotienten einer der Coordinaten nach der Zeit in T aber scheint immer auf Ungereimtheiten zu führen.

Natürlich würde man sofort richtige Gleichungen erhalten, wenn man die lebendige Kraft T als Function von dw/dt und $d\omega/dt$

ausdrücken und diejenige Form der Lagrange'schen Gleichungen anwenden würde, welche gilt, falls noch eine Bedingung zwischen den Coordinaten besteht. Als solche wäre die durch den Riemen bedingte Beziehung zwischen beiden Winkelgeschwindigkeiten einzuführen. Dann würde bloſs, falls der Riemen Masse hat, der Differentialquotient von p nach der Zeit in T vorkommen. Die Veränderlichkeit der Bedingung mit der Zeit aber würde sonst gar nicht in die Gleichungen eingehen, sodaſs die continuirliche Veränderlichkeit des Übersetzungsverhältnisses gar keine Rolle mehr spielt. Dann kann aber dieses immer als rational und die ganze Bewegung als eine periodische aufgefaſst werden. Die Helmholtz'schen Sätze werden dann specielle Fälle der von mir und Clausius in unseren Abhandlungen über die Beziehung des Princips der kleinsten Wirkung zum zweiten Hauptsatz abgeleiteten.

§ 3. Das d'Alembert'sche Princip wird manchmal folgendermaſsen ausgesprochen: Wenn man auf jeden materiellen Punkt eines Systems in einem beliebigen Zeitmomente seiner Bewegung eine Kraft wirken läſst, deren Intensität gleich der mit der Masse des Punktes multiplicirten Beschleunigung desselben, und deren Richtung der letzteren Beschleunigung gerade entgegengesetzt ist, so kommt das System sofort ins Gleichgewicht. Das Gleichgewicht kann hier nicht dahin definirt werden, daſs kein materieller Punkt eine Beschleunigung erfährt. Diese werden, sobald überhaupt Bewegung vorhanden ist, infolge der Bedingungsgleichungen die mannigfachsten Beschleunigungen erfahren können. Man könnte sagen, das System kommt bei Hinzufügung der besagten Kräfte ins Gleichgewicht, wenn es gleichzeitig in der Position, die es augenblicklich hat, in Ruhe versetzt wird. Allein diese Definition wird sinnlos, wenn Ruhe des Systems mit den Bedingungsgleichungen gar nicht vereinbar ist. Man kann da folgende Definition aufstellen: gewisse Kräfte halten sich an einem bewegten System das Gleichgewicht, wenn unter ihrem Einfluſs die Bewegung gerade so vor sich geht (dieselben Beschleunigungen eintreten), wie dies bei gleicher Anfangsposition und gleichen, gleichgerichteten Anfangsgeschwindigkeiten ohne alle äuſseren Kräfte der Fall wäre. Wenn die Bedingungen durch lauter Gleichungen ausgedrückt sind und Ruhe überhaupt damit vereinbar ist, so halten sich die Kräfte am ruhenden System immer auch Gleichgewicht. Sind hingegen die Bedingungen durch Ungleichungen ausgedrückt, so ist dies nicht immer der Fall. Auf einen bewegten, an einem unausdehnbaren Faden befestigten Körper kann eine Kraft, die kleiner als die Centrifugalkraft ist, in der Richtung des Fadens wirken, ohne die Bewegung zu verändern. Diese Kraft würde aber an dem unter sonst gleichen Bedingungen ruhenden Körper nicht das Gleichgewicht unterhalten.

Routh, John Edward, Sc. D., Ll. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von ADOLF SCHEPP, Premierlieutenant a. D. zu Wiesbaden. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. FELIX KLEIN zu Göttingen. Erster Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. [XII u. 472 S.] gr. 8. 1897. Gebunden n. ℳ 10.— [II. Band unter der Presse.]

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zwei Theile. I. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 448 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 8.—

Schlesinger, Prof. Dr. **Ludwig,** Privatdocent an der Universität Berlin, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. In 2 Bänden. II. Band. I. Theil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.—

Schubert, Dr. **Herm.,** fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. geb. n. ℳ. 4.—

Serret, J.-A., † Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes à Paris, Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. AXEL HARNACK, † Prof. an der Technischen Hochschule zu Dresden. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. BOHLMANN, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band: Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 10.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Stolz, Dr. **Otto,** ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 38 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil: Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Weiler, Dr. **A.,** in Zürich, neue Behandlung der Parallelprojektionen und der Axonometrie. Mit 109 Figuren im Text. 2., wohlfeile Ausgabe. [VII u. 210 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 2.80.

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. III. Band: Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.— [Band IV: Die Lehre vom Licht in Vorbereitung.]

Jahresbericht

der

Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Sechster Band. Zweites Heft.

Enthaltend:

Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie.
Bericht von S. Finsterwalder in München.
Mit 19 Figuren im Text.

Mechanische Beziehungen bei der Flächen-Deformation.
Bericht von S. Finsterwalder in München.
Mit 33 Figuren im Text.

Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal-Rechnung von Euler bis auf die heutige Zeit.
Bericht von G. Bohlmann in Göttingen.

Herausgegeben im Auftrage des Vorstandes

von

G. Hauck
in Berlin.

A. Gutzmer
in Halle a. S.

Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1899.

DIE
GEOMETRISCHEN GRUNDLAGEN
DER
PHOTOGRAMMETRIE.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

S. FINSTERWALDER.

1. Die Photogrammetrie lehrt, aus photographischen Bildern [Perspectiven] den dargestellten Gegenstand nach Lage und Mafs zu reconstruiren. Im Gegensatz zu der Perspective, als deren Umkehrung sie gewissermafsen erscheint, dient sie durchaus technischen Zwecken, während bei jener künstlerische Zwecke mafsgebend sind. Zur Lösung ihrer Aufgaben bedient sie sich der Methoden der darstellenden Geometrie incl. Perspective, der neueren Geometrie und gelegentlich auch der analytischen Geometrie. Für die Abgrenzung des Stoffes und die Wahl der Methoden ist die Rücksicht auf die Anwendungsfähigkeit entscheidend.

Schon hundert Jahre bevor die photographische Technik die exacte und mühelose Herstellung von Perspectiven ermöglichte, hat J. H. Lambert in seiner „Freien Perspective" (Zürich 1759) die Grundlinien eines geometrischen Verfahrens der Photogrammetrie gelegt. Im achten Abschnitt, der von den umgekehrten Regeln der Perspective handelt, lehrt Lambert nicht nur die Richtigkeit einer gegebenen Perspective zu prüfen, sondern auch den Standpunkt zu finden, von dem aus sie aufgenommen wurde, und aus der Kenntnifs einiger Abmessungen des Objectes auf die übrigen zu schliefsen. Als später die fortschreitende Technik die Grundlage für eine nützliche Anwendung jener Regeln geschaffen hatte, waren sie vielfach vergessen. Die Photogrammetrie entwickelte sich in den Händen von Ingenieuren und Architekten, wie Meydenbauer, Laussedat, Porro u. A. ausschliefslich nach der instrumentellen Seite und unter möglichst geringem Aufwand von theoretischem Apparat. Geodäten wie Jordan und Koppe haben die Disciplin aufserdem durch Discussion der Genauigkeitsgrenzen vertieft. Von mathematischer Seite, namentlich von R. Sturm, wurden inzwischen eine Anzahl von Untersuchungen ausgeführt, deren engster Zusammenhang mit unserem Gegenstande den Verfassern unbekannt geblieben war, und Herrn Guido Hauck blieb es vorbehalten, den notwendigen Contact zwischen der im Laufe der Zeit hochentwickelten projectiven Geometrie und einem ihrer nächstliegendsten Anwendungsgebiete, der Photogrammetrie, herzustellen. Bei der Abfassung des vorliegenden

Referates über die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie mufste der Verfasser vielfach über das in der Literatur vorliegende Material hinausgehen und aus seiner nunmehr zehnjährigen Praxis und Lehrthätigkeit auf diesem Gebiete schöpfen, um einige Abrundung zu erzielen. Da der instrumentelle Teil der Photogrammetrie naturgemäfs auszuschliefsen war, mufste auch die Theorie der Constantenbestimmung und Rectification fortbleiben.

Vorbereitende Constructionen und Definitionen.

2. Zunächst seien einige Constructionen und Formeln vorausgeschickt, welche in der Folge benützt werden.

a) Die Construction eines Strahles, der mit 3 Strahlen eines Büschels ein durch 4 Punkte auf einer Geraden gegebenes Doppelverhältnis einschliefst.

Um den Strahl δ zu bestimmen, trägt man [Fig. 1] die 4 Punkte auf eine bewegliche Linie [Lineal oder Papierstreifen] auf und verschiebt dieselbe so lange, bis die 3 Punkte ABC auf die

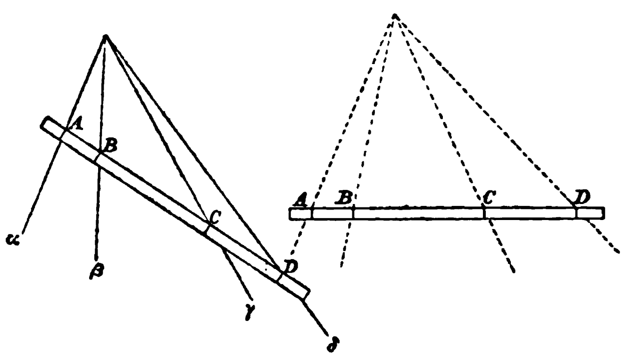


Fig. 1.

3 Strahlen $\alpha\beta\gamma$ fallen; dann markirt man die Lage des Punktes D und zieht durch ihn den Strahl δ. Ist das Doppelverhältnis durch 4 Strahlen gegeben, so hat man nur die 4 Strahlen vorher durch eine Gerade zu schneiden und ihr Doppelverhältnis auf das von 4 Punkten zu reduciren. Die Construction ist einfacher, rascher und genauer ausführbar als die sonst mit Lineal und Zirkel ausgeführten.

b) In ähnlicher Weise könnte man verfahren, wenn man zu 3 Punkten ABC einen 4. Punkt D mit gegebenem Doppelverhältnis finden soll. In den meisten Fällen wird aber hier die Rechnung vorzuziehen sein, namentlich dann, wenn das Doppelverhältnis $(ABCD) = \lambda$ als Zahlenwert gegeben ist. Sind die Abstände der Punkte ABC von einem festen Punkt $x_1 x_2 x_3$, so ist der Abstand des gesuchten Punktes x_4 durch die Formel gegeben:

$$x_4 = \frac{(x_3 - x_1)x_2 + \lambda(x_2 - x_3)x_1}{(x_3 - x_1) + \lambda(x_2 - x_3)}. \qquad \text{(I)}$$

c) Eine Specialisirung dieser Formel tritt dann ein, wenn AB das Bild der Einheitsstrecke und C der Fluchtpunkt [das Bild des unendlich fernen Punktes] auf einer Geraden ist. Einem Punkt D entspricht dann eine wirkliche Entfernung x von dem durch A dargestellten Punkt, welche durch die Formel $x = \frac{AD}{DC} \cdot \frac{BC}{AB}$ gegeben ist. Häufig kommt es auch vor, dafs auf einer Geraden die Bilder zweier aneinanderstofsender Einheitsstrecken a und b gegeben sind, und man soll die wirkliche Entfernung eines Punktes von dem Punkte berechnen, in dem die beiden Einheitsstrecken zusammenstofsen. Ist das Bild dieser Entfernung in der Perspective m, so berechnet sich die wirkliche Entfernung nach der Formel:

$$\frac{1}{x} = \frac{a - b}{a + b} - \frac{2ab}{a + b} \cdot \frac{1}{m}; \qquad \text{(II)}$$

a und b sind dabei die Längen der Einheitsstrecken im Bilde; a ist gröfser als b vorausgesetzt und der positive Sinn vom Anfangspunkt aus in der Richtung, in der b liegt, zu verstehen.

3. Construction eines Punktes oder einer Geraden einer ebenen Perspective.

Es seien zwei perspectiv auf einander bezogene Ebenen gegeben. Den 4 Punkten $ABCD$ der ersten Ebene entsprechen 4 Punkte $A'B'C'D'$ der zweiten Ebene. Man soll zu einem Punkt E den zugehörigen Punkt E', und zu einer Geraden g die zugehörige Gerade g' finden. Zur Lösung der ersten Aufgabe ziehe man [Fig. 2] die 4 Linien $ABCD$ und die beiden Diagonalen AC und BD und die entsprechenden Linien in der zweiten Ebene. Der Punkt E wird dann mit den 4 Punkten $ABCD$ verbunden. Es entstehen auf diese Weise 4 Strahlenbüschel, welche nach der Construction (2a) in die zweite Ebene zu übertragen sind. Dort müssen sich dann die 4 neu construirten Strahlen in dem gesuchten Punkt E' schneiden. Die Häufung der Örter für den Punkt E' ist wichtig für die Genauigkeit der auszuführenden Construction. Sind sehr viele Punkte E aus einer Ebene in eine andere zu übertragen, so

verfährt man besser folgendermafsen: Man zeichnet in der ersten Ebene ein Quadrat [oder ein Rechteck] von passenden Dimensionen und überträgt dessen Eckpunkte nach dem eben angegebenen Ver-

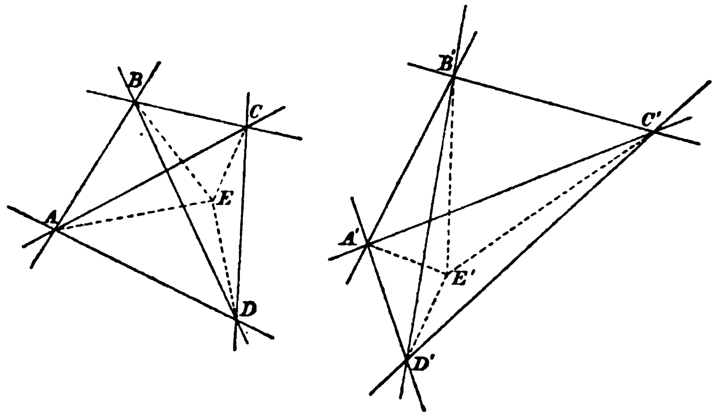


Fig. 2.

fahren möglichst genau in die zweite Ebene. Das Quadrat [bezw. Rechteck] wird durch fortgesetzte Halbirung der Seiten in eine gröfsere Anzahl kleinerer Quadrate geteilt. Die entsprechenden Vierecke in der Perspective kann man dann auf zweierlei Weisen ableiten, die je nach den Umständen anzuwenden sind. Entweder halbirt man durch fortgesetztes Diagonalen-Ziehen [siehe Fig. 3] das dem Quadrat entsprechende Viereck in der Perspective, oder man überträgt die Teilpunkte auf den Rändern des Quadrates in der ersten Ebene

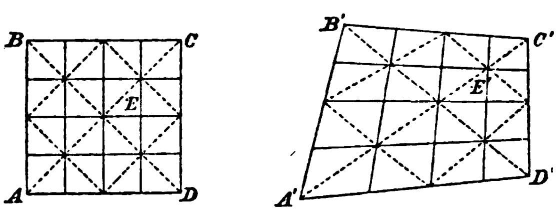


Fig. 3.

nach dem oben angegebenen Verfahren in die zweite Ebene und benützt das Diagonalen-Ziehen gewissermafsen nur als Controle. Hat man so ein hinreichend dichtes Netz — ein sogenanntes Möbius'sches Netz — aus der einen Ebene in die andere übertragen, so kann man sich zur Einschaltung der weiteren Punkte entweder auf das Augenmafs verlassen oder von dem Satz Gebrauch machen, dafs eine ebene Collineation in einem genügend kleinen Bezirk immer durch eine Affinität ersetzt werden kann. — Um eine

Gerade aus der ersten Ebene in die zweite zu übertragen, überträgt man entweder zwei Punkte von ihr oder, was in manchen Fällen bequemer ist, einen Punkt und die Richtung der Geraden; letztere dadurch, dafs man sie in ein Strahlenbüschel mit mehr als 3 bekannten Strahlen einschliefst. Durch Combination dieses zeichnerischen Verfahrens mit den Formeln (I) und (II) lassen sich unschwer Verfahren ausfindig machen, durch welche man aus Mafsen, die der ersten Ebene entnommen sind, die Coordinaten des zugehörigen Punktes in der zweiten Ebene berechnen kann.

4. Es sind zwei Räume dadurch collinear auf einander bezogen, dafs zu 5 Punkten des einen Raumes 5 Punkte des andern Raumes gegeben sind. Man soll entsprechende Punkte, Linien und Ebenen finden.

Man verfährt ähnlich wie vorhin in der Ebene. Die 4 Punkte $ABCD$ mögen ein Coordinaten-Tetraeder bilden und F den zugehörigen Einheitspunkt. Ein Punkt G habe dann bestimmte Tetraeder-Coordinaten in diesem System. In dem zweiten Raum bildet man das entsprechende Tetraeder $A'B'C'D'$ mit dem Einheitspunkt F'. Der zu G collineare Punkt G' hat in diesem System dieselben Tetraeder-Coordinaten. Die Übertragung des Punktes G in den Raum von G' kann in der Weise geschehen, dafs man zunächst vom Punkte A aus die Punkte F und G in die Ebene BCD projicirt. Die Projectionspunkte seien F_1 und G_1. Der dem Punkte F_1 entsprechende Punkt F_1' läfst sich dadurch finden, dafs man F' von A' auf die Ebene $B'C'D'$ projicirt. Nun wird der Punkt G_1' in der Ebene $B'C'D'F'$ nach der Construction des fünften Punktes bei der ebenen Collineation gefunden. In der Verbindungslinie $A'G_1'$ haben wir dann einen geometrischen Ort für den Punkt G'. Weitere geometrische Oerter ergeben sich in analoger Weise durch die Strahlen $B'G_2'$, $C'G_3'$, $D'G_4'$, welche von den drei andern Eckpunkten des Coordinaten-Tetraeders auslaufen.

Gerade Linien und Ebenen werden mit Hilfe ihrer Spuren in den Tetraederebenen übertragen.

5. In den nachfolgenden Entwicklungen werden mehrfach einige Sätze über das Problem der ebenen Projectivität verwendet, welche von Herrn Sturm im I. Band der mathematischen Annalen entwickelt wurden, und die hier Platz finden mögen. a) In zwei Ebenen e und e' sind je fünf paarweise zusammengehörige Punkte $P_1P_2P_3P_4P_5$, $P_1'P_2'P_3'P_4'P_5'$ gegeben, dann existirt zu jedem Punkt Q der Ebene e ein einziger Punkt Q' der Ebene e', so dafs das Büschel der Strahlen von Q nach P_1 bis P_5 projectiv zu dem Büschel der Strahlen von Q' nach P_1' bis P_5' ist. Der Punkt Q' kann, wie später (19) auseinandergesetzt wird, als 4. Schnittpunkt zweier Kegelschnitte, welche drei bekannte Schnittpunkte haben, gefunden werden. Die Bestimmung des Punktes Q' ist die projective

Verallgemeinerung der sogenannten Pothenot'schen Aufgabe. Bei letzterer treten an Stelle der beliebigen Punkte $P_4 P_5$ und $P_4' P_5'$ die Kreispunkte der Ebenen e und e'. b) Tritt zu den fünf Paaren entsprechender Punkte noch ein sechstes Paar P_6, P_6' hinzu, so sind die Punkte Q der Ebene e, welche die Eigenschaft haben, dafs zu ihnen ein Punkt Q' der Ebene e' von der Art existirt, dafs das Büschel $Q(P_1 \cdots P_6)$ projectiv zu $Q'(P_1' \cdots P_6')$ wird, auf eine Curve dritter Ordnung beschränkt, welche durch die sechs Punkte $P_1 \cdots P_6$ geht. Dieselbe enthält aber noch sechs weitere bekannte Punkte $Q_1 \cdots Q_6$ von folgender Definition: Das Strahlenbüschel $Q_1(P_2 P_3 P_4 P_5 P_6)$ ist projectiv zu $P_1'(P_2' P_3' P_4' P_5' P_6')$, $Q_2(P_1 P_3 P_4 P_5 P_6)$ projectiv zu $P_2'(P_1' P_3' P_4' P_5' P_6')$, u. s. f. Der Ort der Punkte Q' ist die analog gebildete Curve der Ebene e', von der auch zwölf Punkte bekannt sind. c) Durch Hinzufügung eines siebenten Paares P_7, P_7' sind die Punkte Q und Q' in den Ebenen e und e' bestimmt. Es giebt in e drei Punkte Q, zu denen in e' Punkte Q' so gefunden werden können, dafs die Büschel $Q(P_1 \cdots P_7)$ und $Q'(P_1' \cdots P_7')$ projectiv sind. Sie ergeben sich als Schnittpunkte zweier Curven 3. O., von welchen sechs Schnittpunkte bereits bekannt sind.

6. Für die bei photogrammetrischen Problemen gegebenen Perspectiven sollen folgende Bezeichnungen gebraucht werden [vergl. Fig. 5, S. 16]: O sei das Centrum, von dem aus die Perspective aufgenommen wird. Seine Lage gegenüber der Ebene der Perspective ist bestimmt durch das Lot Oa, welches auf die Ebene der Perspective gefällt wird. Der Fufspunkt a des Lotes wird der Hauptpunkt der Perspective genannt, die Länge Oa die Bildweite oder Distanz d und die Richtung Oa die Axe der Perspective. Der Hauptpunkt a und die Distanz d heifsen die Elemente der inneren Orientirung der Perspective. Die Gröfsen, welche das Centrum O und die Richtung der Perspectiv-Axe im Raum, bezw. gegen das Object, bestimmen, seien als äufsere Orientirungselemente von jenen unterschieden.

7. Neben wirklichen Perspectiven räumlicher Gegenstände kommen bei photogrammetrischen Constructionen auch perspective Bilder von solchen Perspectiven zur Verwendung, die als „abgeleitete Perspectiven" von den wirklichen oder directen Perspectiven unterschieden werden sollen. Eine wirkliche Perspective stellen in der Regel nur das photographische Glas-Negativ und allenfalls davon abgenommene Diapositive auf Glas dar. Positive Bilder auf Papier erleiden infolge der Bäder, die sie durchzumachen haben, eine Contraction, die fast ausnahmslos nach verschiedenen Richtungen verschieden ist und angenähert durch eine affine Transformation der wirklichen Perspective ersetzt werden kann. Aber bei anderen Reproductionsverfahren, mit welchen häufig ein Vergröfsern oder Ver-

kleinern des Original-Negativs verbunden ist, wird, wenn nicht ganz besondere Vorsichtsmaſsregeln getroffen werden, das schlieſsliche Bild eine mehr oder minder willkürliche Collineation des Original-Negativs, eine abgeleitete Perspective, darstellen. Für die folgenden Betrachtungen ist es von Wichtigkeit zu bemerken, daſs die Zahl der ebenen Collineationen einer Perspective weit gröſser ist als die Zahl der Schnitte eines Strahlenbündels mit einer Ebene, und daſs daher eine abgeleitete Perspective in der Regel nicht als eine wirkliche Perspective von gleichem Centrum auf eine verschiedene Bildebene angesehen werden kann. Die Zahl der Collineationen einer ebenen Figur ist ∞^8. Davon sind ∞^3 congruent, ∞^1 ähnlich. Der Form nach verschieden sind also ∞^4. Die Mannigfaltigkeit der ebenen Schnitte eines Strahlenbündels ist ∞^3. Davon sind ∞^1 ähnlich. Also ist die Zahl der der Form nach verschiedenen ebenen Schnitte eines Strahlenbündels ∞^2. Es muſs demnach eine Collineation einer ebenen Figur zwei Bedingungen erfüllen, damit sie als Schnitt eines vorgegebenen Strahlenbündels aufgefaſst werden kann, das zur ebenen Figur perspectiv liegt. Um diese Bedingungen zu finden, denke ich mir von einem Punkt der Bildebene das Strahlenbüschel nach den unendlich fernen Punkten der Ebene gezogen. Diesem Strahlenbüschel entspricht ein ihm congruentes Strahlenbüschel in dem projicirenden Bündel. In einer collinearen Abbildung der Bildebene kann man zunächst das von einem endlichen Punkt derselben nach den unendlich fernen Punkten führende Strahlenbüschel construiren. Infolge der projectiven Beziehung dieser Ebene zum Strahlenbündel entspricht den Punkten der unendlich fernen Geraden ein Strahlenbüschel in dem Bündel. Nur wenn dieses congruent ist mit dem Strahlenbüschel in der collinearen Ebene, ist die Einpassung möglich. Dazu sind zwei Bedingungen zu erfüllen, z. B. die Gleichheit zweier Winkel in beiden Strahlenbüscheln. Mit Zuhilfenahme der imaginären Kugelelemente kann man die Bedingungen auch so aussprechen: Es müssen den imaginären Kreispunkten in der Ebene der Perspective zwei Strahlen des Bündels zugeordnet sein, welche nach dem imaginären Kugelkreis laufen, damit die Perspective dem Strahlenbündel eingepaſst werden kann.

8. Von gröſster Wichtigkeit für die Photogrammetrie sind die von Herrn Guido Hauck eingeführten „Kernpunkte“. Dieselben treten auf, sobald die Perspectiven von mehr als zwei Standpunkten aus in Frage kommen. Man nennt nämlich das Bild des zweiten Standpunktes O_2 auf der Perspective vom Standpunkte O_1 einen Kernpunkt und das Bild des Punktes O_1 auf der Perspective vom Standpunkte O_2 den dazu gehörigen gegnerischen Kernpunkt. Legt man durch die Verbindungslinie der beiden Standpunkte O_1 und O_2

eine Linie, so trifft diese die beiden Bildebenen in den gegnerischen Kernpunkten O_2' und O_1''. Ein Punkt P des Raumes hat in der ersten Bildebene das Bild P', in der zweiten Bildebene das Bild P''. Legt man durch P und $O_1 O_2$ eine Ebene, so schneidet diese die Bildebenen in Strahlen $O_2'P'$ und $O_1''P''$. Für verschiedene Punkte P beschreiben die beiden Strahlen $O_2'P'$ und $O_1''P''$ Strahlenbüschel, die in Bezug auf den Schnitt der beiden Bildebenen perspectiv liegen. [Vergl. Fig. 4, S. 15.] Denkt man sich die beiden Bildebenen aus ihrem Zusammenhang gelöst, so sind jene perspectiven Strahlenbüschel projectiv, und wir haben den wichtigen Satz:

Von den beiden gegnerischen Kernpunkten aus werden die entsprechenden Bilder von Raumpunkten durch projective Strahlenbüschel projicirt.

Dieser Satz ermöglicht die Auffindung der Kernpunkte, sobald eine genügende Anzahl zusammengehöriger Bilder von Raumpunkten auf zwei Perspectiven gegeben sind. Die notwendige Anzahl hierzu beträgt 7, und man hat die Aufgabe zu lösen, in der Ebene der ersten Perspective einen Punkt O_2' so zu finden, dafs die 7 Strahlen, die von ihm aus nach den Punkten $P_1' P_2' \cdots P_7'$ gehen, eben dieselben Doppelverhältnisse haben, wie die 7 Strahlen, die von einem noch zu suchenden Punkt O_1'' nach den Punkten $P_1'' P_2'' \cdots P_7''$ gehen. [Vergl. 5c.] Die Lösung giebt 3 zusammengehörige Paare von Punkten O_2' und O_1'', welche als Schnitte zweier ebenen Curven 3. Ordnung, die 6 Punkte gemeinsam haben, gefunden werden. Erst wenn zu den 7 Paaren zusammengehöriger Punkte noch ein achtes Paar tritt, läfst sich unter den 3 Punkten die Auswahl treffen.

9. Die Auffindung der gegnerischen Kernpunkte wird sehr erleichtert, wenn man weifs, dafs vier von den dargestellten Punkten des Objectes in einer Ebene liegen. Ihre Bilder seien $P_1' P_2' P_3' P_4'$ und $P_1'' P_2'' P_3'' P_4''$. Ein fünfter Punkt habe die Bilder P_5' und P_5''. Ich kann nun P_5' auch als Bild Q_5' des Punktes Q_5 auffassen, in welchem der Projectionsstrahl $O_1 P_5$ die Ebene $P_1 P_2 P_3 P_4$ des Objectes trifft. Das entsprechende Bild Q_5'' in der Ebene e_2 wird nach Früherem (3) so bestimmt, dafs $P_1' P_2' P_3' P_4' Q_5'$ ein projectives Punktfeld zu $P_1'' P_2'' P_3'' P_4'' Q_5''$ bildet. Die Verbindungslinie $P_5'' Q_5''$ giebt nun das Bild des Projectionsstrahles $O_1 Q_5 P_5$ in der Ebene e_2, also einen geometrischen Ort für den Kernpunkt O_1''. Fafst man P_5'' als Bild R_5'' des Punktes R_5 auf, in welchem der Projectionsstrahl $O_2 P_5$ die Ebene $P_1 P_2 P_3 P_4$ trifft, und überträgt man R_5'' in die Ebene e_1 nach R_5', so erhält man dort in $R_5' P_5'$ einen Ort für O_2'. Weitere Oerter für die Kernpunkte finden sich, sobald die Bilder P_6' und P_6'' bekannt sind. Sind demnach vier auf den beiden Bildern dargestellte Punkte des Objectes in einer Ebene gelegen, so genügt die Kenntnis der Bilder zweier weiterer Punkte, um die gegnerischen Kernpunkte linear zu construiren.

Es sei noch bemerkt, dafs, wenn auf dem einen Bilde der Kernpunkt bekannt ist, der gegnerische Kernpunkt auf dem anderen Bilde immer linear construirt werden kann, und zwar genügen hierfür die Bilder von 5 Objectpunkten. [Vergl. 5a u. 19].

10. Die Kernpunkte geben uns, wie bereits von Herrn Hauck betont wurde, ein Mittel an die Hand, das Aufsuchen zusammengehöriger Bildpunkte in verschiedenen Photographien zu erleichtern. Einem Punkt P_1' des ersten Bildes kann im zweiten Bild nur ein solcher Punkt P_1'' entsprechen, der auf dem gegnerischen Kernstrahl $O_1''P_1''$ zu $O_2'P_1'$ liegt. $O_1''P_1''$ ist nämlich das Bild aller Punkte des Projectionsstrahles O_1P_1. Sind in den beiden Kernstrahlenbüscheln 3 Paare entsprechender Strahlen bekannt, so ist zu jedem vierten Strahl des einen Büschels der entsprechende vierte Strahl des andern Büschels nach 2a zu construiren, und auf diesem mufs das zweite Bild irgend eines Punktes, dessen erstes Bild auf dem ersten Kernstrahl liegt, zu finden sein. Auf diese Weise hat man sich beim Aufsuchen des entsprechenden Punktes nur auf eine Linie zu beschränken. Die Kernpunkte leisten aber noch mehr, indem sie ermöglichen, die Bilder zweier entsprechender Curven in beiden Perspectiven [z. B. Wegränder, Wasserläufe, Flurgrenzen] punktweise auf einander zu beziehen und so der Construction zugänglich zu machen. Ich ziehe in der ersten Perspective einen beliebigen Kernstrahl nach irgend einem Punkt des ersten Bildes der Curve. Einer der Schnittpunkte des entsprechenden gegnerischen Kernstrahles mit dem zweiten Bild der Curve mufs dann das zweite Bild des auf dem ersten Bild der Curve gewählten Punktes sein. Die Mehrdeutigkeit, die hiebei noch vorhanden ist, entspricht ganz dem Umstande, dafs die beiden Projectionskegel einer Curve sich in der Regel nicht nur in dieser selbst, sondern noch in einer weiteren Curve schneiden.

Reconstruction ganzer Objecte aus mehreren Bildern.

11. Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir dazu über, die wichtigsten Aufgaben der Photogrammetrie zu besprechen. Wir setzen zunächst voraus, dafs keinerlei innere Orientirungselemente der Photographien bekannt seien. Es seien nun zwei abgeleitete Perspectiven eines Objectes gegeben. Man soll ermitteln, was sich über das Object aussagen läfst. Zunächst kann man mit Hilfe der Sturm'schen Construction aus 7 Paaren zusammengehöriger Punkte die Kernpunkte ermitteln. Dieselben behalten auch in den abgeleiteten Bildern ihre Bedeutung bei, da sie sich auf rein projective Eigenschaften stützt. Es läfst sich nun auf sehr verschiedene Weise ein Hilfsobject construiren, von welchem die abgeleiteten Perspectiven wirkliche Perspectiven sind. Dies geschieht in folgen-

der Weise: Ich ziehe in der Ebene e_1 eine Transversale, welche das Kernstrahlenbüschel in einer Punktreihe schneidet [∞^2 Möglichkeiten]. Diese Punktreihe passe ich nun [etwa mittels eines Papierstreifens] in das gegnerische Kernstrahlenbüschel ein und erhalte dort eine congruente Punktreihe [2 Möglichkeiten]. Nun kann man die beiden Ebenen längs der beiden Transversalen zum Schnitt bringen, so dafs entsprechende Punkte der congruenten Punktreihen sich decken. Der Winkel der beiden Ebenen ist noch beliebig [∞^1 Möglichkeiten]. Jetzt verbindet man die beiden Kernpunkte durch eine Gerade und wählt auf ihr willkürlich zwei Punkte O_1 und O_2 [∞^2 Möglichkeiten]. Verbindet man sodann zwei entsprechende Punkte P' und P'' in den beiden Ebenen e_1 und e_2 mit den Punkten O_1 und O_2, so liegen die Verbindungslinien immer in einer Ebene und schneiden sich in einem Raumpunkt P, der von O_1 aus gesehen das Bild P' in der Ebene e_1, und von O_2 aus gesehen das Bild P'' in der Ebene e_2 liefert. Die Gesamtheit der Punkte P bildet dann ein räumliches Object. Dieses Hilfsobject ist zu dem auf den Bildern dargestellten Object collinear, denn allen Geraden des wahren Objectes entsprechen auch auf den abgeleiteten Perspectiven Gerade, und aus diesen construiren sich die entsprechenden Geraden des Hilfsobjectes. Man übersieht ohne Schwierigkeit, dafs man auf diese Weise alle ∞^8 möglichen, der Form und Gröfse nach verschiedenen, räumlichen Collineationen erhält. Denn wenn auch die Anzahl der Möglichkeiten aus den grade vorliegenden abgeleiteten Perspectiven nur ∞^5 beträgt, so können wir ja statt der vorliegenden Perspectiven irgend welche andere aus ihnen abgeleitete zur Construction eines Hilfsobjectes von denselben collinearen Eigenschaften benützen. Um das wahre Object zu finden, hätte man sich Angaben über dasselbe zu verschaffen, z. B. solche, welche die gegenseitige Lage von 5 Punkten fest legen. Dazu braucht man 9 Längen, oder wenn es nur auf die Form und nicht auf den Mafsstab ankommt, 8 Verhältnisse oder auch acht Winkel. Construirt man mit Hilfe dieser 5 Punkte die collineare Raumfigur nach der früher gegebenen Vorschrift, so erhält man das gesuchte wahre Object und in denjenigen Punkten, welche O_1 und O_2 entsprechen, auch die beiden Standpunkte der Aufnahme gegenüber dem wahren Object. Unbestimmt bleiben dagegen die wirklichen Photographien und die Elemente der inneren Orientirung. Die Reconstruction des Objectes hängt also davon ab, dafs man aufser den beiden abgeleiteten Photographien 9 Mafse des Objectes kennt. Die Kenntnis einer beliebig grofsen Zahl weiterer abgeleiteter Perspectiven würde zur Bestimmung des Objectes nicht weiter beitragen, da sich dieselben entweder selbst oder abgeleitete von ihnen in jedes Hilfsobject einpassen lassen und dieses also nicht weiter bestimmen.

12. Es sind zwei Photographien eines Objectes [wirkliche Perspectiven] gegeben. Man verfährt in diesem Fall genau so wie im vorigen und ermittelt zunächst ein collineares Hilfsobject, deren es noch ∞^5 giebt. Zur Reconstruction des wahren Objectes aus dem collinearen Hilfsobject ist in diesem Fall nur mehr die Kenntniss von 5 Maſsen notwendig; die fehlenden vier werden durch die zweimal zwei Bedingungen ersetzt, welche aussagen, daſs die beiden Strahlenbündel mit den Centren O_1 und O_2 auch im wahren Object nach den vorgegebenen Perspectiven geschnitten werden können. Durch das Einpassen der vorgegebenen Perspectiven in die Strahlenbündel des wahren Objects gelangt man nun auch zu den inneren Orientirungselementen [Hauptpunkt und Bildweite] der zur Reconstruction benützten Bilder.

13. Es seien nunmehr drei wirkliche Perspectiven eines Objectes gegeben. Die Construction eines Hilfsobjectes ist in einer grundlegenden Arbeit von Herrn Guido Hauck [Theorie der trilinear-projectivischen Systeme, Crelle's Journal, Band 96 und 97] behandelt. Das Hauck'sche Verfahren soll kurz auseinander gesetzt werden: Wir haben 3 Bildebenen $e_1 e_2 e_3$ samt den 3 Paaren gegnerischer Kernpunkte $O_2' O_1''$, $O_2''' O_3''$, $O_1''' O_3'$, welche, falls sie nicht unmittelbar gegeben sind, mit der Sturm'schen Construction aus 7 oder 8 Tripeln entsprechender Punkte gefunden werden können. Es seien $P' P'' P'''$ die 3 Bilder eines Raumpunktes P. Derselbe kann, wie Hauck gezeigt hat, willkürlich als Schnittpunkt der drei Bildebenen angesehen werden. Man hat nun die Aufgabe zu lösen, mit einer Geraden durch P' das Kernstrahlenbüschel O_2' so zu schneiden, daſs die zur Punktreihe auf der Schnittgeraden congruente Punktreihe im gegnerischen Kernstrahlenbüschel O_1'' durch Punkt P'' geht. Diese Aufgabe wird mit Benützung der entsprechenden rechten Winkel in den beiden projectiven Kernstrahlenbüscheln gelöst, und sie ergiebt 2 reelle oder imaginäre Lösungen. Dieselbe Aufgabe hat man für die beiden anderen Paare gegnerischer Kernstrahlenbüschel zu erledigen, und man erhält auf diese Weise durch jeden der 3 Punkte $P' P'' P'''$ je ein [allerdings doppelt bestimmtes] Paar von Punktreihen 12, 34, 56, die in der Reihenfolge 13, 25, 46 congruent sind. Die 3 Ebenen $e_1 e_2 e_3$ lassen sich nun in ein Dreikant zusammensetzen, in dessen Spitze die Punkte P', P'', P''' sich treffen, während die congruenten Punktreihen in den Kanten liegen. Verbindet man jetzt die gegnerischen Kernpunkte durch Gerade, so liegen diese 3 Verbindungslinien in einer Ebene und schneiden sich in den 3 Centren $O_1 O_2 O_3$, welche mit den Bildebenen zusammen die Kernpunkte liefern. Nunmehr kann ein Object construirt werden, welches die 3 gegebenen Bilder als wirkliche Perspectiven enthält. Die Anzahl der Möglichkeiten der Reconstruction eines solchen Objectes ist gegeben durch die Auswahlsmöglichkeit der 3 zusammen-

gehörigen Punkte $P'P''P'''$. Der Punkt P' kann in der Ebene e_1 beliebig gewählt werden [∞^2 Möglichkeiten]. Der Punkt P'' ist dann in der Ebene e_2 auf eine Gerade beschränkt, nämlich auf den Kernstrahl $P''O_1''$, der dem gegnerischen Kernstrahl $P'O_2'$ entspricht [∞^1 Möglichkeiten]. Der Punkt P''' ist dann festgelegt, da die beiden Kernstrahlen in der Ebene e_3 bereits bestimmt sind. Die Zahl der möglichen Collineationen ergiebt sich auf diese Weise zu ∞^3. Man sieht, dafs die ∞^9 möglichen Collineationen durch die Kenntnis von 2 wirklichen Bildern auf ∞^5 eingeschränkt werden, und dafs das Hinzukommen eines dritten wirklichen Bildes diese Zahl auf ∞^3 herabsetzt. Drei am Object abgenommene Mafse werden daher mit den drei wirklichen Perspectiven das Object bestimmen. Es steht nun zu erwarten, dafs, wenn auch noch ein viertes Bild gegeben ist, das Object bis auf ∞^1 Collineationen bestimmt ist. Diese ∞^1 Collineationen können dann nichts anderes als Ähnlichkeits-Transformationen sein. Denn beliebig viele wirkliche Bilder eines Objectes finden sich sicher auch an allen ähnlichen Objecten wieder. Wenn also der Schlufs gerechtfertigt ist, so müssen 4 wirkliche Bilder das Object bis auf den Mafsstab bestimmen.

14. Es seien nun vier wirkliche Perspectiven eines Objectes gegeben. Man kann dann aus zwei derselben oder von ihnen abgeleiteten eines der ∞^9 collinearen Hilfsobjecte finden, welche zum gesuchten Object möglich sind. In diesem Hilfsobject ist auch die Lage der 4 perspectivischen Centren zu ermitteln, sobald man in den 4 Bildebenen die 12 gegnerischen Kernpunkte gefunden hat. Die Aufsuchung des wahren Objectes kommt nun darauf hinaus, das Hilfsobject collinear so umzuformen, dafs die 4 Strahlenbündel, welche von den 4 Centren nach dem Object gehen, nach Punktfeldern geschnitten werden können, die den wirklichen Perspectiven congruent sind. Denken wir uns für einen Augenblick das wahre Object gefunden und in dasselbe die richtige Lage der 4 Perspectivebenen eingetragen. Dann wird jede der 4 Ebenen den unendlich fernen Kugelkreis nach 2 Punkten schneiden. Verbinde ich jeweils diese beiden Punkte mit dem zur Ebene gehörigen Centrum, so liegen die Verbindungslinien in der Parallelebene zur Bildebene. In dem Raume des Hilfsobjectes lassen sich nun die entsprechenden Linien zu den eben genannten Verbindungslinien angeben (4). Es sind das jene Geraden des Strahlenbündels, welche den imaginären Kreispunkten der Bildebenen entsprechen. So lassen sich im collinearen Hilfsraum durch jedes der 4 Centren $O_1 O_2 O_3 O_4$ ein Paar von Geraden angeben, welche das collineare Bild des unendlich fernen Kugelkreises des Originalraums schneiden müssen. Dieses collineare Bild des unendlich fernen Kugelkreises ist aber hiedurch festgelegt. Ich habe die

8 Geraden durch eine Ebene so zu schneiden, daſs die 8 Schnittpunkte auf einem Kegelschnitt liegen, und diese Aufgabe hat nur eine endliche Anzahl von Lösungen. Eine beliebige Ebene würde die 8 Geraden in Punkten schneiden, von denen je 5 auf einem Kegelschnitt liegen. Die 3 Bedingungen, daſs der 6., 7. und 8. Schnittpunkt auf demselben Kegelschnitt liegen sollen, bestimmen dann die Lage der Ebene. Haben wir so das Bild der unendlich fernen Ebene und des darin gelegenen Kugelkreises im Raum des Hilfsobjectes gefunden, so ist auch die Schar von ∞^1 Collineationen gegeben, welche das Hilfsobject in das wirkliche Object überführen. Auf eine genauere Auseinandersetzung kann hier um so leichter verzichtet werden, als mir eine brauchbare Lösung der erforderlichen Kegelschnittsaufgabe nicht bekannt ist und eine solche immerhin nur den ersten Schritt zu einer reellen Construction des Objectes aus vier Perspectiven bedeuten würde.*) Wenn das Object reconstruirt ist, so können die Perspectiven in die entsprechenden Strahlenbündel eingepaſst werden. Es sind dann auch die innern Orientirungselemente derselben bekannt.

15. Wesentlich vereinfacht wird die Reconstruction des Objectes, sobald die *innere Orientirung* der benützten Bilder bekannt ist. *Es reichen dann bereits zwei Bilder aus, um das Object bis auf den Maſsstab zu bestimmen.* Hieraus geht hervor, wie wichtig es für praktische Verwendung der Photogrammetrie ist, Apparate zur Herstellung der Bilder zu benützen, welche die innere Orientirung der Bilder ermöglichen. Zur Reconstruction beachte man, daſs nunmehr die beiden projicirenden Strahlenbündel bekannt sind und es nur mehr darauf ankommt, sie in solche Lage zu einander zu bringen, daſs entsprechende Strahlen sich schneiden. Um dies zu bewerkstelligen, verschafft man sich zunächst wieder die beiden gegnerischen Kernpunkte O_1'' und

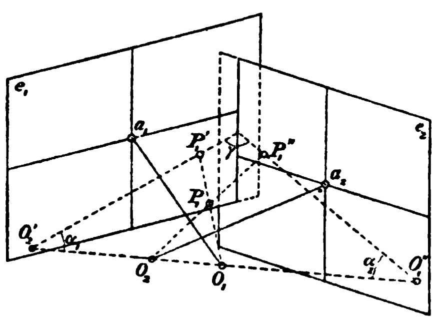


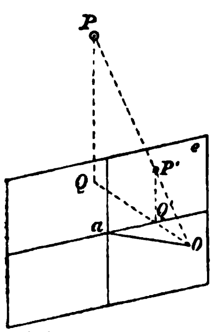
Fig. 4.

O_2'. [Fig. 4.] Verbindet man sie mit den zugehörigen Centren O_2 und O_1, so müssen die Verbindungslinien bei der richtigen Lage der Strahlen-

*) Nach Herrn *Schubert*: Kalkül der abzählenden Geometrie 1879 S. 95 beträgt die Zahl der Kegelschnitte, welche 8 Raumgerade treffen, 92. Mag sich die Zahl auch infolge des Umstandes, daſs bei der vorliegenden Aufgabe viermal zwei Gerade sich schneiden, verringern, so sind doch die Aussichten auf die Auffindung einer tauglichen Lösung verschwindend.

bündel zur Deckung kommen. Die gegenseitige Stellung der Bildebenen und der Axen der Perspectiven findet man nun durch folgende Überlegung. Man zieht in den Bildebenen e_1 und e_2 die entsprechenden Kernstrahlen $O_2'P_1'$ und $O_1''P_1''$. Da die Lage von O_1 gegenüber e_1 und dem Hauptpunkte a_1 des ersten Bildes bekannt ist, kann man den Winkel $P_1'O_2'O_1 = \alpha_1$ und den Neigungswinkel β_1 der Ebene $P_1'O_2'O_1$ gegenüber e_1 berechnen beziehungsweise construiren. In gleicher Weise findet man die entsprechenden Winkel α_2 und β_2 am zweiten Bild. Aus α_1 und α_2 ergiebt sich der Winkel $\gamma = 180^0 - \alpha_1 - \alpha_2$, den die beiden Kernstrahlen $O_2'P_1'$ und $O_1''P_1''$ im Raume einschliefsen. Nunmehr sind in dem Dreikant, das die Ebenen e_1 und e_2 mit $O_2'P_1'P_1''O_1''$ einschliessen, eine Seite γ und die beiden anliegenden Winkel β_1 und β_2 bekannt, und man kann die übrigen Stücke, nämlich den Winkel, welchen die beiden Bildebenen miteinander einschliefsen, sowie die Neigung der Schnittlinie derselben gegenüber den Kernstrahlen $O_2'P_1'$ und $O_1''P_1''$ berechnen.

Ist eine Länge, z. B. die Entfernung der Standpunkte [Basis] O_1O_2 bekannt, so lassen sich die Entfernung der beiden Kernpunkte und alle übrigen Längen in der Figur berechnen. Zur Reconstruction einzelner Punkte wählt man, falls nicht andere Rücksichten mafsgebend sind, am einfachsten eine zu den beiden Bildebenen e_1 und e_2 senkrechte Grundrifsebene, auf die man die bisher entwickelte Figur [nach Hauck „Vorbereitungsfigur"] projicirt. Legt man noch durch die Standpunkte O_1 und O_2 Parallelebenen zur Grundrifsebene, so schneiden diese die Bildebenen e_1 und e_2 in zwei hier durch die Hauptpunkte a_1 und a_2 gehenden Geraden, den Bildhorizonten, falls wir uns die Grundrifsebene horizontal gelegen vorstellen. Die Reconstruction verschiedener Raumpunkte erfolgt nun in einfachster Weise im Grundrifs nach dem Princip des Vorwärtseinschneidens. Die Höhe H der Punkte über der Grundrifsebene wird am einfachsten so ermittelt, dafs man die Höhenunterschiede der Punkte gegenüber den Standpunkten aus verticalen, ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken als vierte geometrische Proportionalen zu bekannten Stücken berechnet und zu den Höhen der Standpunkte über der Grundrifsebene addirt. Mit nebenstehenden, aus der Figur zu entnehmenden Bezeichnungen berechnet sich die



$P_1'Q' = h$ $OQ' = d'$
$PQ = H$ $OQ = D$

Fig. 5.

gesuchte Gröfse $H = \frac{h}{d'} \cdot D$. Die Gröfse h ist dem Bild, die Gröfsen d' und D sind dem Grundrifs zu entnehmen. Wie man sieht, berechnet sich die Höhe über der Grundrifsebene doppelt. Die beiden Höhen

müssen übereinstimmen, sobald die Bildpunkte auf entsprechenden Kernstrahlen gelegen sind. Eine directe Construction des Aufrisses läfst sich mit Hilfe von Methoden, welche wir ebenfalls Herrn Hauck verdanken, ausführen, wie später gezeigt werden soll.

16. Wir haben bisher über das abzubildende Object keinerlei specielle Voraussetzungen gemacht, und die entwickelten Methoden sind daher allgemein giltig. Sie sind auch die einzig anwendbaren in den Fällen, wo solche Voraussetzungen nicht gestattet sind, wie z. B. bei der Anwendung der Photogrammetrie auf Topographie. Bei der Architektur-Photogrammetrie, und noch mehr bei der Photogrammetrie kleinerer Objecte, kann man Bedingungen herstellen, welche die Lösung der Aufgabe wesentlich vereinfachen. Es sollen hier zwei Methoden zur Besprechung kommen: Die Photogrammetrie mittels eines bekannten Vergleichsobjectes und die Verwendung bekannter Symmetrien des Objectes zur photogrammetrischen Construction. Das zu verwendende Vergleichsobject wird am einfachsten als rechtwinkliges Parallelepiped, eventuell als Würfel gewählt. Ist eine directe Perspective eines solchen Körpers gegeben, so läfst sich die innere Orientirung derselben in allen den Fällen ohne weiteres ermitteln, in welchen nicht eine der Kantenrichtungen parallel zur Bildebene steht. Seien $F_1 F_2 F_3$ die Fluchtpunkte der drei zu einander senkrechten Richtungen, dann ist offenbar das zugehörige Centrum O gegeben als Ecke eines dreifach rechtwinkligen Dreikants, dessen Kanten durch die drei Fluchtpunkte hindurch gehen. Diese Ecke kann als Schnittpunkt dreier Kugeln mit den Durchmessern $F_1 F_2$, $F_2 F_3$, $F_3 F_1$ construirt werden. Auch die Kernpunkte, die zu zwei Photographien gehören, sind nach (9) leicht zu ermitteln. Man kann aber auch ohne Benützung dieser Hilfspunkte die Reconstruction eines Objectes ausführen. Es seien $A'B'C'D'E'F'G'H'$ und $A''B''C''D''E''F''G''H''$ [Fig. 6] die beiden Perspectiven eines rechtwinkligen Parallelepipeds. $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0 H_0$ sei der Grundrifs desselben, $A^0 B^0 C^0 D^0 E^0 F^0 G^0 H^0$ der Aufrifs. Ein Punkt P sei durch seine beiden Bilder P' und P'' bestimmt. Grundrifs und Aufrifs desselben findet man nun in folgender Weise: Man zieht durch P' und P'' Linien nach den gemeinsamen Fluchtpunkten F_1' und F_1'' der Kanten, welche sich im Grundrifs in Punkte projiciren. Diese Linien können als Bilder von Ebenen aufgefafst werden, die durch die Centren O_1 und O_2 hindurch gehen. Diese Ebenen werden Lotebenen zum Grundrifs, und man findet ihre Spuren in der Weise, dafs man die Schnittpunkte IKL mit zwei oder drei zur Grundrifsebene parallelen Kanten aufsucht. Dies geschieht durch perspective Übertragung nach 2c), und man erhält so die Punkte $I_0 K_0 L_0$. In gleicher Weise werden die Punkte $M_0 N_0 Q_0$ durch Übertragung von $M''N''Q''$ gefunden. Diese Linien $I_0 K_0 L_0$ und $M_0 N_0 Q_0$ schneiden sich dann im Grundrifs P_0 des gesuchten Punktes. Die Bestimmung des Aufrisses P^0 erfolgt ganz

analog. Die beiden Punkte P_0 und P^0 müssen senkrecht über einander liegen, was eine Probe für die Zusammengehörigkeit der beiden Bilder P' und P'' ergiebt, die die früher erwähnte Hauck'sche Probe mittels der Kernstrahlen ersetzt. Gerade Linien, deren Bilder $g'g''$ gegeben sind, werden in folgender Weise reconstruirt: Man überträgt die Schnittpunkte von g' mit den Bildern der Kanten des Parallelepipeds in den Grundrifs und Aufrifs. Die übertragenen Punkte

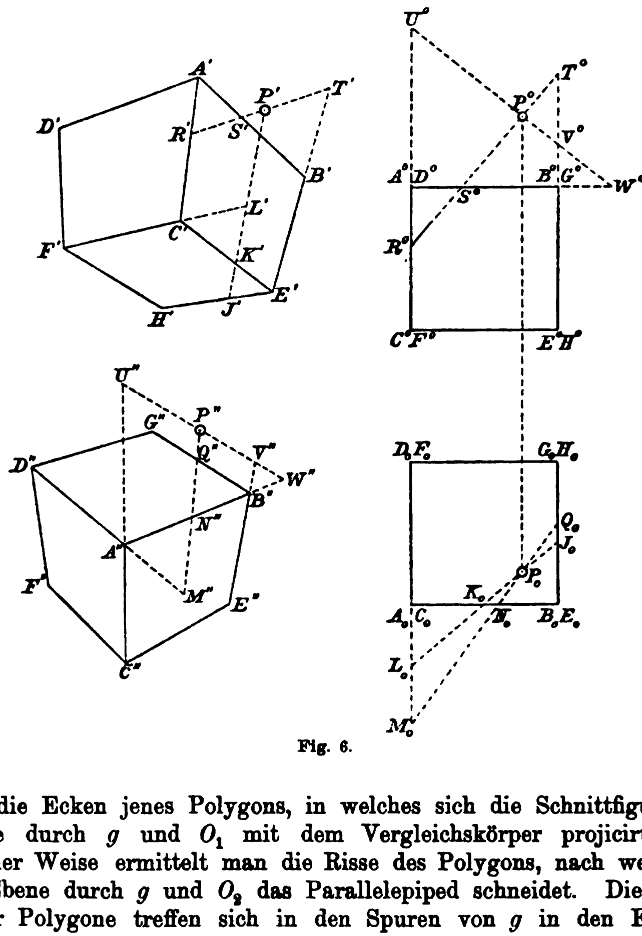


Fig. 6.

sind die Ecken jenes Polygons, in welches sich die Schnittfigur der Ebene durch g und O_1 mit dem Vergleichskörper projicirt. In gleicher Weise ermittelt man die Risse des Polygons, nach welchem die Ebene durch g und O_2 das Parallelepiped schneidet. Die Risse beider Polygone treffen sich in den Spuren von g in den Ebenen des Parallelepipeds.

17. Besitzt das zu reconstruirende Object eine Symmetrie-Ebene, so ist zu beachten, dafs irgend ein Bild e_1 des Objectes, das von einem Standpunkt O_1 aufgenommen wurde, uns zugleich das Bild e_2

desselben Objectes von einem Standpunkte O_2 aus giebt, wobei sowohl O_2 wie die Ebene e_2 symmetrisch zu O_1 und zur Bildebene e_1 in Bezug auf die Symmetrie-Ebene des Gegenstandes anzunehmen sind. Das Bild e_2 ist einfach das symmetrische zu e_1, es ist die linke und rechte Ansicht des Objectes vertauscht. Aber auch die Kernpunkte auf den beiden Bildern e_1 und e_2 lassen sich hier unmittelbar

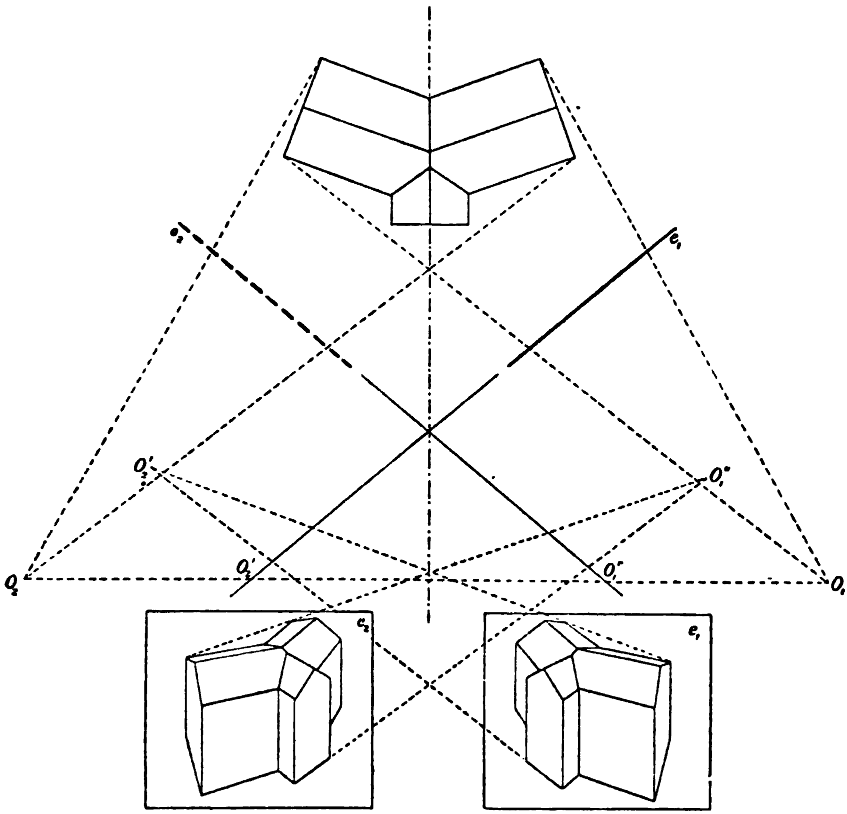


Fig. 7.

angeben. Sie sind nämlich die Punkte, in welchen sich die Verbindungslinien der Bilder symmetrisch gelegener Punkte schneiden. [Vergl. Fig. 7]. Damit ist auch die Anzahl der Bilder gegeben, welche zur Reconstruction eines symmetrischen Objectes notwendig sind. Man sieht, dafs eine oder auch beliebig viele abgeleitete Perspectiven das Object bis auf allerdings ∞^4 der Form nach verschiedene Collineationen bestimmen. Eine wirkliche Photographie

läſst auſser der Ähnlichkeit noch eine einfache Mannigfaltigkeit von Collineationen zu. Zwei directe Perspectiven bestimmen das Object bis auf den Maſsstab. **Eine Photographie mit bekannter innerer Orientirung reicht aus, das symmetrische Object bis auf den Maſsstab zu reconstruiren** (nach 15.).

18. Man kann, sofern es sich um kleinere Objecte handelt, den **vereinfachenden Fall der Symmetrie künstlich dadurch herstellen, daſs man das Object samt seinem Spiegelbild photographirt.** Diese Methode empfiehlt sich vor allem dort, wo es sich um die photogrammetrische Aufnahme vergänglicher Objecte handelt, weil hiebei eine einzige Momentaufnahme statt zweier gleichzeitiger ausreicht, sobald nämlich die innere Orientirung des Bildes bekannt ist. Ist dieselbe unbekannt, wie es namentlich bei Mikroskopaufnahmen wegen der Complication der benützten Objectiv-Construction und der Instabilität der zur Verwendung kommenden Balgcamera der Fall sein wird, so kann man die Methode der Symmetrie mit der Methode des Vergleichskörpers combiniren. Von den vielen Möglichkeiten, die in dieser Hinsicht vorliegen, schlage ich eine als für viele Zwecke besonders geeignete vor. **Man benützt 3 senkrecht zu einander stehende Spiegel,** auf welchen die Seiten eines Quadrates von bekannter Länge eingeritzt sind. Ein Object, welches in das Innere des von den Spiegeln gebildeten Dreikants gebracht wird, erscheint dann siebenmal gespiegelt, und die 7 Spiegelbilder liegen mit dem Object in den 8 Ecken eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Symmetrieebenen mit den Spiegelebenen zusammenfallen. Die Gesamtheit des Objectes und seiner Spiegelbilder bildet dann ein einziges Object mit 3 Symmetrieebenen, und die eingeritzten Linien geben die Elemente eines Vergleichskörpers. In umstehender Figur 8 sei P das Bild eines Objectpunktes, die directen Spiegelbilder desselben seien $P'P''P'''$, die zweifach gespiegelten $P^{IV}P^{V}P^{VI}$ und das dreifach gespiegelte P^{VII}. Um die Lage des Punktes zu fixiren, werden die drei zu einander senkrechten Kanten, in welchen sich die Spiegel treffen, als Coordinatenaxen angenommen. Die Projectionen des Punktes P auf die drei Coordinatenaxen findet man nun durch Aufsuchung des Schnittpunktes der Verbindungslinie zweier erster Spiegelbilder mit einer der drei Kanten; z. B. wird P_z als Schnitt von $P'P''$ mit OZ, P_y als Schnitt von $P'P'''$ mit OY, P_x als Schnitt von $P''P'''$ mit OX gefunden. Wären diese Schnitte zufällig ungünstig, so kann $P'P''$ auch durch PP^{VI}, $P'P'''$ durch PP^{V}, $P''P'''$ durch PP^{IV} ersetzt werden. Daſs es noch zahlreiche andere Constructionen für die Punkte $P_xP_yP_z$ giebt, möge nur nebenbei erwähnt werden. Sie würden nur dann in Frage kommen, wenn die angeführten versagen. Aus den Punkten $P_xP_yP_z$ in Verbindung mit den Punkten $X, -X$; $Y, -Y$; $Z, -Z$ werden die Coordinaten nach der Formel 2c) berechnet. In ähnlich ein-

facher Weise können auch die **Elemente einer Geraden** reconstruirt werden. Es sei g das Bild einer Geraden, g', g'', g'''; g^{IV}, g^{V}, g^{VI}; g^{VII} die Bilder der Spiegelbilder derselben, so können die Bilder der Spurpunkte der Geraden auf den drei Ebenen einfach dadurch gefunden werden, dafs man zwei zusammengehörige Spiegelbilder, etwa g und g', bis zu ihrem Schnitt verlängert. Der Schnittpunkt S_1 ist dann das Bild des Spurpunktes der Geraden auf der YZ-Ebene. In ähnlicher Weise findet man die Bilder S_2 und S_3 der Spuren in den beiden anderen Coordinatenebenen. Die Ermittlung ihrer Coordinaten erfolgt im wesentlichen wie bei einem Punkte P, sie ist nur etwas

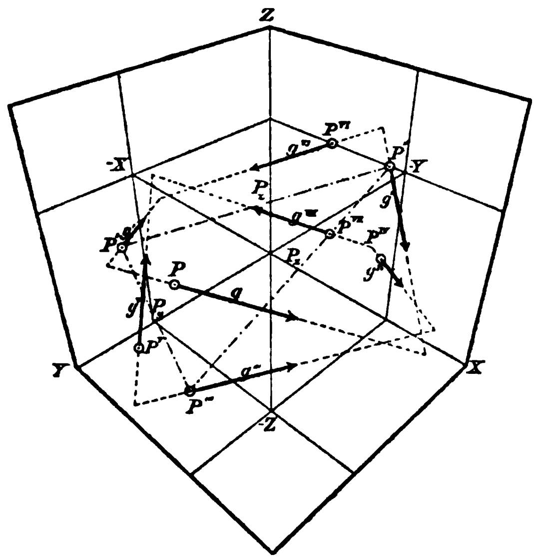


Fig. 8.

einfacher. Wenn eine Ebene durch zwei Geraden gegeben ist, so bestimmt man die Bilder der Spurpunkte der Geraden und durch ihre Verbindung die Bilder der Spuren der Ebene. Dieselben schneiden sich auf den Bildern der Coordinatenaxen. Die oben erwähnte Formel gestattet dann die Abschnitte der Ebene auf den drei Coordinatenaxen zu berechnen.

Ein Vorteil der auseinandergesetzten Methode besteht darin, dafs die Undurchsichtigkeit des dargestellten Körpers sehr viel weniger stört, als das bei den übrigen Methoden der Fall ist, da jede Partie des Körpers mindestens auf zweien von den 8 Bildern dargestellt sein wird und hieraus construirt werden kann. Wenigstens ist das dann der Fall, wenn der dargestellte Körper ein überall convexes Polyeder ist. Die Methode eignet sich daher vorzüglich zur Ausmessung **vergänglicher Krystalle**. Sie ist hier so auseinandergesetzt worden, dafs zu den Constructionen **möglichst wenig Linien** erforderlich sind, was für eine genaue Ausführung von Vorteil ist. Ich erwähne aber, dafs, wenn man längere Constructionen nicht scheut und aufserdem die Benützung der Fluchtpunkte der aus-

gezeichneten Richtungen heranzieht, man aus einer Photographie eines solchen Krystalles die sogenannte Neumann'sche Polarprojection (gnomonische Projection) desselben entwickeln und aus ihr den Zusammenhang der Zonen, die Axenwinkel und so weiter unmittelbar entnehmen kann.

Reconstruction der Lage des Standpunktes gegenüber dem Object aus einer Perspective.

19. Die bisher auseinandergesetzten Constructionsmethoden, namentlich soweit sie auch auf Benützung der Kernpunkte beruhen, haben in der photogrammetrischen Praxis bis jetzt keinen Eingang gefunden. Die Gründe hiefür sind darin zu suchen, dafs die photographische Aufnahme der Kernpunkte wegen der Gröfse des dabei benötigten Bildwinkels des photographischen Objectives, wegen der Unthunlichkeit, die gegnerischen Standpunkte zu signalisiren, und wegen der oft eintretenden Unmöglichkeit, die Sichten zwischen zwei Standpunkten frei zu halten, häufig unmöglich wird. Die Aufsuchung der Kernpunkte aus 7 bis 8 Paaren zusammengehöriger Bildpunkte nach (8) begegnet beträchtlichen theoretischen und praktischen Schwierigkeiten. Endlich ist auch die Benützung der richtig ermittelten Kernpunkte, da sie graphische Constructionen auf den photographischen Bildern voraussetzt, mit technischen Schwierigkeiten verknüpft. Die photogrammetrische Praxis sieht daher von der Benützung der Kernpunkte ab und begiebt sich damit allerdings fürs erste des Vorteils, der in der Kenntniss des Orientirungszusammenhanges zweier Bilder liegt. Sie sucht die einzelnen Standpunkte für sich ohne Rücksichtnahme auf Bilder, die von anderen Standpunkten aufgenommen worden sind, zu ermitteln, und der erwähnte Zusammenhang kommt dann schliefslich nur in der Form von Controlen der Punktbestimmung zur Geltung.

20. Ich gehe nun zur Erörterung der Methoden über, welche zur unabhängigen Bestimmung des Standpunktes dienen, von dem aus eine Photographie aufgenommen wurde. Eine solche Bestimmung setzt natürlich die Kenntniss von Abmessungen des Objectes voraus. Wir wollen zunächst einige unvollständige Bestimmungen des Standpunktes kennen lernen. So läfst sich die Horizontalprojection eines Standpunktes stets ermitteln, wenn auf dem Bild 7 Punkte ausfindbar sind, deren Grundrifs man kennt. Der Grundrifs des Standpunktes ist hier nämlich nichts anderes, als der gegnerische Kernpunkt der Perspective, wenn man den Grundrifs selbst als Perspective mit unendlich fernem Centrum auffafst. Der Kernpunkt im photographischen Bild stellt den Fluchtpunkt der verticalen Linien dar. Wäre derselbe von vornherein bekannt, sei es nun, dafs eine Reihe von verticalen Linien mit zur Abbildung

kommen, oder dafs man weifs, dafs die Bildebene vertical stand, und die Richtung des Horizontes bekannt ist, so genügen 5 Punkte des Grundrisses und die Kenntniss ihrer Bilder zur Reconstruction

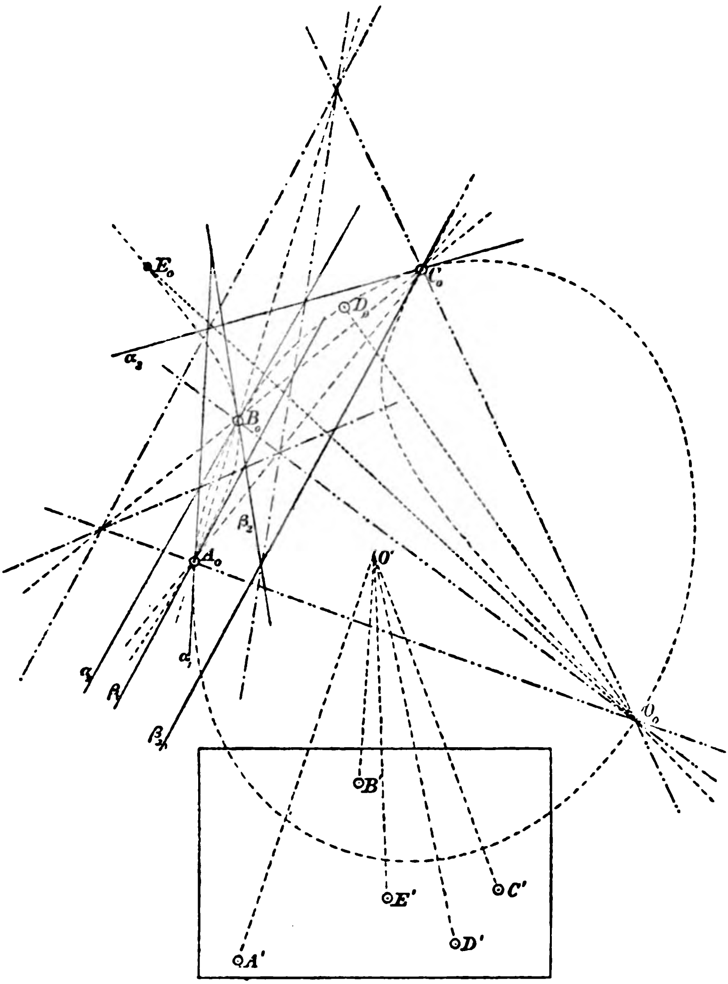


Fig. 9.

des Grundrisses des Standpunktes. Diese Aufgabe, welche zuerst von H. Müller in Freiburg gelöst wurde, ist von Professor Steiner in Prag unter dem Namen des „Problems der 5 Punkte“ in die photogrammetrische Litteratur eingeführt worden. [Die

Photographie im Dienste des Ingenieurs, Wien 1891, pag. 24.] Man kann sie auf graphischem Wege folgendermafsen lösen. Es seien $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ die Grundrisse der fünf bekannten Punkte des Objectes, O_0 der gesuchte Grundrifs des Standpunktes, $O'(A'B'C'D'E')$ das Strahlenbüschel der Bildebene, das dem Büschel $O_0(A_0 B_0 C_0 D_0 E_0)$ projectiv sein soll. Man betrachte nun in dem Kegelschnittbüschel mit den Grundpunkten $A_0 B_0 C_0 O_0$ die Kegelschnitte, welche durch D_0 und E_0 hindurch gehen. Von jedem kennt man 4 Punkte, sowie das Doppelverhältniss, welches sie mit einander auf der Curve einschliefsen. Letzteres ist nämlich gleich dem entsprechenden Doppelverhältniss im Strahlenbüschel O'. Man kann sich nun durch Übertragung von Doppelverhältnissen ($2a$) die Tangenten an diese beiden Kegelschnitte in den Punkten $A_0 B_0 C_0$ verschaffen. Es seien dies die Geraden $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_2\beta_2$, $\alpha_3\beta_3$, [siehe Fig. 9]. Sie schneiden sich nach einem bekannten Satz über Kegelschnittbüschel zu je zweien auf den Seiten des gemeinsamen Polardreieckes des Kegelschnittbüschels. Die Ecken dieses Polardreiecks liegen aufserdem auf den bekannten Verbindungslinien $A_0 B_0$, $B_0 C_0$, $C_0 A_0$. Vom vollständigen Vierseit mit den Ecken $A_0 B_0 C_0 O_0$ kann somit das Dreieck der Diagonalschnittpunkte gefunden werden, und daraus ergiebt sich von selbst die Construction der noch fehlenden Ecke O_0. (Vergl. Kinkel: Wochenschr. d. öst. Ing.- u. Arch.-Ver. 1891. Nr. 32.)

Eine analytische Lösung der Aufgabe ist von Herrn Steiner a. a. O. S. 29—31 gegeben worden, welche zu folgendem Formelsystem für die Coordinaten $x_0 y_0$ des Punktes O_0 führt:

$$x_0 = -\frac{D \operatorname{tg}\omega + E}{A \operatorname{tg}^2\omega + B \operatorname{tg}\omega + C} = -\frac{D' \operatorname{tg}\omega + E'}{A' \operatorname{tg}^2\omega + B' \operatorname{tg}\omega + C'};$$

$$y_0 = x_0 \operatorname{tg}\omega.$$

Dabei ist:

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{CE' - C'E}{A'D - D'A} \cdot \frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2};$$

$$A = x_1 x_2(\delta_1 - \delta_2) + x_2 x_3(\delta_2 - \delta_3) + x_3 x_1(\delta_3 - \delta_1),$$

$$B = -[(x_1 y_2 + x_2 y_1)(\delta_1 - \delta_2) + (x_2 y_3 + x_3 y_2)(\delta_2 - \delta_3) \\ + (x_3 y_1 + x_1 y_3)(\delta_3 - \delta_1)],$$

$$C = y_1 y_2(\delta_1 - \delta_2) + y_2 y_3(\delta_2 - \delta_3) + y_3 y_1(\delta_3 - \delta_1),$$

$$D = -[x_1 x_2 y_3(\delta_1 - \delta_2) + x_2 x_3 y_1(\delta_2 - \delta_3) + x_3 x_1 y_2(\delta_3 - \delta_1)],$$

$$E = -[y_1 y_2 x_3(\delta_1 - \delta_2) + y_2 y_3 x_1(\delta_2 - \delta_3) + y_3 y_1 x_2(\delta_3 - \delta_1)].$$

Die Gröfsen $A'B'C'D'E'$ gehen aus $ABCDE$ durch Vertauschung von δ_3 mit δ_4 und $x_3 y_3$ mit $x_4 y_4$ hervor. Die Coordinaten der Punkte sind: $A_0 : o\,o$, $B_0 : x_1 y_1$, $C_0 : x_2 y_2$, $D_0 : x_3 y_3$, $E_0 : x_4 y_4$.

$$d_1 = \frac{1}{\delta_1} = A_1 B_1;\ d_2 = \frac{1}{\delta_2} = A_1 C_1;\ d_3 = \frac{1}{\delta_3} = A_1 D_1;\ d_4 = \frac{1}{\delta_4} = A_1 E_1$$

sind die Entfernungen von 4 Punkten $A_1 B_1 C_1 D_1$, welche das Doppelverhältniss des Büschels $O'(A'B'C'D')$ haben. Die Lösung der Aufgabe der 5 Punkte wird illusorisch, wenn der Grundrifs O_0 des Standpunktes zufällig auf den Kegelschnitt fällt, der durch die 5 Punkte $A_0 B_0 C_0 D_0 E_0$ bestimmt ist. Man bezeichnet daher diesen Kegelschnitt in Anlehnung an die Analogie beim Pothenot'schen Problem als „gefährliche Curve".

Wenn die innere Orientirung der benutzten Photographie bekannt ist, geht das Problem der 5 Punkte in das Pothenot'sche Problem über, das nur die Kenntniss der Grundrisse dreier Objectpunkte voraussetzt; der „gefährliche Kegelschnitt" wird zum „gefährlichen Kreis", der dem Dreieck der gegebenen Grundrifspunkte umschrieben ist.

21. Von einem Object ist eine Photographie ohne innere Orientirung gegeben. Man soll den Standpunkt und die innere Orientirung der Photographie finden. Dazu braucht man die Kenntniss der gegenseitigen Lage von 6 Punkten des Objectes. Die Construction wird auf den Fall, der im vorigen Paragraphen behandelt wurde, zurückgeführt. Ich denke mir den gesuchten Punkt O mit einem der gegebenen Punkte A verbunden. Lege ich dann durch diese Verbindungslinie und die 5 übrigen Punkte ein Ebenenbüschel, so mufs dieses projectiv sein zum Strahlenbüschel, welches in der Photographie von A' nach den Bildern der 5 übrigen Punkte gezogen wird. Diese Axe AO, und damit einen geometrischen Ort für den Punkt O, kann man nun so bestimmen, dafs man den Schnitt P_0 derselben mit irgend einer Ebene, z. B. der Grundrifsebene, auf welche das Object bezogen ist, aufsucht. Projicirt man von A aus die Punkte B, C, D, E, F auf die Grundrifsebene in die Punkte $B_0 C_0 D_0 E_0 F_0$, dann ist P_0 derjenige Punkt, von dem aus das Strahlenbündel nach $B_0 C_0 D_0 E_0 F_0$ projectiv ist mit dem erwähnten Ebenenbüschel und also auch mit dem Strahlenbüschel von A' nach $B'C'D'E'F'$. Die Construction des Punktes P_0 ergiebt sich aus dem vorigen Paragraphen. Seine Verbindungslinie mit A giebt einen geometrischen Ort für den Punkt O. Weitere geometrische Örter erhält man, wenn man statt des Punktes A einen der übrigen auszeichnet. Die Construction wird illusorisch, wenn der zu construirende Punkt O auf der durch die 6 Punkte $ABCDEF$ gelegten Raumcurve 3. Ordnung liegt. Denn in diesem Falle versagt bereits die Construction des Punktes P_0, da dieser dann mit den 5 Punkten $B_0 C_0 D_0 E_0 F_0$ auf einem Kegelschnitt liegt, nämlich auf jenem, der von den durch A gehenden Sehnen der Raumcurve 3. Ordnung in der Grundrifsebene ausgeschnitten wird. Die durch die 6 Punkte des Objectes gehende Raumcurve 3. Ordnung

ist daher eine „gefährliche Curve“ für die Bestimmung des Punktes O.*)

22. Es sei eine Photographie samt innerer Orientirung gegeben. Die Lage des Standpunktes ist zu finden. Dazu ist die Kenntniss dreier Punkte des zu suchenden Objects nötig, deren Bilder auf der Photographie erkennbar sein müssen. Verbindet man diese Bilder mit dem perspectivischen Centrum, so entsteht ein Dreikant, dessen Seiten und Winkel bekannt sind. Die Aufgabe reducirt sich darauf, dieses Dreikant durch eine Ebene so zu schneiden, dafs das Schnittdreieck dem Dreieck der gegebenen 3 Punkte des Objectes congruent ist. Diese Aufgabe ist wiederholt behandelt worden, so z. B. in der Dissertation von Walfried Marx (Über eine Fl. 4 · O mit reellem Doppelkegelschnitt etc. München 1880, S. 5.).

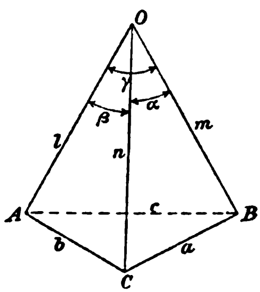


Fig. 10.

Die Aufgabe hat 4 verschiedene Lösungen, wie folgender analytischer Ansatz zeigt:

$$a^2 = m^2 + n^2 - 2mn\cos\alpha,$$
$$b^2 = n^2 + l^2 - 2nl\cos\beta,$$
$$c^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos\gamma,$$

Hieraus erhält man

$$m^2b^2 + n^2(b^2 - a^2) - l^2a^2 - 2mnb^2\cos\alpha + 2nla^2\cos\beta = 0,$$

$$\left(\frac{m}{l}\right)^2 b^2 + \left(\frac{n}{l}\right)^2 (b^2 - a^2) - 2\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}\, b^2\cos\alpha + 2\frac{n}{l}\, a^2\cos\beta - a^2 = 0$$

und analog:

$$\left(\frac{n}{l}\right)^2 c^2 + \left(\frac{m}{l}\right)^2 (c^2 - a^2) - 2\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}\, c^2\cos\alpha + 2\frac{m}{l}\, a^2\cos\gamma - a^2 = 0.$$

Die Elimination eines der beiden Verhältnisse $\frac{m}{l}$ und $\frac{n}{l}$ führt auf eine Gleichung 4. Grades für das andere Verhältnis. An Stelle der etwas langwierigen analytischen Lösung wendet man besser folgendes geometrisches Näherungsverfahren an. Man schneidet das Dreikant an einer Kante (l) auf und breitet es in die Ebene aus. In die 3 Winkel α, β, γ pafst man nun durch Probiren die 3 Strecken *abc* [am einfachsten mit Hilfe eines dreifüfsigen Zirkels, dessen Spitzen man auf die 3 Strecken a, b, c einstellt] so ein, dafs die aufgeschnittene Kante auf beiden Seiten gleich lang erscheint. Auf diese Weise erhält man auf jeden Fall einen Näherungswert für die

*) Die vorgetragene Lösung der Aufgabe der 6 Punkte stammt von Herrn E. Waelsch. Siehe Steiner, Die Photographie etc. S. 53.

letztere. Man kann dann die ebene Figur mit dem Näherungswert l und den Gegenseiten abc sowie den Winkeln $\alpha\beta\gamma$ unter Benützung logarithmischer Differenzen durchrechnen und auf diese Weise eine Correctur für den Näherungswert so ermitteln, daſs das Tetraeder beim Zusammenlegen sich schlieſst. Die weitere Construction des Grundrisses und Aufrisses des Standpunktes erfolgt nach bekannten Regeln der darstellenden Geometrie oder, wenn man die Rechnung vorzieht, mittels Auflösung einiger sphärischer Dreiecke.

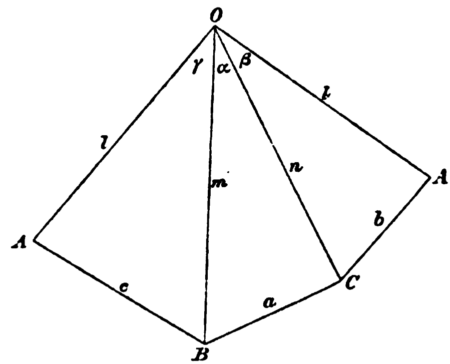


Fig. 11.

Von Wichtigkeit ist auch in diesem Fall die Untersuchung derjenigen Raumpunkte, für welche die Lösung der Aufgabe illusorisch wird. Der hier auftretende „gefährliche Ort“ hat einen wesentlich anderen Charakter als bei den früheren Aufgaben. Dies hängt mit der Mehrdeutigkeit der Aufgabe zusammen. Man muſs zweierlei Arten von „gefährlichen Oertern“ unterscheiden. Bei der einen Art, die bei der eindeutigen Lösung eintritt, ist eine Verschiebung des gesuchten Punktes längs des ganzen geometrischen Ortes mit den Bedingungen der Aufgabe verträglich. Das drückt sich analytisch dadurch aus, daſs die Coefficienten der linearen Gleichungen, aus welchen sich der Punkt bestimmt, den Wert Null bekommen. Ist die Lösung mehrdeutig, so tritt eine andere Gattung von gefährlichen Oertern auf, die analytisch dadurch charakterisirt ist, daſs zwei von den sonst verschiedenen Lösungen zusammenfallen. Es ist dann die Lösung der Aufgabe nicht in dem Sinne unbestimmt, daſs eine endliche Verschiebung des gesuchten Punktes mit den Bedingungen verträglich wäre. Die Sache liegt vielmehr so, daſs eine Verschiebung um ein Unendlichkleines erster Ordnung in irgend einer Richtung erfolgt, sobald die Bestimmungsstücke nur um ein Unendlichkleines von der zweiten oder höherer Ordnung geändert werden. Für die Praxis ist die zweite Art in der Regel gefährlicher als die erste, weil sie eine ausgedehntere Punkt-Mannigfaltigkeit betrifft und daher schwerer zu vermeiden ist. Dies gilt wenigstens für räumliche Probleme.*)

*) Die beiden Arten gefährlicher Oerter werden am einfachsten veranschaulicht, wenn man die Aufgabe in Betracht zieht, einen Punkt in

Um den gefährlichen Ort in unserem Fall festzulegen, bedienen wir uns kinematischer Vorstellungen. Wir denken uns das Dreikant in das Dreieck eingepafst. Wenn dabei dem Dreieck gegenüber dem Dreikant noch eine unendlich kleine Beweglichkeit zukommt, so liegt die Spitze des Dreikants in dem gefährlichen Ort. Es sei [Fig. 12] ABC das Dreieck, O die Projection der Spitze des Dreikants auf die Ebene ABC. Wir schneiden nun das Dreikant mit einer zur Projectionsebene ABC unendlich benachbarten Ebene. Es sei $A_1B_1C_1$ die Projection des Schnittdreieckes. Die Seiten der Projection können sich nur um ein Unendlichkleines der 2. Ordnung von ihren wahren Längen unterscheiden, sobald der Winkel der beiden Dreiecksebenen unendlichklein von der 1. Ordnung ist. Wenn es also, wie im Fall des gefährlichen Ortes, zwei unendlich benachbarte congruente Schnittdreiecke giebt, so mufs $A_1B_1C_1$ bis auf Gröfsen zweiter Ordnung mit ABC congruent sein. Durch Drehung um eine zur Projectionsebene ABC verticale Axe kann ich dann das Dreieck $A_1B_1C_1$ immer zur Deckung mit ABC bringen.

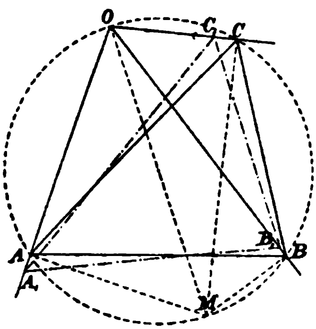


Fig. 12.

Das zugehörige Momentancentrum M wird gefunden, indem man in den Punkten ABC Lote auf AO, BO, CO errichtet. Diese drei Lote müssen sich in M schneiden, was nur dann möglich ist, wenn ABC auf einem Kreis mit dem Durchmesser OM liegen. Die Spitze des Dreikantes liegt alsdann auf dem geraden Kreiscylinder, der sich über dem Umkreis des Dreiecks ABC erhebt, und dieser Kreiscylinder ist der gesuchte gefährliche Ort zweiter Art.

Der Kreis in der Ebene ABC selbst ist, wie im Fall des Pothenot'schen Problems, ein gefährlicher Ort erster Art. Ob man die ganze Ebene des Dreiecks ABC zu dem gefährlichen Orte

der Ebene gegenüber zwei anderen festzulegen. Werden zur Festlegung die beiden Winkel an der Basis benutzt, so besteht ein gefährlicher Ort für den festzulegenden Punkt in der Linie der Basis. Dieser ist von der ersten Art. Die Lage des Punktes längs der ganzen Basis ist dann unbestimmt. Nehmen wir aber an, es sei der Punkt durch die Entfernungen von den beiden Basispunkten festgelegt, so ist wiederum die Linie der Basis ein gefährlicher Ort, aber er ist hier von der zweiten Art. Wenn der festzulegende Punkt sich zufällig auf demselben befindet, so ist die Bestimmung desselben quer zur Linie der Basis insofern unsicher, als eine unendlich kleine Veränderung der Mafszahlen von der zweiten Ordnung eine Verschiebung des festgelegten Punktes von der ersten Ordnung quer zur Basis hervorruft.

rechnen will, hängt wesentlich davon ab, ob man annimmt, dafs im Dreikant blos die Seiten oder auch die Winkel gegeben sind. Im ersteren Fall ist die Ebene zum gefährlichen Ort hinzuzurechnen, da beim Heraustreten des Punktes O um ein Unendlichkleines 1. Ordnung die Seiten sich nur um ein Unendlichkleines 2. Ordnung ändern. Die Winkel des Dreikants allerdings ändern sich auch um ein Unendlichkleines 1. Ordnung. Aus dem photographischen Bild kann man sowohl die Seiten als auch die Winkel des Dreikants entnehmen, und man wird hieraus die Lehre ziehen, dafs es im Fall eines flachgedrückten Dreikants wichtig ist, die Winkel desselben direct aus der Photographie zu construiren.

23. Ein specieller, für die Praxis nicht unwichtiger Fall tritt dann ein, wenn einer der 3 Punkte des Dreiecks ins Unendliche rückt. In diesem Fall sind am Object zwei Punkte A und B und eine Richtung als bekannt vorausgesetzt. Auf der Photographie sind die Bilder beider Punkte und der Fluchtpunkt der Richtung gegeben. Verbindet man das Centrum der Perspective mit den beiden Bildern und dem Fluchtpunkt, so entsteht ein Dreikant. Dieses Dreikant ist parallel zu einer Kante durch eine Ebene so zu schneiden, dafs die Punkte A und B in zwei Kanten eingepafst werden können, während die ausgezeichnete Richtung parallel zur dritten steht. Die Aufgabe hat zwei Lösungen. Wir wollen, um den Fall der Praxis gleich ins Auge zu fassen, annehmen, die ausgezeichnete Richtung sei die verticale.*) Dann kann man jenem Dreikant die beiden Höhenwinkel β_1 und β_2 [Seiten des Dreikants] und den Horizontalwinkel α [Winkel des Dreikants] entnehmen, welche die Sichten vom Standpunkt O nach den Punkten A und B einschliefsen. Ist z_1 die Höhe von A über der Projectionsebene, z_2 die von B, und z die gesuchte Höhe des Standpunktes O, sind ferner r_1 und r_2 die Entfernungen des Grundrisses O_0 von den Punkten A_0 und B_0 und a die Länge A_0B_0, so wird

$$a^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha; \quad r_1 = (z - z_1)\operatorname{cotg}\beta_1;$$
$$r_2 = (z - z_2)\operatorname{cotg}\beta_2.$$

*) Gleich der vorigen kommt diese Aufgabe bei der Ballonphotogrammetrie zur Rückwärtsbestimmung des Standpunktes zur Verwendung. Um die ausgezeichnete Lotrichtung trotz der Beweglichkeit der Gondel auf der photographischen Platte zu fixiren, bringt man am Aequator des Ballons eine Anzahl (6 bis 8) Lote von solcher Länge an, dafs sie erheblich unter die Gondel herabreichen. Diese von den Bewegungen der Gondel unbeeinflufsten Lote hängen vertical. Wenn sich zwei derselben auf der photographischen Platte abbilden, so giebt der Schnittpunkt der Bilder den Fluchtpunkt der Verticalen und gleichzeitig auf dem Bild die Horizontalprojection des Ballonortes.

Setzt man in die erste Gleichung die Werte von r_1 und r_2 ein, so erhält man folgende quadratische Gleichung für die Höhe z:

$$\begin{aligned} a^2 = (z - z_1)^2 \operatorname{cotg}^2 \beta_1 + (z - z_2)^2 \operatorname{cotg}^2 \beta_2 \\ - 2(z - z_1)(z - z_2) \operatorname{cotg} \beta_1 \operatorname{cotg} \beta_2 \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Ist z ermittelt, so folgen die übrigen Stücke mittels einfacher Rechnung. Der „gefährliche Ort" zweiter Art wird die Ebene durch die Basis AB, welche senkrecht auf einer durch sie und die ausgezeichnete Richtung gelegten Ebene steht.

Die Aufstellung und Auflösung der quadratischen Gleichung läfst sich mit Hilfe eines graphischen Näherungsverfahrens umgehen, welches immer dann mit Vorteil angewendet werden kann, wenn man bereits einen Näherungswert für die Höhe z des zu suchenden Standpunktes kennt. Die Kenntnis der drei Winkel β_1, β_2 und α verschafft uns drei geometrische Oerter für den Punkt O, nämlich zwei Kreiskegel mit verticaler Axe, der Spitze in A bezw. B und dem Oeffnungswinkel $2\beta_1$ bezw. $2\beta_2$, und einen verticalen Cylinder über demjenigen Kreis, der über der Projection der Basis AB einen Peripheriewinkel α faſst. Horizontalebenen schneiden die drei geometrischen Oerter nach Kreisen, die sehr leicht construirt werden können. Legt man nun Horizontalschnitte in der genäherten Höhe z', so werden die drei Kreise ein kleines fehlerzeigendes Dreieck $O'O''O'''$ bilden, das sich für die genaue Höhe z auf einen Punkt reducirt. Der wahre Ort kann aus zwei solchen fehlerzeigenden Dreiecken als Schnittpunkt der Verbindungslinien entsprechender Ecken gefunden werden.

24. Die in den Paragraphen 19—22 auseinandergesetzten Methoden zur Bestimmung des Standortes sind sämtlich für die Ballonphotogrammetrie von Wichtigkeit, sei es, dafs man den Ballonort zur Auskundschaftung von Objecten, welche anderweitig nicht zugängig sind, benötigt, oder dafs man den Ballonort um seiner selbst willen möglichst genau zu bestimmen sucht, wie bei meteorologischen Beobachtungen im Ballon. Während man im ersteren Fall zumeist auf eine möglichst geringe Zahl bekannter Terrainobjecte sich zu beschränken hat und die Lösungen der vorigen Paragraphen direct zur Anwendung kommen, wird man im letzteren Fall häufig über eine grofse Zahl bekannter Terrainobjecte verfügen. Dann tritt die Frage nach der Auswahl aus denselben oder nach der sachgemäfsen Benützung aller um so mehr in den Vordergrund, als die kartographische Festlegung der benützten Terrainobjecte in der Regel an gewissen Unvollkommenheiten leidet. Ich habe folgendes Verfahren in letzterem Fall als zweckentsprechend erprobt. Die Terrainobjecte welche zur Benützung kommen, können teils Punkte teils Linien sein, und letztere [Strafsenzüge, Eisenbahnen, Flurgrenzen] sind auf den Photographieen häufig sicherer zu er-

kennen als einzelne Punkte. Nehmen wir zunächst an, das Terrain sei vollkommen eben. Vergl. Fig. 13.*) Man kann dann auf der Karte ein Netz von Linien ziehen, das teils aus bekannten Linien, teils aus den Verbindungslinien bekannter Punkte besteht. Das correspondirende Netz auf der Ballonphotographie sei ebenfalls gezogen. Nun betrachte ich eine geradlinige Punktreihe $ABCD$, die in einer Linie des Netzes auf der Karte liegt, und das zugehörige Strahlenbüschel, welches vom perspectivischen Centrum nach den entprechenden Punkten $A'B'C'D'$ der Photographie geht. Letzteres läſst sich mit Hilfe der inneren Orientirung der Photographie construiren. Nun wird die Punktreihe in dasselbe eingepaſst und vom

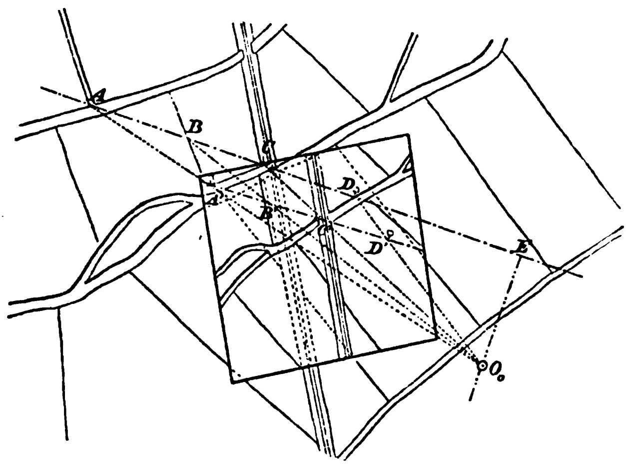


Fig. 13.

Centrum des Büschels ein Lot OE auf die eingepaſste Punktreihe gefällt. Wird der Fuſspunkt E dieses Lotes in die Punktreihe auf der Karte übertragen und dort eine Senkrechte zu ihrem Träger errichtet, so ist dies ein geometrischer Ort für den Grundriſs O_0 des Ballonortes. So lassen sich eine Menge geometrischer Oerter für diesen Grundriſs finden, die sich zwar in dem Fall, daſs das Terrain nicht genau eben ist, nicht in einem Punkt schneiden werden, aber doch eine angenäherte Bestimmung des Grundrisses des Ballonortes ermöglichen. Für die Höhe des Ballonortes über dem Grundriſs ergeben sich dann ebensoviele Bestimmungen, als geometrische Oerter vorhanden waren, und aus ihnen läſst sich ein Mittel ziehen, das der wahren Höhe wenigstens annähernd entspricht. Mit Hilfe des so gefundenen genäherten Ballonortes kann man nun, falls die

*) Dieselbe stellt ein Stück des Terrains (Karte) samt photogr. Bild im gegenseitigen Zusammenhang von oben gesehen (Grundriſs) dar.

Höhen der benützten Punkte in der Karte angegeben sind, die Centralprojection der einzelnen Punkte und Linien vom genäherten Standpunkte aus ermitteln und diese, vom Grundriſs nur wenig verschiedene Centralprojection zur Grundlage einer genaueren Construction des Ballonortes machen, die dann zu einer besseren Übereinstimmung führen wird. Das Verfahren setzt allerdings voraus, daſs die Terrainunebenheiten gering sind im Vergleich zu der zu ermittelnden Ballonhöhe und daſs die benützten Strahlenbüschel nicht nahezu in einer horizontalen Ebene liegen.

Entnahme von Winkeln aus orientirten Bildern, Zusammenschluſs verschiedener Bilder, Construction der Objectpunkte in speciellen Fällen.

25. Bei den vorhergehenden Aufgaben ist die Entnahme von Winkeln aus orientirten Photographien als bekannt vorausgesetzt. Dieselbe bietet in der That keinerlei Schwierigkeiten, sei es, daſs man sie mit den Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie oder mittels trigonometrischer Rechnung durchführt. Besondere Vereinfachungen lassen sich im allgemeinen nicht anbringen. Jedoch

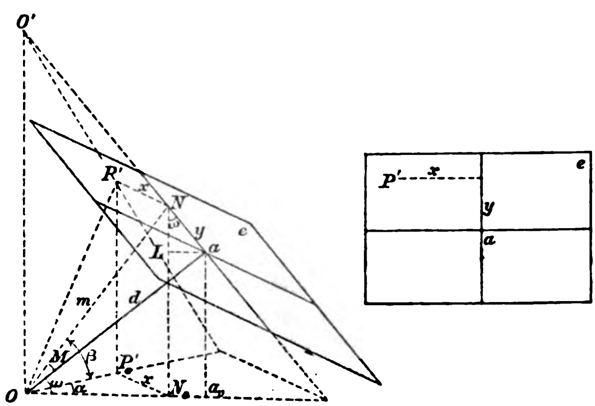


Fig. 14.

in dem speciellen Fall, daſs die Lotrichtung ausgezeichnet ist und es sich um die Entnahme von horizontalen und verticalen Winkeln handelt, ist einiges zu bemerken. Herr Koppe*) hat für den Fall, daſs die optische Axe der aufgenommenen Photographie mit dem Horizont einen Winkel ω einschlieſst, folgende Formeln für den Höhenwinkel β und die Azimutaldifferenz α gegenüber einer durch

*) Photogrammetrie. Weimar 1889. S. 8.

die optische Axe gelegten Verticalebene angegeben, welche an der Hand umstehender Figur 14 unmittelbar zu entwickeln sind:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{P_0' N_0}{O N_0} = \frac{P_0 N_0}{O a_0 - N_0 a_0} = \frac{x}{d \cos\omega - y \sin\omega},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_0' P'}{O P_0'} = \frac{N_0 N}{O N_0}\cos\alpha = \frac{d \sin\omega + y \cos\omega}{d \cos\omega - y \sin\omega}\cos\alpha;$$

y und x sind dabei die Coordinaten des Punktes P' bezogen auf ein durch den Hauptpunkt a gehendes rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen X-Axe horizontal ist.

Diese beiden Formeln eignen sich für die Berechnung mittels des Rechenschiebers. Für logarithmische Berechnung ist die Einführung eines Hilfswinkels M zu empfehlen, und man erhält dann folgende Formelserie:

$$d = m \cos M; \quad y = m \sin M; \quad \frac{y}{d} = \operatorname{tg} M.$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{m \cos(\omega + M)}; \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\omega + M)\cdot\cos\alpha.$$

Ist die optische Axe horizontal, steht also die Bildebene vertical, so reduciren sich die Formeln einfach auf folgende:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{d}; \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{y}{d}\cdot\cos\alpha,$$

welche für die Berechnung mittels Rechenschiebers vorzüglich geeignet sind. Die Strecke $\frac{d}{\cos\alpha}$ kann der Horizontalprojection unmittelbar entnommen werden.

26. Obwohl die optische Technik gegenwärtig der Photogrammetrie Linsen mit einem Bildfeld von nahezu 90^0 zur Verfügung stellt, so kommt man doch oft genug in die Lage, mehrere Bilder gebrauchen zu müssen, welche von ein und demselben Standpunkt aufgenommen sind, und es entsteht dann die Aufgabe, solche Bilder unter einander in Verbindung zu bringen. Nehmen wir den einfachsten Fall, daſs die optischen Axen beider Bilder horizontal, die beiden Bilder also vertical sind. Die innere Orientirung beider Bilder sei gegeben. Man kann dann den Winkel der optischen Axen ableiten, sobald die beiden Bilder über einander greifen und zusammengehörige Punkte auf beiden Bildern gefunden werden können. Es seien [siehe nebenstehende Figur 15] die Abscissen zweier zusammengehöriger Bildpunkte auf den beiden Photographieen x_1 und x_2, dann hat man die Beziehungen:

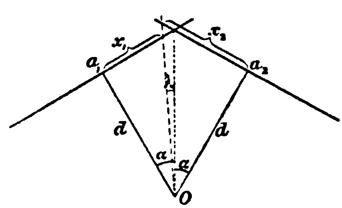


Fig. 15.

$$x_1 = d\,\mathrm{tg}(\alpha - \lambda);\quad x_2 = d\,\mathrm{tg}(\alpha + \lambda),$$

daraus folgt

$$x_1 + x_2 = \frac{2d(1 + \mathrm{tg}^2\lambda)}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \mathrm{tg}^2\lambda} \cdot \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Im Fall, dafs λ ein kleinerer Winkel ist, wenn also die zusammengehörigen Bildpunkte nahe an der Stelle gewählt werden, wo die beiden Bildebenen sich durchsetzen, erhält man hieraus unter Vernachlässigung von $\mathrm{tg}^2\lambda$ gegenüber 1 und unter der praktisch immer zulässigen Voraussetzung, dafs $\mathrm{tg}\,\alpha < 1$ ist:

$$x_1 + x_2 = 2d\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Es ist dann

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{x_1 + x_2}{2d}.$$

Die Gröfse $\frac{x_1 + x_2}{2}$ giebt die Entfernung des Schnittes der beiden Bildebenen von den Verticalen durch die Hauptpunkte an. Zieht man in den beiden Bildebenen parallele Linien zu den Hauptverticalen in der gegebenen Entfernung, so können die Bilder längs derselben aneinandergepafst werden.

Wenn die optischen Axen der beiden Bilder nicht horizontal waren, so reicht ein Paar zusammengehöriger Bildpunkte zum Zusammenschlufs der beiden Bilder nicht mehr aus. Man bedarf dann

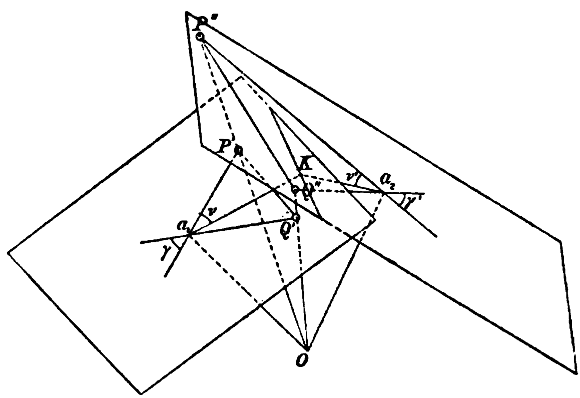


Fig. 16.

zweier Paare zusammengehöriger Bildpunkte $P'P''$, $Q'Q''$. Man entnimmt den Bildern die Winkel $\alpha\beta\gamma$, und $\alpha'\beta'\gamma'$, wobei $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_1P'}{d}$, $\mathrm{tg}\,\beta = \frac{a_1Q'}{d}$, $\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{a_2P''}{d}$, $\mathrm{tg}\,\beta' = \frac{a_2Q''}{d}$, $d = Oa_1 = Oa_2$ ist. Siehe Figur 16. Die beiden Dreikante, welche von O nach $a_1P'Q'$, bezw. nach $a_2P''Q''$ laufen, sind an den Seiten $P'OQ'$ und $P''OQ''$

aneinander zu legen, so dafs sie ein Vierkant bilden, in dem die Diagonale $a_1 O a_2$ gesucht ist. Bezeichnen wir sie mit ξ, so sind die Abstände $a_1 K = a_2 K = d \operatorname{tg} \frac{\xi}{2}$. Die Winkel ν und ν' können dem Vierkant entnommen werden. Sind die Bildweiten beider Photographieen verschieden, aber bekannt, so tritt eine ganz unwesentliche Complication ein. Die Aufgabe des Zusammenschlusses mehrerer Bilder findet bei der Himmelsphotographie ausgedehnte Anwendung. Da dort die Bildweite weder genügend genau bekannt, noch auch für die verschiedenen Aufnahmen ausreichend constant ist, wird ihre Lösung auf Umwegen durch Vergleich gemessener Sternpositionen mit den photographisch ermittelten angestrebt.

Sind von den beiden Bildern die Elemente der inneren Orientirung ganz unbekannt, so erfordert der Zusammenschlufs die Kenntnis von 4 Paaren zusammengehöriger Punkte. Die Aufgabe, die Linien zu finden, längs welcher der Zusammenschlufs der Bilder erfolgt, ist identisch mit der Aufsuchung der Axe der Perspectivität der beiden projectiv auf einander bezogenen Ebenen, von welchen 4 Paare entsprechender Punkte gegeben sind. In diesem Fall ist es aber nicht mehr möglich, den Winkel ausfindig zu machen, den die beiden Bildebenen mit einander einschliefsen. Auch für die Lage des perspectivischen Centrums gegenüber einer der beiden Bildebenen kann nur ein geometrischer Ort, nämlich ein Kreis in einer Ebene senkrecht zur Axe der Perspectivität, angegeben werden.

27. Wenn die Bestimmung der gegenseitigen Lage der perspectivischen Centren und Bildebenen geschehen ist, so bleibt noch die Hauptaufgabe, nämlich die Reconstruction der einzelnen Objectpunkte, zu erledigen. Dazu reicht nach (15.) die Benützung zweier Bilder aus. Die Construction der einzelnen Punkte erfolgt zumeist so, dafs der Grundrifs der Punkte und die Höhe über der Grundrifsebene aufgesucht wird: ersterer in der Regel graphisch, letztere rechnerisch. Im Fall, dafs die beiden Bildebenen senkrecht zur Grundrifsebene stehen, wurde das übliche Verfahren bereits in (15.) auseinandergesetzt. Sind die Bildebenen zur Grundrifsebene geneigt, so kann man direct an das Hauck'sche Verfahren, das die gegnerischen Kernpunkte benützt, anknüpfen, indem man den Grundrifs als Perspective von einem unendlich fernen Centrum aus auffafst. Es seien O_1 und O_2 die beiden perspectivischen Centren, e_1 und e_2 die zugehörigen Bildebenen, O_0 das unendlich ferne Centrum des Grundrisses; O_{10} (Grundrifs von O_1) und O_0' (Schnittpunkt der Verticalen von O_1 mit der Ebene e_1) sind dann gegnerische Kernpunkte, ebenso O_{20} und O_0''. Die Schnittkanten der Bildebenen e_1 und e_2 mit der Grundrifsebene seien k_1 und k_2. Um den Grundrifs P_0 des Punktes P zu finden, zieht man in den Ebenen e_1 und e_2 die Kernstrahlen $O_0'P'$ und $O_0''P''$ und markirt ihre Schnittpunkte mit den Kanten k_1 und k_2.

Diese überträgt man in die Kanten k_1 und k_2 in der Grundrifsebene und zieht dort die Strahlen $O_{10}P_1$ und $O_{20}P_2$, die sich dann in dem

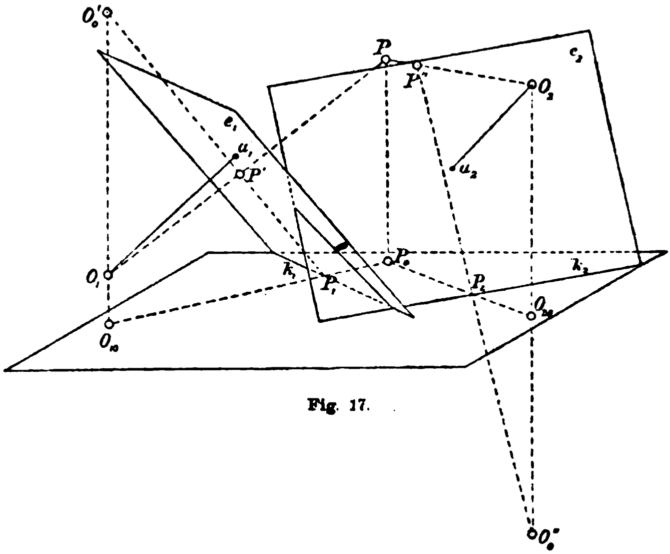


Fig. 17.

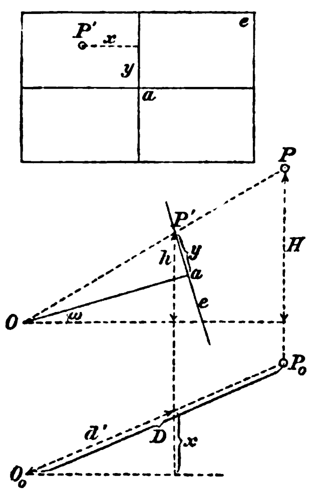


Fig. 18.

gesuchten Punkt P_0 schneiden. Sind die Bildebenen e_1 und e_2 annähernd senkrecht, so fallen die Punkte O_0' und O_0'' sehr weit hinaus und sind unbequem zu benützen. Es ist dann folgendes, von Koppe angegebene Verfahren vorzuziehen [siehe Fig. 18]. Man benützt eine Hilfsebene durch den Punkt O, welche auf der Grundrifsebene und der Bildebene senkrecht steht. Sind y und x die Coordinaten des Bildpunktes in der Ebene e, so braucht man nur dieselben in der aus der Figur ersichtlichen Weise einzutragen, um den Grundrifs O_0P_0 eines Projectionsstrahles zu finden. Auch die Höhendifferenz H des Punktes P über O läfst sich als vierte geometrische Proportionale der Formel $H = h\frac{D}{d}$ berechnen, wenn die Gröfsen die in Figur 18 angegebene Bedeutung haben. Die Hauck'schen Methoden gestatten auch eine unmittelbare

Construction des Aufrisses, die aber nur in der Architekturphotogrammetrie, wo der Aufriſs ohne Grundriſs unter Umständen gewünscht wird, von Bedeutung sein kann.

Bei praktischen Ausführungen der Photogrammetrie sieht man sich nicht selten genötigt, spitzere Schnitte bei der Construction des Grundrisses durch Vorwärtseinschneiden zuzulassen, als es im Interesse der Genauigkeit zu wünschen wäre. Die hierdurch entstehende Ungenauigkeit rührt zum Teil von der Schwierigkeit her, spitze Schnitte graphisch zu ermitteln. Man kann diese Ungenauigkeit auf rechnerischem Wege beseitigen, wie dies von Koppe*) vorgeschlagen und ausgeführt wurde, und behält dann nur jenen Teil der Ungenauigkeit bei, der von der unscharfen Bestimmung der Coordinaten in den photographischen Bildern herrührt. Man kann aber auch auf graphischem Wege die mit den spitzen Schnitten verbundenen Uebelstände vermeiden, wenn man, statt den Grundriſs direct zu zeichnen, eine passende affine Figur desselben zeichnet, wobei man in der Richtung quer zu den zu erwartenden schiefen Schnitten eine entsprechende Dehnung eintreten läſst, wodurch letztere vermieden werden. In der umstehenden Figur 19 ist die directe Construction mit den spitzen Schnitten der affin verzerrten Figur gegenüber gestellt. In der affinen Figur kann man nun allerdings die aus der Photographie entnommenen Maſse nicht direct auf der Horizontalprojection der Bildebene auftragen; aber man kann in das betreffende Strahlenbüschel eine Punktreihe immer so einpassen, daſs die gegenseitigen Abstände derselben ein bequemes Vielfaches der den Photographieen entnommenen Maſse bilden.

So würden bei einer affinen Umformung, die mit einer dreifachen Dehnung in der Querrichtung verbunden ist, die Entfernungen a_1P' und a_2P'', da sie nicht genau in der Querrichtung liegen, in einem unbequemen Verhältnis vergröſsert werden. Durch eine passende Parallelverschiebung der affinen Grundriſsprojection können die Strecken $(a_1)(P')$ und $(a_2)(P'')$ genau gleich dem dreifachen der Bildabscissen x_1 und x_2 gemacht werden.

Erhebliche Vereinfachungen lassen sich erzielen, wenn man für eine Parallelstellung der optischen Axen der beiden Bilder Sorge trägt. Für den Fall, daſs noch dazu die Basis O_1O_2 annähernd senkrecht zur Richtung der optischen Axen steht, hat Herr Koppe ein rechnerisches Verfahren angegeben, nach dem man die Coordinaten eines Raumpunktes direct aus den Coordinaten seiner beiden Bildpunkte bestimmen kann. Das Verfahren empfiehlt sich hauptsächlich zur Berechnung von Wolkenhöhen. Bei Ballonaufnahmen, wo es sich um die Reconstruction verhältnismäſsig flacher

*) Photogrammetrie und internationale Wolkenmessung. Braunschweig 1896. S. 11.

Objecte aus gröfserer Höhe handelt, kann man mit Vorteil ein Verfahren anwenden, welches auf der Voraussetzung beruht, dafs das aufgenommene Terrain auf eine horizontale Bildebene photographirt ist. Sind zwei solche Aufnahmen gegeben, so vergröfsert man dieselben zunächst so weit, dafs sie die Projection des Terrains

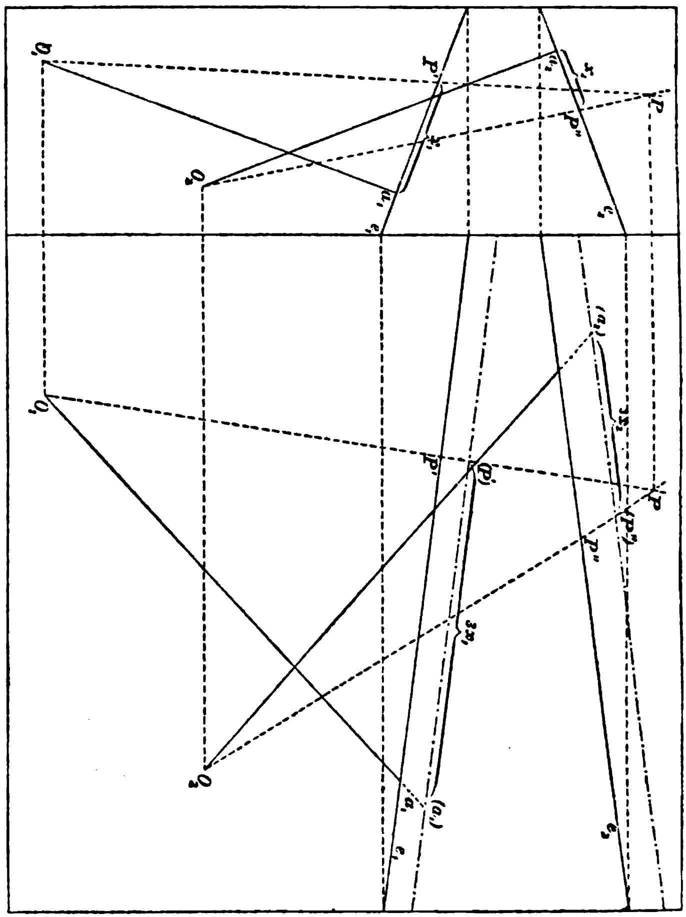


Fig. 19.

vom betreffenden Ballonort auf ein und dieselbe in der mittleren Höhe des Terrains gelegene Grundrifsebene darstellen. Die beiden vergröfserten Bilder werden nun in die richtige gegenseitige Lage gebracht, und es müssen sich dann alle Terrainpunkte decken, die gerade die Höhe der Grundrifsebene haben. Die über oder unter

der Grundrifsebene gelegenen Punkte dagegen treten in den beiden Bildern auseinander. Sind P' und P'' zwei solche Bilder, so findet man den Grundrifs P_0 des dargestellten Terrainpunktes durch den Schnitt der Verbindungslinien $P'O_{10}$ und $P''O_{20}$. Die Höhe PP_0 über dem Grundrifs kann auf doppelte Weise mittels Proportionen berechnet werden. Wenn die Voraussetzung einer photographischen Aufnahme auf eine horizontale Bildebene nicht erfüllt ist, so kann man die Reconstruction dennoch auf den einfachen Fall zurückführen, wenn man sich aus der Projection auf die schiefe Bildebene eine solche auf die horizontale Bildebene verschafft. Dies kann zum Beispiel nach (3.) mit Hilfe des Möbius'schen Netzes geschehen. Es ist allerdings erwünscht, ein mechanisches Hilfsmittel zu dieser Umzeichnung einer Perspective in eine andere vom gleichen Centrum aus zu besitzen. Apparate, welche dies leisten, sind unter dem Namen „Perspectographen" wiederholt construirt worden. Ein besonders einfacher Apparat dieser Art ist der Perspectograph von Ritter.*) Während derselbe nur die hier erwähnte Aufgabe der Umzeichnung einer ebenen Perspective löst, stellt sich der von Herrn Professor Hauck erdachte und von Herrn Professor Brauer constructiv sehr vervollkommnete Perspectograph die allgemeinere Aufgabe, aus Grundrifs und Aufrifs eines Objectes eine Perspective zu finden.**) Der Gedanke, welcher der Hauck'schen Construction zu Grunde liegt, läfst unmittelbar eine Erweiterung auf die photogrammetrische Aufgabe zu, aus zwei orientirten Perspectiven einen Grundrifs oder Aufrifs zu construiren. Doch scheint eine wirkliche Ausführung bis jetzt noch nicht vorgenommen worden zu sein. [Vergleiche: Franz Schiffner, Die photographische Mefskunst, Halle 1892, pag. 109 ff.] Mehr Aussicht auf eine praktisch brauchbare Lösung der Aufgabe, eine ebene Figur perspectivisch umzuzeichnen, scheint auf optischem Wege gegeben zu sein. Wenn man die betreffende Figur [Original-Negativ] mittels eines Skioptikons auf eine ebene Wandfläche stark vergröfsert projicirt und von dieser Vergröfserung wiederum ein photographisches Abbild von einem passenden Standpunkt aus nimmt, so kann man eine von der ursprünglichen Figur sehr stark abweichende Perspective erhalten, ohne dafs ein wesentlicher Verlust an Schärfe des Bildes zu befürchten wäre. Die Schwierigkeiten bei der Ausführung dieser Methode bestehen hauptsächlich darin, den photographischen Apparat gerade in jene Lage zu bringen, welche die gewünschte Perspective giebt. Die Auseinandersetzungen des Abschnittes (20.) deuten einen Weg zur Lösung dieser Aufgabe an.

---

*) Derselbe ist beschrieben in dem Catalog mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente, herausgegeben von Walther Dyck, München 1892. S. 241.

**) Ebenda S. 234.

Die bisher erörterten theoretischen Grundlagen der Photogrammetrie weisen eine geometrische Lücke auf, welche auch für die Praxis von hervorragender Bedeutung ist. Sie betrifft das Maſs der Zuverlässigkeit der angewendeten Constructionen. Während in der Geodäsie die Fehlertheorie einen breiten Raum einnimmt und die Discussion der Genauigkeit der Methoden eine unentbehrliche Ergänzung der Darlegung derselben bildet, ist in der Photogrammetrie kaum der erste Anlauf in dieser Richtung genommen worden. Die wenigen Ansätze, die vorhanden sind, entstanden zudem in allzuengem Anschluſs an die rechnungsmäſsigen Methoden der geodätischen Punktfestlegung und tragen der graphischen Natur der photogrammetrischen Constructionen keine Rechnung. Es zeigt sich vielmehr hier so recht deutlich der Mangel an systematischer Kritik, der bisher noch allen graphischen Constructionsanweisungen und nicht nur den photogrammetrischen anhaftet. Während man bei den einfachsten geodätischen Messungen Fehlergrenzen berücksichtigt, ihren Einfluſs auf das Resultat untersucht und hiernach die Methode beurteilt, gilt für graphische Constructionen nur die eine Maxime: „Zeichne so genau als möglich und traue dem Resultat so wenig als möglich.“ Dennoch ist eine Fehlertheorie der graphischen Constructionen nicht nur möglich, sondern sie kann sogar im engen Anschluſs an dieselben auf geometrischem Wege entwickelt werden. In dem mündlichen Bericht, den ich über das vorliegende Referat auf der Versammlung in Braunschweig erstattete, habe ich mich auch über diesen Punkt verbreitet. Inzwischen ist mir der Gegenstand unter der Hand gewachsen und hat seinen Schwerpunkt über den Rahmen der Photogrammetrie hinaus verlegt, so daſs eine selbständige Erörterung auf breiterer Basis angezeigt erscheint. Das praktische Resultat für die Photogrammetrie ist, was nicht überraschen wird, insofern ein negatives, als es die Brauchbarkeit aller complicirteren Constructionen, z. B. des Problems der 5 Punkte in Frage stellt. Die Notwendigkeit, durch geeignete instrumentelle Anordnungen die innere und äuſsere Orientirung der zu Messungszwecken zu benützenden Bilder zu sichern, wird dadurch aufs Neue bestätigt.

Für den Fortschritt in der Photogrammetrie haben zur Zeit theoretische Untersuchungen nur secundäre Bedeutung. Die instrumentelle Seite der Photogrammetrie erfreut sich ausreichender Pflege; dagegen tritt die eigentliche Anwendung unnatürlich zurück. Die photogrammetrische Litteratur wimmelt von Apparatconstructionen, von neuen Methoden und Vorschlägen, aber von fertiggestellten Ausführungen zu bestimmten Zwecken (also abgesehen von Probestücken) ist nur selten die Rede. In den Organismus der Landesaufnahme ist die Photogrammetrie mit sichtlichem Erfolge nur in Italien, Kanada, Bayern und allerneuestens in Oesterreich eingefügt worden. Ueber den praktischen Wert der Ballonphotogrammetrie wird wohl erst

der nächste Festungskrieg entscheiden, nachdem in Friedenszeiten der zu erwartende Erfolg zu dem unbedingt nötigen Einsatz an materiellen und geistigen Mitteln aufser Verhältnis zu sein scheint. In der Architekturphotogrammetrie bilden Meydenbauers Aufnahmen alter Baudenkmäler das einzige Beispiel einer nutzbringenden Verwendung. In der Hand österreichischer Ingenieure hat sich die Photogrammetrie auch zu technischen Zwecken namentlich beim Lawinenverbau bewährt. Für die geographische Detailforschung im Hochgebirge (Gletscheraufnahmen) nützt sie der Verfasser im Verein mit Andern seit einem Jahrzehnte aus. Solange indessen die praktischen Anwendungen so vereinzelt sind, wie gegenwärtig, kann man von einer hohen Bedeutung der Photogrammetrie nicht sprechen. Ob das in Zukunft anders sein wird, hängt nicht von der Ergiebigkeit geometrischer Untersuchungen, sondern von der Wertschätzung ab, die man den mit der Photogrammetrie erreichbaren und erreichten Zielen entgegenbringt.

MECHANISCHE BEZIEHUNGEN

BEI DER

FLÄCHEN-DEFORMATION.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

S. FINSTERWALDER.

Gaufs hat dadurch, dafs er den Begriff der Fläche loslöste von dem der Begrenzung eines Körpers, einen grofsen Fortschritt in der Geometrie der Oberflächen angebahnt. Er definirte die Fläche unabhängig von einem durch sie begrenzten Raum als zweidimensionales Gebilde, gleichsam als deformirbare Haut, und untersuchte ihre von der zufälligen Gestalt unabhängigen Eigenschaften. Dieser Anschauung liegt offenbar eine mechanische Abstraction zu grunde, die allerdings möglichst bald durch formale Beziehungen ersetzt wird, dann in den Formeln gleichsam untergeht und nur am Schlusse der Rechnung zur gelegentlichen Exemplification der Resultate wieder hervorgeholt wird. Bei der Fruchtbarkeit, welche der von Gaufs eingeführte neue Gedanke bewiesen hat, wird es sich verlohnen, demselben möglichst nachzugehen ohne Rücksicht auf methodische Bedenken, die einer Verquickung zweier verschiedener Erfahrungsgebiete wie Geometrie und Mechanik entgegenstehen.

Gaufs hat den mechanischen Begriff der deformirbaren Haut sehr speciell aufgefafst, indem er das Moment der Unausdehnbarkeit in den Vordergrund stellte. Später ist namentlich auf dem Gebiete der Functionentheorie der Begriff der deformirbaren Haut sehr verallgemeinert, aber gerade dadurch wiederum dem Bereiche der Mechanik entrückt worden. Indem man diesen Begriff zur Illustration des Zusammenhanges der Werte einer Function benötigte, entkleidete man ihn fast aller mechanisch fafsbaren Eigenschaften und liefs nur die geometrische Eigenschaft des „Zusammenhangs" übrig. Im Nachfolgenden soll der Begriff der deformirbaren Haut zwar weiter gefafst werden als im Gaufs'schen Sinn, ohne ihn indessen so weit zu verflüchtigen, wie es in der Functionentheorie geschieht.

Seit man sich bestrebt hat, die Resultate mathematischer Forschung der unmittelbaren Anschauung durch Modellirung der geometrischen Gebilde zugänglich zu machen, hat es nicht an Versuchen gefehlt, den Gaufs'schen Begriff der deformirbaren unausdehnbaren Haut mechanisch zu verwirklichen. Die Schwierigkeiten, die sich dabei in den Weg legten, waren nicht gering und sind bis jetzt in vollbefriedigender Weise noch nicht gehoben. Zwar besitzen wir in einem ebenen Blatt Papier ein sehr vollkommenes Anschauungsmittel für eine ganz specielle Gattung deformirbarer

Häute, nämlich solcher vom Krümmungsmaſse Null, allein es ist bis jetzt nicht möglich gewesen, ein gleich vollkommenes Substrat für Flächen von beliebigem Krümmungsmaſs zu finden, da bei den bisher verwendeten Materialien (Pergament, Stanniol, Blech, Guttapercha u. s. w.) Unausdehnbarkeit und leichte Biegsamkeit nur sehr unvollkommen vereinigt sind. Durch das Bestreben, Häute herzustellen, welche den Bedingungen besser genügen, sind die folgenden Untersuchungen angeregt worden. Bei solchen Versuchen hat sich herausgestellt, daſs sich auf mindestens ebenso vollkommene und vielfach noch vollkommenere Weise Häute herstellen lassen, welche geometrisch fest bestimmten Eigenschaften entsprechen, die aber nicht der Gauſs'schen Bedingung der Unausdehnbarkeit genügen. Man kann sich versuchsweise auf den Standpunkt stellen, die geometrischen Eigenschaften der Flächen nach der Möglichkeit, sie auf mechanischem Wege herzustellen, zu beurteilen, und es ist interessant zu sehen, wie eine Reihe geometrisch wichtiger Eigenschaften auch einer einfachen Realisirung auf mechanischem Wege fähig sind. Andererseits aber wird man durch die Möglichkeit der mechanischen Realisirung auf die Betrachtung von geometrischen Eigenschaften aufmerksam, welche sich sonst der Untersuchung leicht entziehen würden, so daſs die hier eingeschlagene Methode auch einigen heuristischen Wert beanspruchen darf.

Ehe wir uns zur mechanischen Realisirbarkeit von Oberflächen mit gegebenen Eigenschaften wenden, wollen wir die einfachere Frage beantworten: Wie kann man deformirbare Curven mechanisch herstellen? — Hier bieten sich zwei Wege. Man kann sich die Curve als Axe eines dünnen, biegsamen (eventuell auch ausdehnbaren) Stabes oder Drahtes denken oder auch als Grenzfall einer Kette von unendlich vielen unendlich kleinen (starren oder ausdehnbaren) Gliedern. Die Frage der Ausdehnbarkeit ist bei den Curven von ganz nebensächlicher Bedeutung, da alle Curven, die man durch die Deformation dehnbarer Stäbe oder Ketten erzeugen kann, auch durch unausdehnbare Stäbe oder Ketten hergestellt werden können. Die beiden erwähnten Methoden zur mechanischen Verwirklichung von deformirbaren Curven sind nicht gleich allgemein. Denn erstere umfaſst nur Curven im eigentlichen Sinn des Wortes, welche den differenzirbaren Functionen entsprechen, während die letztere auch die Erzeugung uneigentlicher Curven zuläſst, wobei nur der stetige Zusammenhang, die Aufeinanderfolge der einzelnen Curvenpunkte, gewahrt bleibt, ohne daſs das erzeugte Gebilde an jeder Stelle eine bestimmte Fortschreitungsrichtung erhielte. Dieselbe Unterscheidung kann man aber auch bei den deformirbaren Häuten machen. Man kann dieselben so herstellen, daſs nur Deformationen nach Flächen mit bestimmter Tangentialebene möglich sind, so zum Beispiel durch eine biegsame Papier-

fläche, biegsames Blech und dergleichen. Man kann aber ebenso leicht die Bedingungen so wählen, daſs eine höhere Deformationsfähigkeit entsteht, wenn wir zum Beispiel die Haut aus sehr dünnem Material (zerknittertem Seidenpapier, Goldschlägerhäutchen) ausführen.

Bei den Versuchen, Häute von bestimmten Eigenschaften mechanisch herzustellen, wird man dazu gedrängt, das zu erzeugende continuirliche Gebilde als Grenzfall eines discontinuirlichen aufzufassen, welch' letzteres zunächst allein materiell verwirklicht werden kann. So sollen im folgenden in den beiden ersten Teilen Flächen, bezw. Häute als Grenzfall von „Geflechten", „Netzen" und „Gespinnsten" betrachtet werden, und nur im letzten Abschnitte werden continuirliche Häute direct eingeführt. Der Unterschied in der Anschaulichkeit ist sehr auffällig und beweist, wie sehr unser mechanisches Denken die atomistische Auffassung gegenüber der continuirlichen bevorzugt.

Die Gebilde, welche wir untersuchen, denken wir uns zunächst durch Eigenschaften bestimmt, die sich auf jeden beliebig kleinen Teil derselben beziehen. Eigenschaften, welche erst bei endlicher Ausdehnung auftreten, speciell solche des „Zusammenhangs" finden nur gelegentliche Erörterung. Es ist kaum nötig zu bemerken, daſs letztere die ungleich schwieriger zu behandelnden sind.

I. Geflechte.

1. Allgemeines.

Wir beginnen zunächst mit der Construction von Häuten, welche den geringeren Grad von Beweglichkeit besitzen und nur nach stetig gekrümmten Flächen deformirt werden können. Zu diesem Zweck denken wir uns die herzustellende Fläche aus biegsamen Stäben geflochten. Wir wollen zweierlei Arten von biegsamen Stäben unterscheiden. Die erste wird durch einen dünnen Stahldraht von kreisförmigem Querschnitt versinnlicht. Dabei ist wesentlich, daſs die Form des Querschnittes eine Biegung nach allen Richtungen (also um beliebige durch den Schwerpunkt des Querschnittes gehende Axen) gleich leicht ermöglicht. Die zweite Art von Stäben soll als dünne Stahl-Lamellen mit rechteckigem Querschnitt, dessen eine Seite gegenüber der anderen unendlich ist, gedacht werden. Wir nehmen an, daſs wir durch Verbiegung ohne Dehnung eine solche Lamelle immer in eine Ebene ausbreiten können. Die Axe der Lamelle wird dann in dem ausgebreiteten Zustand irgend eine ebene Curve, im speciellen Fall eine Gerade darstellen. Den Zusammenhang der Stäbe in dem Geflecht denken wir uns durch Erfüllung verschiedener Bedingungen hergestellt. Es soll eine Anzahl von Stäben jeweils durch einen Punkt hindurchgehen. Dabei können die Winkel, unter denen sie sich schneiden, entweder beliebig sein

oder auch vorgegebene constante Werte annehmen. Bei den Stäben der ersten Gattung (Stahldrähten) läſst sich die erste Bedingung dadurch erfüllen, daſs man die betreffenden Stäbe mit einer Oese zusammenfaſst. Bei denen zweiter Art (Stahllamellen) muſs man complicirtere Verbindungsweisen anwenden, wie sie in den nebenstehenden Figuren 1a u. 1c versinnlicht sind. Dabei können die Lamellen flach aufeinandergelegt oder auch hochkant gegeneinander gestellt sein

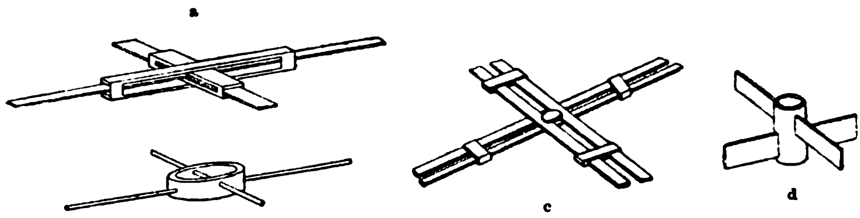


Fig. 1a—d.

[Fig. 1a u. 1c bezw. 1d]. Die zweite Bedingung, nämlich die Aufrechterhaltung der Winkel, unter welchen sich die Stäbe treffen, wird durch passende Führungen verwirklicht. Dieselben werden am einfachsten durch Durchbohrungen von Messingklötzen hergestellt [Fig. 1b u. 1d]. Sollen mehr als zwei Stäbe durch einen Punkt hindurchgehen, so müssen die Durchbohrungen so angebracht werden, daſs sie in einer Ebene liegen, beziehungsweise wenn man auf die Dicke der Drähte Rücksicht nimmt, daſs ihre Axen parallel zu einer Ebene liegen.

2. Geflecht aus drei Scharen von Drähten mit constanten Winkeln zur Veranschaulichung der conformen Abbildung.

Wir construiren zunächst ein Geflecht aus Drähten, von denen je drei durch einen Punkt hindurchgehen und sich dort unter vorgegebenen Winkeln schneiden. Der Einfachheit halber wollen wir die Winkel in allen Punkten des Geflechtes gleich groſs annehmen, z. B. gleich 60^0. [Vergleiche nebenstehende Fig. 2.] Ein solches Geflecht besteht aus krummlinigen Dreiecken, deren Winkel bei allen Deformationen erhalten bleiben. Denken wir uns das Geflecht beliebig weit verdichtet, so kommen wir im Grenzfall zu einer Haut von der Eigenschaft, daſs sie sich nur conform zu

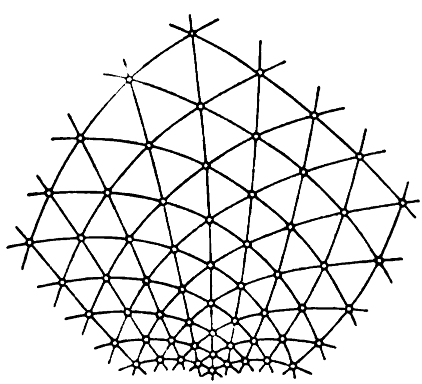


Fig. 2.

sich selbst deformiren läſst. Das gilt sowohl für Deformationen innerhalb der Ebene als auch innerhalb des Raumes. Die Haut kann an jeder Stelle beliebig stark ausgedehnt werden, indem man die Maschen dort vergröſsert. Aber durch die Constanz der Winkel ist dafür gesorgt, daſs die Ausdehnung nach allen Richtungen in gleichem Maſse erfolgt. Eine solche Haut läſst sich auf jede Fläche, abgesehen von einzelnen singulären Stellen, aufpassen. Sie läſst sich sogar auf jeder Fläche noch in der weitgehendsten Art verschieben und dabei an einzelnen Stellen zusammendrängen, an anderen ausbreiten. Eine so beschaffene Haut giebt uns die Möglichkeit, eine Fläche conform auf eine andere oder auch auf die Ebene abzubilden. Dabei ist die Conformität der Haut an keiner Stelle unterbrochen. Nach bekannten Sätzen über die Abbildungsmöglichkeit eines Bereiches auf einen anderen von gleichem Zusammenhang ist es daher möglich, eine auf der Haut vorgezeichnete in sich zurücklaufende Curve, welche eine einfach zusammenhängende Fläche umschlieſst, auf den Rand einer anderen Fläche von ähnlichem Zusammenhang aufzupassen, wobei gleichzeitig die Haut die nirgends gestörte conforme Abbildung der beiden begrenzten Flächenteile vermittelt. Die Lage der Haut auf der Fläche ist durch die Bedingung, daſs die vorgegebene Curve mit dem vorgegebenen Rand sich deckt, noch nicht absolut festgelegt. Es ist noch eine gewisse Verschiebung der Haut möglich, wobei an einigen Teilen des Randes eine Zusammenschiebung, an anderen eine Dehnung der auf der Haut gegebenen Curve erfolgt. Diese Deformationsmöglichkeit ist allerdings nicht so weitgehend, daſs sich die Punkte auf der Curve an verschiedenen Stellen nach vorgegebenen Gesetzen zusammendrängen lieſsen. Eine solche Forderung ist nämlich mit der ausnahmslosen Aufrechterhaltung der Conformität im Innern unvereinbar. Die Verschiebung geht vielmehr nur so weit, daſs drei vorgegebene Punkte des Randes der Haut mit drei beliebig vorgegebenen Punkten des Randes der Fläche zur Deckung gebracht werden können. Vergl. Fig. 3, welche das Geflecht auf einer Kugel aufgelegt zeigt.

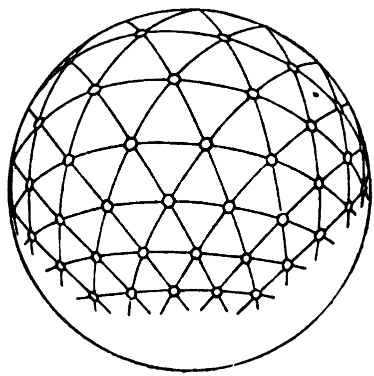


Fig. 3.

8. Geflecht aus vier Scharen flachgelegter geodätischer Lamellen. Haut constanten Krümmungsmafses.

Wenn wir aus Stäben der zweiten Art, aus sogenannten Lamellen, ein Geflecht in der Weise herstellen, dafs beim Grenzübergang zu einer Haut die Lamellen auf der letzteren platt aufliegen, so besitzt die Axe der deformirten Lamelle auf der Haut die Eigenschaft, dafs in entsprechenden Punkten ihre geodätische Krümmung*) gleich ist der gewöhnlichen Krümmung der Axe der in die Ebene ausgebreiteten Lamelle.

Nehmen wir die in die Ebene ausgebreiteten Lamellen als geradlinig an, so werden die Axen der deformirten Lamellen geodätische Linien der Haut bilden. Wir stellen nun ein Geflecht aus vier Scharen von solchen geradlinigen Lamellen her, das nur der Bedingung unterliegt, dafs durch die Hauptpunkte des Geflechtes die Axen von vier Lamellen der verschiedenen Scharen hindurchgehen. Es treten dann immer Nebenpunkte auf, in denen sich nur zwei Lamellen schneiden. (Vergleiche die beistehende Figur 4.) Durch Verdichtung des Geflechtes kommen wir nun zu einer Haut von der Eigenschaft, dafs sich vier Scharen von geodätischen Linien so anordnen lassen, dafs sie zu je vieren durch einen Punkt hindurchgehen. Mit anderen Worten: Zwei der Scharen sind die Diagonalcurven der anderen beiden Scharen.

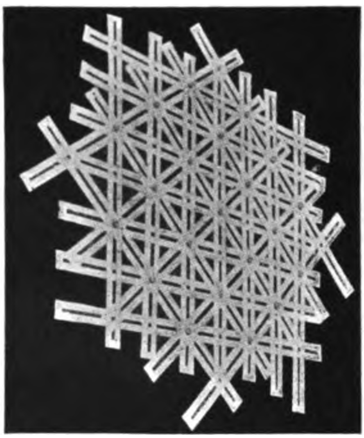


Fig. 4.

Es soll nun gezeigt werden, dafs eine solche Haut notwendig constantes Krümmungsmafs besitzt. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung der geodätischen Linien einer Fläche läfst sich auf die Form bringen:

$$\frac{d^2 v}{du^2} + A\left(\frac{dv}{du}\right)^3 + B\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + C\frac{dv}{du} + D = 0,$$

wobei u und v beliebige krummlinige Coordinaten auf der Fläche bedeuten. Wir nehmen zwei von den Scharen geodätischer Linien

*) Wenn man in den Punkten der Axe der Lamelle die Tangentialebenen der Fläche auf der sie aufliegt, construirt, so bilden dieselben eine developpable Fläche, von welcher die Lamelle ein Teil (ein schmaler Streifen zu beiden Seiten der Axe) ist. Der Abwickelung der developpablen Fläche entspricht die Ausbreitung des Streifens in die Ebene.

als Parameterlinien. Die eine Schar sei durch die Gleichung $u = \text{const.}$, die andere durch die Gleichung $v = \text{const.}$ gegeben. Damit die Differentialgleichung erfüllt ist, müssen dann notwendig A und D verschwinden. Damit die beiden anderen Scharen von geodätischen Linien sich immer in den Coordinatencurven treffen, müssen sie durch lineare Gleichungen zwischen den Parametern u und v dargestellt werden können. Bei geeigneter Wahl der Parameter u und v können die beiden Gleichungen in der speciellen Form

$$u + v = \text{const.} \quad \text{und} \quad u - v = \text{const.}$$

gewählt werden. Damit diese beiden Gleichungen der Differentialgleichung für die geodätischen Linien genügen, müssen zwischen den Coefficienten B und C die Relationen bestehen

$$B + C = 0 \quad \text{und} \quad B - C = 0.$$

Es verschwinden dann auch die Coefficienten B und C einzeln, und die Differentialgleichung reducirt sich auf

$$\frac{d^2 v}{du^2} = 0.$$

Dieser Gleichung aber genügt jede lineare Beziehung zwischen u und v. Es ist also dann jede geodätische Linie durch eine lineare Gleichung zwischen den Parametern darstellbar. Wir haben hiermit den Satz:

Wenn vier Scharen geodätischer Linien durch lineare Gleichungen zwischen den Parametern darstellbar sind, so sind alle geodätischen Linien so darstellbar.

Der Satz gilt unmittelbar für unsere oben construirte Haut. Alle ihre geodätischen Linien sind daher durch lineare Gleichungen darstellbar. Man kann die Haut stets in eine Ebene mit den rechtwinkeligen Coordinaten u, v so abbilden, daſs den geodätischen Linien Gerade entsprechen. Flächen dieser Art sind aber nach Beltrami Flächen constanten Gauſs'schen Krümmungsmaſses. Es läſst sich unsere Haut also ausschlieſslich nach Flächen constanten Krümmungsmaſses, und zwar sowohl positiven als negativen Krümmungsmaſses, deformiren. Deformirt man die Haut in der Ebene, so erhält man, da die Lamellen dann stets geradlinig bleiben, eine perspectivische Abbildung der Ebene in sich.

4. Geflecht aus drei Scharen geodätischer Lamellen. Specieller Fall der Rotationsflächen.

Wenn man aus dem Geflecht, das aus vier Scharen geradliniger Lamellen gebildet ist, eine Schar wegläſst, so bekommt man ein Geflecht von einem höheren Grad von Beweglichkeit, ohne daſs es

darum möglich wäre, ein solches Geflecht auf jede Fläche aufzulegen. Die Flächen, in welche sich eine derart construirte Haut verbiegen läſst, sind noch nicht bekannt. Es läſst sich aber leicht zeigen, daſs die **Rotationsflächen** und alle auf sie abwickelbare Flächen darunter inbegriffen sind. Diese Flächen besitzen in der That drei Systeme von geodätischen Linien von der Eigenschaft, daſs sie sich zu je dreien immer in einem Punkte schneiden. Das eine System wird von den Meridianen gebildet, die wir uns in gleichen Winkelabständen verteilt denken. Als zweites System wählen wir eine Schar von geodätischen Linien, welche einen Parallelkreis berühren und vom Berührungspunkt ausgehend die Fläche in einem bestimmten Sinn umkreisen. Die Verteilung der Linien innerhalb dieser Schar denken wir uns dabei wiederum so vorgenommen, daſs jede nachfolgende aus der vorhergehenden durch Drehung um ein und denselben Winkel gleich dem, welchen die aufeinanderfolgenden Meridiane miteinander einschlieſsen, hervorgeht. Das dritte System von geodätischen Linien entsteht dann durch Spiegelung der zweiten Schar an irgend einer Meridianebene [vgl. die beistehende Figur 5]. Die Vermutung, daſs die Rotationsflächen und alle auf sie abwickelbaren

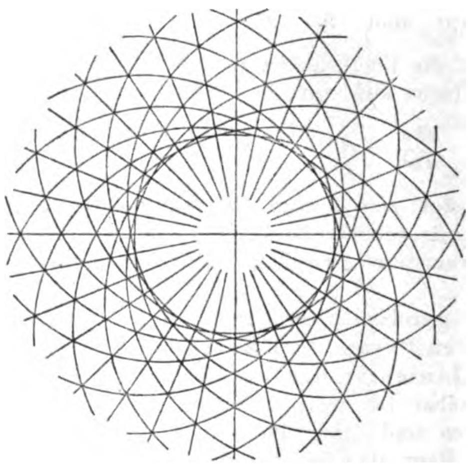


Fig. 5.

die Gesammtheit der Flächen, in welche sich unsere Haut deformiren läſst, erschöpfen, ist zwar naheliegend, scheint aber nicht berechtigt. Wir erkennen das, wenn wir uns auf die Deformationen der Haut in der Ebene beschränken. Den Rotationsflächen entspricht hier eine solche Anordnung der Lamellen, bei der die eine Schar ein Strahlenbüschel bildet, während die beiden anderen die Tangenten eines Kreises darstellen. Durch perspectivische Übertragung kann man diese Figur in eine andere verwandeln, in welcher das erste System zwar auch ein Strahlenbüschel bleibt, während die beiden anderen Scharen die Tangenten eines beliebigen Kegelschnittes werden. Natürlich erfüllt auch dieses neue Geflecht die Bedingung, daſs drei Lamellen sich jeweils in einem Punkte schneiden. Es hat dieses aber keineswegs mehr den Charakter einer Rotationsfläche, und es

ist mit Recht anzunehmen, dafs es auch aufserhalb der Ebene Deformationen unserer Haut giebt, die nicht auf Rotationsflächen zurückführbar sind.

5. Geflecht aus einer doppelten Schar geschlossener geodätischer Lamellen.

Läfst man noch eine zweite Schar von Lamellen aus dem Geflecht fort, so kommt man zu einer Haut, die nicht nur auf jede Fläche auflegbar ist, sondern sogar mit jeder auf einer solchen verzeichneten zweifachen Schar von geodätischen Linien zur Deckung gebracht werden kann. Das geht allerdings nur so lange, als wir nur kleinere Teile der Haut betrachten, innerhalb welcher ein Zurücklaufen einer geodätischen Linie in sich oder der Schnitt benachbarter geodätischer Linien nicht vorkommt. Wenn wir Bedingungen hinzufügen, die sich auf das Schliefsen der geodätischen Linien beziehen, dann erhalten wir Geflechte von verhältnismäfsig sehr eng begrenzter Bewegungsmöglichkeit. Es läfst sich leicht beweisen, dafs, wenn auf einer Fläche eine Schar geschlossener geodätischer Linien existirt, dieselben gleich lang sein müssen. Eine Haut mit einer Schar geschlossener geodätischer Linien kann man einfach dadurch herstellen, dafs man eine Reihe gleich langer Lamellen kreisförmig verbiegt und die Enden so aneinanderfügt, dafs die Axen ineinander übergehen. Erzeugt man aus einer Reihe von solchen Lamellen ein Geflecht, so giebt das im Grenzfalle eine Haut, die sich jedenfalls auf eine Kugel von passendem Radius auflegen läfst. Die Haut ist auf der Kugel noch beweglich, indem die geschlossenen Lamellen die Tangenten an eine beliebige überall convexe sphärische Raumcurve sein können. [Vergleiche Fig. 6.]

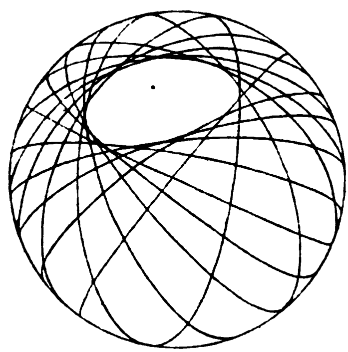


Fig. 6.

Die Kugeln sind indessen nicht die einzigen Flächen, auf denen eine solche weitgehende Verschiebbarkeit des Geflechtes der geschlossenen Lamellen noch statt hat. Herr Darboux hat die Rotationsflächen ermittelt, auf welchen alle geodätischen Linien geschlossen und daher auch von gleicher Länge sind. Dieselben haben in Bezug auf das erwähnte Geflecht dieselbe Eigenschaft wie die Kugel. Es ist bemerkenswert, dafs man einen Teil der Meridiancurve beliebig wählen kann. Es läfst sich dann immer ein zweiter

Teil dazu so bestimmen, dafs die geodätischen Linien nach einer gegebenen Zahl von Umläufen geschlossen sind*).

6. Geflecht aus vier Scharen flachgelegter geodätischer Lamellen mit constanten Winkeln.

Man kann daran denken, die Veränderlichkeit eines Geflechtes dadurch einzuschränken, dafs man mehr als vier Scharen von Lamellen zur Herstellung eines Geflechtes verwendet. Es ist aber leicht einzusehen, dafs man auf diese Weise den gewünschten Zweck nicht erreicht. Denn in die Häute constanten Krümmungsmafses, welche von einem vierfachen Geflecht gebildet werden, lassen sich noch beliebig viele Scharen von Lamellen einflechten, da ja bewiesen wurde, dafs, wenn vier Scharen von geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden, alle geodätischen Linien diese Darstellung zulassen. Dagegen läfst sich die Beweglichkeit der Haut einigermafsen beschränken, wenn man ähnlich wie bei dem früheren Geflecht aus Drähten die Winkel fixirt, unter welchen sich die Lamellen überkreuzen. Um die Einschränkung zu erkennen, welche die Beweglichkeit der Haut beim vierfachen Geflecht in diesem Falle erleidet, wollen wir zunächst die Deformation der Haut in der Ebene betrachten. Dieselbe ist nunmehr eine Aehnlichkeitstransformation im Gegensatz zu früher, wo sie eine allgemeine Collineation war. Gehen wir aus der Ebene heraus und fixiren wir die Winkel des Geflechtes in dem Fall, wo es eine Fläche constanter positiver Krümmung bildet, so ist es jedenfalls möglich, die aus ihm entstehende Haut innerhalb dieser Fläche zu verschieben, ohne sie dabei zu dehnen, so dafs sie also in den kleinsten Teilen congruent bleibt. Durch passende Vergröfserung der Maschen können wir die Haut aufserdem auf eine der ursprünglichen Form ähnliche Fläche von anderem positiven Krümmungsmafs aufpassen und in dieser wiederum in den kleinsten Teilen congruent verschieben. Aufserdem können wir die Haut natürlich auch auf alle Flächen aufpassen, die aus den eben betrachteten durch Abwickelung entstanden sind, so dafs unsere Haut sich thatsächlich auf alle Flächen constanten positiven Krümmungsmafses aufpassen und in diesen noch congruent verschieben läfst. Natürlich ist es nicht möglich, dieselbe auf Flächen negativer Krümmung zu übertragen, da in einem geodätischen Dreieck der Excefs der Winkel der Gröfse nach immer erhalten bleiben mufs. Es kann sich zwar die Fläche des Dreiecks und damit die Gröfse

*) Despeyrous, Cours de Mécanique. Avec des notes par G. Darboux, t. 2, Note XV, p. 481. Das mathematische Institut der Münchener technischen Hochschule besitzt zwei Modelle dieser merkwürdigen Rotationsflächen, welche auf Veranlassung des Herrn Collegen v. Braunmühl entstanden sind.

des Krümmungsmafses der Haut ändern, das Vorzeichen des Krümmungsmafses jedoch nicht.

7. Geflecht aus drei Scharen flachgelegter geodätischer Lamellen und einer Schar von Drähten, welche mit einer Schar der ersteren ein Orthogonalsystem bilden. Rotationsflächen.

Während wir bisher immer Geflechte betrachteten, die aus Stäben einerlei Art hergestellt waren, hindert uns nichts, auch Geflechte zu untersuchen, zu deren Herstellung sowohl Drähte wie Lamellen verwendet werden. So können wir, statt vier Lamellen in einem Knotenpunkt zu vereinigen, drei Lamellen und einen Draht zusammenfassen. Ein solches Geflecht würde vom früher betrachteten, bei dem nur die drei Lamellen vorhanden sind, in nichts verschieden sein. Denn die eingeflochtenen Drähte würden sich einfach als Diagonalcurven zwischen den Lamellen einlegen, ohne deren gegenseitige Lage weiter zu stören. Wenn wir aber die Verbindung an den Knotenpunkten so ausführen, dafs die eine Schar der Lamellen immer senkrecht steht zur Schar der Drähte, so tritt eine Specialisirung des Geflechtes ein, und zwar erreichen wir hierdurch, dafs dasselbe nur mehr auf Rotationsflächen und ihre Abgewickelten aufgepafst werden kann. Die Schar von Lamellen, welche mit den Drähten rechtwinkelig verbunden ist, bildet dabei die Meridiane, die Drähte selbst die Parallelkreise, bezw. diejenigen geodätischen Linien und Orthogonaltrajectorien, in welche Meridiane und Parallelkreise bei einer Abwickelung der Rotationsfläche in eine andere Fläche übergehen.

8. Geflecht aus zwei Scharen flachgelegter geodätischer Lamellen und zwei Scharen unter sich orthogonaler Drähte. Liouville'sche Flächen.

Von besonderem Interesse scheint ein Geflecht zu sein, welches aus zwei Scharen geradliniger Lamellen und aus zwei Scharen von Drähten derart hergestellt wird, dafs die Winkel, welche die zwei Scharen der Drähte miteinander bilden, alle gleich einem Rechten sind, während die Lamellen die Diagonalcurven des Orthogonalsystems der Drähte bilden, wobei natürlich die Winkel, welche die Diagonalcurven unter sich einschliefsen, noch veränderlich sind. Betrachten wir zunächst die Deformation dieses Geflechtes in der Ebene. Wir erhalten hier stets ein Orthogonalsystem, dessen Diagonalcurven gerade Linien sind. Da die Richtungen der Diagonalen eines Rechteckes mit den Seitenrichtungen gleiche Winkel einschliefsen, so werden die beiden Scharen von Geraden die Curven des Orthogonalsystems unter gleichen Winkeln treffen, d. h. die eine Geradenschar kann durch Reflexion an irgend einer Curve der Orthogonalschar aus der anderen erzeugt werden. Die Enveloppen der beiden Scharen sind demnach Brennlinien, welche durch Reflexion an einer Curve der Orthogonalschar in einander übergehen. In etwas erweitertem

Sinn kann man daher die Orthogonalschar als ein System von confocalen Ellipsen und Hyperbeln bezeichnen. An Stelle der gemeinsamen Brennpunkte bei der gewöhnlichen Schar confocaler Ellipsen und Hyperbeln treten dabei die Brennlinien. Deformirt man die Haut im Raum, so entsteht eine Fläche, auf welcher die Drähte ein System confocaler geodätischer Ellipsen und Hyperbeln im erweiterten Sinn des Wortes bilden.

Wir wollen nun zeigen, dafs sich das Geflecht auf alle Flächen mit Liouville'schem Linienelement auflegen läfst. Wir nehmen das Linienelement in der Form an:

$$ds^2 = (U + V)(U du^2 + V dv^2),$$

wo U und V Functionen blos von u und v sind. Diese Form läfst sich sehr leicht in die gebräuchlichere Form $ds^2 = (A + B)(d\alpha^2 + d\beta^2)$ überführen, wenn man $\alpha = \int\sqrt{U} \cdot du$ und $\beta = \int\sqrt{V} \cdot dv$ setzt.

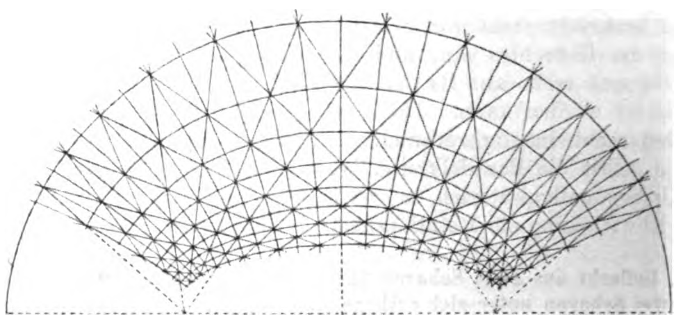


Fig. 7.

Die Differentialgleichung der geodätischen Linien lautet unter Voraussetzung eines orthogonalen Coordinatensystems folgendermafsen:

$$\frac{d^2 v}{du^2} + \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{2E} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \left[\frac{\frac{\partial G}{\partial v}}{2G} - \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{E}\right] + \frac{dv}{du}\left[\frac{\frac{\partial G}{\partial u}}{G} - \frac{\frac{\partial E}{\partial u}}{2E}\right] - \frac{\frac{\partial E}{\partial v}}{2G} = 0.$$

Führt man die Werte $E = U(U + V)$ und $G = V(U + V)$ ein, so läfst sich die Gleichung leicht in die Gestalt umformen:

$$2(U + V)UV \cdot \frac{d^2 v}{du^2} + \left[1 - \left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]\left[U^2 \cdot \frac{dV}{dv} + \frac{dv}{du} \cdot V^2 \cdot \frac{dU}{du}\right] = 0.$$

Diese Gleichung wird offenbar erfüllt, wenn man $v - u = \text{const.}$, also $\frac{dv}{du} = +1$ und $\frac{d^2 v}{du^2} = 0$, oder $v + u = \text{const.}$, also $\frac{dv}{du} = -1$

und $\frac{d^2 v}{du^2} = 0$ setzt. Daraus erhellt, dafs die Diagonalcurven des Coordinatensystems geodätische Linien sind, so wie es die Structur unseres Geflechtes verlangt. Die vorstehende Figur 7 giebt jene Form des Geflechtes in der Ebene an, bei welcher die Drähte ein System confocaler Ellipsen und Hyperbeln bilden, während die Lamellen sich zu Strahlenbüscheln durch die Brennpunkte anordnen. Man hätte die Deformation auch so vornehmen können, dafs die Lamellen die Tangenten eines confocalen Kegelschnittes werden. Von letzterer Figur ist die erstere ein specieller Fall. Bei ihr reducirt sich der confocale Kegelschnitt auf das Paar der Brennpunkte.

9. Geflecht aus flachgelegten Lamellen mit constanten Winkeln und constanten Maschenlängen. Unausdehnbare Häute.

Man kann eine aus Lamellen geflochtene Haut am einfachsten dadurch zu einer unausdehnbaren Haut machen, dafs man die Längen der Maschen und die Winkel, unter welchen sich die Lamellen treffen, fixirt. Auf diese Weise lassen sich durch Aufeinanderkleben zweier Papierlagen Häute von beliebig vorgegebener Form herstellen, welche der Gaufs'schen Bedingung der Unausdehnbarkeit sehr gut

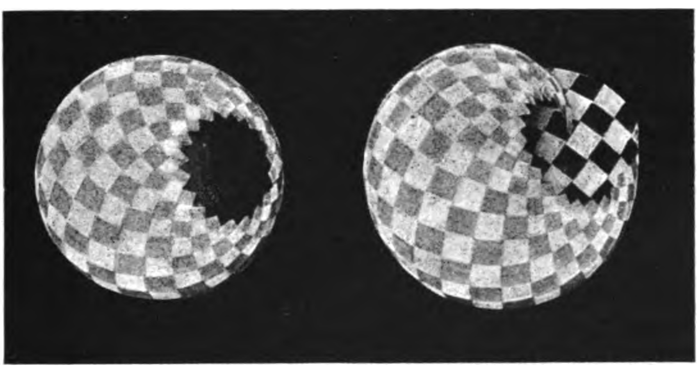


Fig. 8.

genügen. Man wird hier die Lamellen so wählen, dafs sie aneinandergestofsen die Fläche überdecken. So kann man z. B. Rotationsflächen zusammensetzen einerseits aus schmalen Streifen, die von Meridianebenen begrenzt sind, andererseits aus solchen, die zwischen zwei Parallelkreisen liegen. Letztere geben in die Ebene entwickelt Stücke von Kreisringen. Auf diese Weise werden bekanntlich die Erd- und Himmelsgloben hergestellt. Es ist dabei von Vorteil, wenn die beiden Curvensysteme, nach welchen die Flächen in Lamellen zerschnitten werden, conjugirte Systeme auf der aufzupassenden Fläche

sind, da dann die Vierecke, längs welchen zwei Lamellen übereinander greifen, in höherem Grade die Eigenschaft der angenäherten Ebenheit besitzen. Die Krümmungslinien haben speciell die Eigenschaft, daſs die Maschen auch noch rechtwinkelig werden. Bei der Kugel, bei der alle conjugirten Curvensysteme rechtwinkelig sind, kann man noch die Forderung hinzufügen, sie aus zwei Systemen von Lamellen zusammenzusetzen, welche alle unter sich congruent sind. Das läſst sich erzielen, wenn man zur Begrenzung der Lamellen zwei Systeme von rechts- und linksgängig gewundenen Loxodromen nimmt, die sich rechtwinkelig schneiden (vergl. die Figur 8). Die Figur zeigt die Haut sowohl auf der Kugel aufliegend, wie auch davon abgenommen.

10. Geflecht aus hochkant gestellten Lamellen. Minimalflächen.

Die Geflechte, welche wir bisher betrachteten, waren aus Lamellen hergestellt, die mit ihrer flachen Seite auf der erzeugten Haut aufliegen. Man kann indessen auch Geflechte aus Lamellen erzeugen, die gegen die Fläche „hochkant" gestellt sind und gewissermaſsen Versteifungsrippen der Haut darstellen. Wir denken uns die mechanischen Verbindungen derart hergestellt, daſs die Tangentialebenen an die Lamellen Normalebenen zur erzeugten Haut werden. Es hat dann die erzeugte Haut die Eigenschaft, daſs ihre Normalkrümmung längs eines Schnittes, der in Richtung der Tangentialebene an die Versteifungsrippe geführt wird, gleich ist der geodätischen Krümmung der Versteifungsrippe und daher bei allen Deformationen constant bleibt. Wählen wir die versteifenden Lamellen speciell geradlinig, also von der geodätischen Krümmung Null, so müssen die Curven, welche sie auf der Haut bestimmen, die Normalkrümmung Null haben oder Asymptotencurven sein. Es wird nämlich die Schmiegungsebene der Curve, nach welcher die Lamelle verbogen wird, stets senkrecht zur Tangentialebene der Lamelle sein und daher mit der Tangentialebene der erzeugten Haut übereinstimmen. Die Curve, längs welcher die Lamelle verbogen ist, hat somit eine Schmiegungsebene, die mit der Tangentialebene zusammenfällt, und ist daher Asymptotencurve. Construiren wir ein Netz aus einem doppelten System von hochkant gestellten Lamellen mit beweglichen Winkeln, so wird dasselbe bei seiner Deformation stets Flächen negativer Krümmung bilden, auf welchen die Lamellen Asymptotencurven sind. Wenn man die Verbindungen der Lamellen so herstellt, daſs letztere sich rechtwinkelig schneiden, so wird die erzeugte Fläche eine Minimalfläche. In diesem Falle kann man auch noch zwei Systeme von Drähten in das Geflecht einfügen, welche unter sich rechtwinkelig stehen und mit den Versteifungslamellen Winkel von 45° bilden. Auch dieses Geflecht läſst sich noch nach allen Minimalflächen verbiegen; es bilden jetzt die eingeflochtenen Drähte das iso-

therme System von Krümmungslinien (Fig. 9). Bildet man aus zwei Scharen hochkant gestellter Lamellen ein in einer Richtung geschlossenes Geflecht, bei welchem die Lamellen in ähnlicher Weise mit einander in Verbindung gebracht sind, wie die beiden Scharen von Erzeugenden auf dem Hyperboloid, so entsteht das Katenoid, sobald wir dafür sorgen, dafs die hochkant gestellten Lamellen sich überall rechtwinkelig durchsetzen. Wenn wir ein System der Lamellen unbiegsam annehmen, so kommen wir auf die windschiefe Schraubenfläche. Will man aus drei Scharen hochkant gestellter Lamellen ein Geflecht herstellen, in welchem die Winkel noch veränderlich sind, so zeigt sich, dafs dasselbe nur mehr in der Ebene zu deformiren ist. Denn aufser der Ebene giebt es keine Fläche von der Eigenschaft, dafs durch jeden ihrer Punkte mehr als zwei Asymptotencurven gehen.

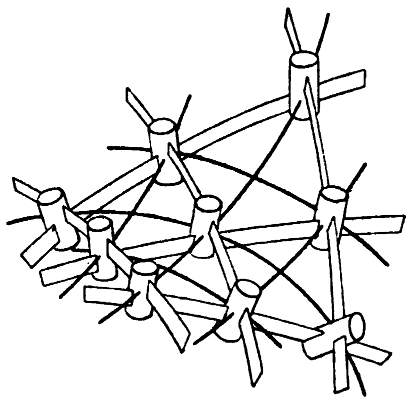


Fig. 9.

Statt die Lamellen überall rechtwinklig zu einander zu stellen, kann man auch die Verbindungen so ausführen, dafs der Winkel der Lamellen zwar constant, aber von einem Rechten verschieden ist. Man erhält dann im Grenzfalle eine Haut, deren Asymptotencurven ähnliche Rauten bilden. Dieselbe ist von Herrn Stäckel (Beiträge zur Flächentheorie III u. V, Leipziger Berichte 1896 und 1898) genauer untersucht worden. Er fand, dafs sie stets die Form einer Rotationsfläche haben mufs. Es ist demnach die Beweglichkeit des rautenförmigen Lamellengeflechtes sehr viel geringer als die des quadratischen.

II. Netze.

11. Dreiecksnetze und deren Grenzfall: die unausdehnbare aber faltbare Haut.

Wir wenden uns nunmehr zu jener mechanischen Darstellung von beweglichen Flächen, welche der Darstellung der Curven durch Ketten entspricht. Die Gebilde, als deren Grenzlage die Flächen schliefslich erscheinen, wollen wir als „Netze" bezeichnen. Solche Netze denken wir uns durch Zusammenfügung einer Reihe von starren Stäben (Gliedern) entstanden, welche an ihren Enden beweglich miteinander verbunden sind. Die Glieder eines solchen Netzes, von denen wir annehmen, dafs sie schliefslich unendlich klein werden,

können einesteils zu Polygonen, welche Maschen umschliefsen, andererteils zu Büscheln, welche von Knoten des Netzes ausgehen, zusammengefafst werden. Am einfachsten können wir ein solches Netz aus dreieckigen Maschen herstellen, von denen immer je sechs um einen Knotenpunkt herumliegen. Um ein Netz zu erhalten, das auf eine gegebene Fläche aufgepafst werden kann, überziehen wir die Fläche mit zwei Scharen von Curven und nehmen eine Schar der Diagonalcurven dazu. Auf diese Weise wird die Fläche mit Dreiecken überdeckt, welche die Figur unseres Netzes bestimmen. Die Glieder des Netzes denken wir uns, so lange sie endlich sind, als Sehnen der gekrümmten Dreiecks-Seiten. Gehen wir vom Netz durch Verkleinerung der Maschen wieder zum Grenzfall der Haut über, so erhalten wir eine Haut von solcher Beschaffenheit, dafs sie auf allen Flächen, die auf der ursprünglichen Fläche abwickelbar sind, aufgepafst werden kann. Die Beweglichkeit der Haut geht aber noch weiter, insofern als sie nicht nur biegsam, sondern auch faltbar ist. Um den Unterschied zwischen der Biegung und der Faltung der Haut zu charakterisiren, wollen wir zunächst wieder vom Netz ausgehen. Das Netz können wir uns auch als ein deformirbares Polyeder mit dreieckigen Seitenflächen denken, von denen je sechs in einer Ecke zusammenstofsen. Ist die Summe der Seiten eines Sechskants in einer Ecke kleiner als vier Rechte, so ist die Haut, die aus dem Polyeder hervorgeht, positiv gekrümmt; ist sie gröfser als vier Rechte, so ist sie negativ gekrümmt, was im folgenden genauer gezeigt werden soll. Wir können das Polyeder sowohl wie seine Grenzlage, die Haut, durch Parallele zu den Normalen auf eine Kugel sphärisch abbilden. Die sphärische Abbildung des Polyeders besteht aus einer Serie von Punkten auf der Kugel, die sich zu Sechsecken, entsprechend den sechs Kanten der Polyederecken, anordnen, von denen je drei um einen Punkt herumliegen. Ist die Fläche positiv gekrümmt, so folgen die sechs Punkte eines Sechsecks auf der Kugel in demselben Sinn aufeinander wie die sechs Dreiecke des Polyeders, die eine Ecke bilden. Ist die Fläche negativ gekrümmt, so sind die beiden Aufeinanderfolgen von entgegengesetztem Sinn. Wir denken uns nun das Polyeder deformirt. Es deformirt sich dann auch die zugehörige sphärische Abbildung. Es kann nun bei Deformation des Polyeders eintreten, dafs die sechs Punkte auf der Kugel, die den Flächen eines Sechskants entsprechen, in ihrer richtigen Aufeinanderfolge ein überschlagenes Sechseck bilden. Wir sagen dann, das Polyeder ist an jener Ecke gefaltet. Der Übergang von der Biegung zur Faltung entwickelt sich an dem sphärischen Sechseck in der Weise, dafs an der Grenze eine Seite des Sechseckes verschwindet. Das kommt darauf hinaus, dafs von den sechs Flächen des Polyeder-Sechskants zwei in eine Ebene fallen.

Diese Definition der Faltung läfst sich nun auf die Haut übertragen. Wenn wir die letztere sphärisch abbilden und es entsprechen kleinen geschlossenen Curven ohne Doppelpunkt auf der Haut sphärische Bilder mit Doppelpunkt auf der Kugel, dann ist die Fläche an der betrachteten Stelle gefaltet. Aus der Definition der Faltung geht hervor, dafs eine Fläche längs der parabolischen Curve gefaltet ist, oder besser gesagt, sich in dem Uebergangszustand zwischen Biegung und Faltung befindet*). Unter gefalteten Flächen im allgemeinen werden wir später solche verstehen, welche, ohne gerade abwickelbar zu sein, in allen Punkten gefaltet sind**).

12. Die Erhaltung des Krümmungsmafses bei faltenloser Deformation.

Für jene Deformationen der Haut, bei denen keine Faltung eintritt, läfst sich der Gaufs'sche Satz von der Erhaltung des Krümmungsmafses unmittelbar anschaulich machen. Wir gehen dabei auf die Deformation des Polyeders zurück und denken uns bestimmten Punkten der Polyederseiten, etwa den Schwerpunkten, Normalen zugeordnet. Wir begrenzen dann auf dem Polyeder etwa durch Schwerlinien der Dreiecke einen sechseckigen Bereich, dessen Ecken die Fufspunkte der Normalen sind [Fig. 11]. Diesem Bereich lassen wir in der sphärischen Abbildung ein sphärisches Sechseck entsprechen, dessen Ecken die Bilder der sechs Polyederseiten sind. Das Sechskant, das vom Mittelpunkt der Kugel nach jenem sphärischen Sechseck geht, ist das Polarsechskant zur

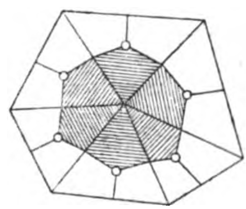


Fig. 11.

*) Bekanntlich überdeckt die sphärische Abbildung einer an verschiedenen Stellen entgegengesetzt gekrümmten Fläche die Kugel mehrfach. Die Grenzen der Ueberdeckung werden durch das Bild der parabolischen Curve gegeben. Erstreckt sich ein Bereich auf der Fläche zu beiden Seiten der parabolischen Curve, so ist der entsprechende Bereich auf der Kugel über den Rand, der die Grenze der Ueberdeckung bildet, gebogen. Seine Begrenzung hat die Form einer 8.

**) Die abwickelbaren Flächen bilden insofern eine gewisse Ausnahme, als ihre sphärische Abbildung sich auf eine einzige Curve reducirt. Dafs sie, wenn auch nur im Grenzfall, zu den nach obiger Definition überall gefalteten Flächen gehören, wird weniger auffällig erscheinen, wenn man sich ein Polyeder vorstellt, dessen Ecken auf einer abwickelbaren Fläche, z. B. auf einem Cylinder liegen. Die Anordnung der Polyederflächen trägt im allgemeinen insofern den Charakter der Faltung, als abwechselnd einspringende und ausspringende Kanten auftreten [siehe Figur 10].

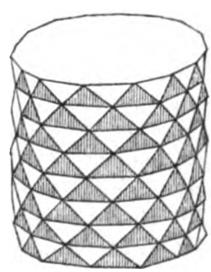


Fig. 10.

Polyederecke. Bezeichnen wir die sechs Seiten um die Polyederecke mit $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_6$ und die sechs Winkel der Polarecke mit $\beta_1, \beta_2 \ldots \beta_6$, dann bestehen sechs Beziehungen von der Form

$$\alpha_i + \beta_i = \pi.$$

Der Inhalt des sphärischen Sechsecks ist gleich dem Excefs desselben, also gleich:

$$(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_6) - 4\pi$$

oder gleich:

$$6\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6) - 4\pi$$
$$= 2\pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6).$$

Bei der Deformation des Polyeders bleiben die einzelnen Seiten, also auch ihre Summe $(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_6)$ constant, es bleibt also auch der sphärische Excefs auf der Kugel und damit der Inhalt des Sechsecks auf der Kugel erhalten. Das Verhältnis der Inhalte des sphärischen Sechseckes und des Sechseckes auf dem Polyeder bleibt demnach bei allen faltenlosen Deformationen constant.*) Geht man vom Polyeder zur Haut über, so wird das Verhältnis jener Inhalte das Gaufs'sche Krümmungsmafs der Haut, das somit bei faltenlosen Deformationen unverändert bleibt.

13. Das Tschebytschef-Voss'sche Rhombennetz unter dem Einflusse von Umfangskräften in der Ebene. Das zugehörige Gespinnst.

Einen höheren Grad von Deformationsfähigkeit erzielen wir, wenn wir ein Netz nicht aus dreieckigen Maschen sondern aus viereckigen zusammensetzen. Wir wollen uns hier die Vereinfachung gestatten, dafs wir alle Glieder eines Netzes gleich lang annehmen, sodafs die einzelnen Maschen Rhomben von gleicher Seitenlänge bilden. Die einfachste Anordnung von solchen Rhomben zu einem Netz ist dann die, welche zuerst von Tschebytschef im Jahre 1878 und später von Voss im Jahre 1881 [Über ein neues Princip der Abbildung krummer Flächen; Mathem. Ann. Band 19] betrachtet wurde. Ein solches Netz läfst sich stets so in eine Ebene ausbreiten, dafs die Rhomben Quadrate bilden, die zu je vieren um einen Punkt herum liegen. Deformirt man das Netz in der Ebene, so entsteht eine Figur, welche auf doppelte Weise durch Parallelverschiebung eines Polygons von gleichen Seitenlängen, im Grenzfall einer Curve, entstanden gedacht werden kann. Wir wollen nun die Frage beantworten: Welche Form nimmt das Netz an, wenn an Punkten seines Umfangs und in seiner Ebene liegend Kräfte wirken,

*) Tritt Faltung ein, so wird das sphärische Sechseck ein überschlagenes, und es gilt dann die Berechnung des Inhaltes aus dem sphärischen Excefs nicht mehr.

die sich das Gleichgewicht halten? — Es wird sich zeigen, dafs die Form des Netzes immer bestimmt ist, sobald die Kräfte der Gröfse und Richtung nach gegeben sind. Um sie zu finden, bedienen wir uns am einfachsten der Hilfsmittel der graphischen Statik. Damit vier Kräfte, z. B. die Spannungen, die in vier an einem Knotenpunkt zusammenstofsenden Gliedern herrschen, sich das Gleichgewicht halten, mufs das aus den Kräften gebildete Viereck [Kräfte-Polygon] geschlossen sein. Betrachten wir jetzt eine rhombische Masche mit vier Paaren von Gliedern, welche in den Ecken anstofsen. Der zugehörige Kräfteplan kann in der Weise entworfen werden, wie es beistehende Figur 12 zeigt. Er besteht aus einem geschlossenen Achteck und zwei Diagonalen, welche die Spannungen

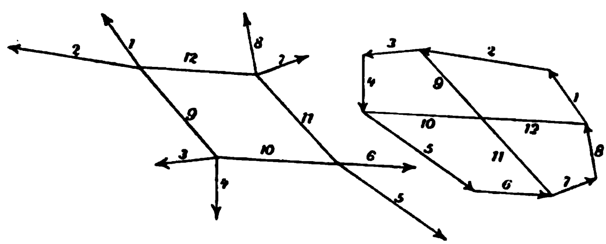


Fig. 12.

in den vier Stäben der Masche angeben. Befindet sich die Masche im Innern unseres Netzes, so müssen die in den Knoten anstofsenden Stäbe paarweise parallel sein, und infolge dessen fallen je zwei Seiten des Achtecks in eine Gerade zusammen, sodafs in diesem Fall der Kräfteplan aus einem Viereck und zwei Transversalen besteht. Schreitet man von einer einzigen Masche mit den anstofsenden Gliedern nun zu neun Maschen mit den anstofsenden Gliedern vor, so sieht man durch eine entsprechend erweiterte Schlufsweise, dafs der Kräfteplan in diesem Fall die Form der umstehenden Figur 13 hat. Er besteht aus einem Viereck mit drei Transversalen in der einen und drei Transversalen in der andern Richtung.*) Man sieht nun leicht, wie der Kräfteplan für das erweiterte Netz construirt wird. Er besteht immer aus einem Viereck mit einer entsprechenden gröfseren Anzahl von Transversalen in beiden Richtungen. Wenn

*) Solange die Vierecke des Kräfteplans, welche den Knoten des Netzes entsprechen, nicht überschlagen sind, sind die auftretenden Spannungen einerlei Art, entweder alle Zug oder Druck. Umläuft man die Vierecke des Kräfteplanes in einerlei Sinn, so müssen auch die Kräfte in den zugehörigen Knoten im gleichen Sinne aufeinander folgen. Wir werden bei den folgenden Figuren der Uebersichtlichkeit halber hieran festhalten.

wir auf diese Weise das ganze Netz erschöpft haben, so werden an den Randknoten des Netzes nun Kräfte angreifen, die nicht mehr die Eigentümlichkeit haben, dafs sie unter sich parallel sind. Daher wird der Kräfteplan für ein Netz, an dessen Umfang irgend welche Kräfte, die der Richtung und Gröfse nach gegeben sind, angreifen, in folgender Weise gefunden werden. Man zeichnet zunächst das Polygon der aufsen angreifenden Kräfte. Dasselbe mufs, damit Gleichgewicht möglich ist, geschlossen sein. Die an einer Ecke zusammenstofsenden Kräfte greifen an einem Glied des Netzes an. Von diesem Glied geht man nun zu den parallelen Gliedern des Netzes über, und zwar so lang, bis man wieder an ein Randglied kommt. An diesem greifen zwei Kräfte an, welchen eine zweite Ecke des Kräftepolygons entspricht. Mit dieser wird die erste durch eine

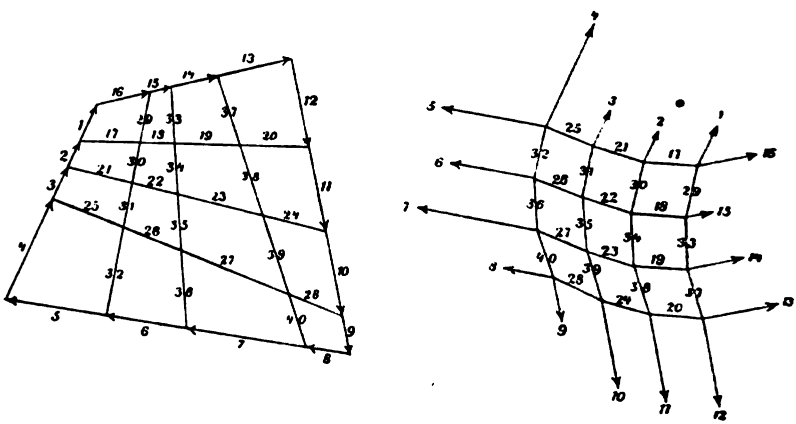


Fig. 13.

Diagonale verbunden. Hat man auf diese Weise alle Transversalen construirt, so ist der Kräfteplan des Netzes fertig. Die Abschnitte, welche die beiden Scharen von Transversalen auf einander bilden, geben dann die Spannungen in den Gliedern des Netzes. Die Form des Netzes läfst sich aus dem Kräfteplan ohne weiteres construiren. Man verschafft sich zwei Linienzüge von gleich langen Seiten (z. B. 17, 21, 25 und 32, 36, 40 in Fig. 13), die den beiden Scharen aufeinanderfolgender Transversalen des Kräftepolygons parallel sind. Verschiebt man den einen Linienzug parallel mit sich, so dafs sein Ende den andern Linienzug beschreibt, so erhält man die Gleichgewichtsform des Netzes unter dem Einflufs der gegebenen Kräfte. Bei den bisherigen Ueberlegungen ist der Einfachheit halber angenommen, dafs das Netz so begrenzt sei, dafs, wenn es in jene Lage deformirt wird, bei welcher die Maschen quadratisch werden,

der äufsere Umfang des Netzes auch ein quadratischer ist. Wir können aber leicht die Betrachtungen für den Fall erweitern, dafs die Begrenzung des Netzes in der speciellen Form ein beliebiger staffelförmiger Linienzug ist.

Aus der graphischen Statik ist die reciproke Beziehung zwischen einem Netz [Fachwerk] und dem Kräfteplan bekannt. Man kann immer den Kräfteplan als Netz [Fachwerk] auffassen, zu dem das ursprüngliche Netz dann der Kräfteplan wird. Den Spannungen im ursprünglichen Kräfteplan entsprechen dann die Längen der Glieder des neuen Netzes. In unserem Fall kann man das neue Netz aus zwei Reihen von gleichgespannten Fäden construiren, die in den Richtungen der Transversalen des Kräftepolygons liegen, welch letzteres wir uns als Gelenkpolygon vorzustellen haben. Den gleichen Spannungen in allen Punkten der Fäden entsprechen die gleich grofsen Längen der Glieder im ursprünglichen Netz. Dieses neue aus gleich gespannten Fäden hergestellte Netz wollen wir ein „Gespinnst“ nennen.*) Es entspricht daher jedem Netz der Ebene ein zugehöriges Gespinnst und umgekehrt. Der Grenzübergang vom Netz zu einer Haut bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Wir sind daher im Stande, für eine solche Haut die Form des Umfanges und die Deformation an irgend einer Stelle zu bestimmen, sobald dieselbe unter dem Einflufs von Umfangskräften, die der Gröfse und Richtung nach gegeben sind, eine Gleichgewichtslage angenommen hat. Aus dem Kräfteplan [Gespinnst] entnehmen wir auch die Beanspruchung an jeder Stelle.

14. Specielle räumliche Deformation des Tschebytschef-Voss'schen Netzes nach Translationsflächen unter dem Einflusse gegebener Umfangskräfte. Das zugehörige hyperbolische Gespinnst.

Wenn wir versuchen, die für die Ebene gewonnenen Resultate auf den Raum zu erweitern, so begegnen wir mancherlei Schwierigkeiten. Unter dem Einflufs von Umfangskräften, die im Raum verteilt sind, wird naturgemäfs das Netz eine derartige Form annehmen, dafs die einzelnen Maschen im allgemeinen nicht mehr eben sind und daher auch keine parallelen Seiten mehr besitzen. Das zugehörige Gespinnst [der räumliche Kräfteplan] wird dann wohl aus gleich gespannten Fäden bestehen, die aber nicht mehr geradlinig sind. Wesentlich vereinfacht wird die Betrachtung, wenn wir uns auf die Fälle beschränken, in welchen die Netzmaschen ebene Parallelogramme bleiben. Dann werden die unter sich parallelen Glieder

*) Ein wesentlicher Unterschied zwischen „Netz“ und „Gespinnst“ in dem hier gebrauchten Sinne besteht darin, dafs bei ersterem an den Knotenpunkten Verbindung der Gliederreihen vorausgesetzt werden mufs, während bei letzterem dies nicht der Fall ist. Die Gespinnste haben demnach im Gegensatz zu den Netzen keine bestimmte Maschenlänge.

sich wieder in Reihen ordnen lassen, denen im Gespinnst gleich gespannte geradlinige Fäden entsprechen. Die vom Netz gebildeten Formen entstehen durch Translation zweier räumlicher Linienzüge an einander. Die beiden Scharen von geradlinigen Fäden des Gespinnstes müssen sich naturgemäfs schneiden und können daher nichts anderes als Erzeugende verschiedener Art eines Hyperboloides sein. Dies führt uns zu einem Kriterium, das die Umfangskräfte eines solchen Netzes erfüllen müssen, damit seine Gleichgewichtslage ebene Maschen habe. Es mufs das Polygon der Umfangskräfte so beschaffen sein, dafs seine Ecken auf einem Hyperboloid liegen und dafs aufserdem die Transversalen [die Verbindungslinien entsprechender Ecken] Erzeugende dieses Hyperboloides sind. Gehen wir vom Netz zur Haut über, so wird in dem von uns betrachteten speciellen Fall die Haut die Form einer speciellen Translationsfläche annehmen. Die erzeugenden Curven haben die Eigentümlichkeit, dafs ihre Tangenten den Erzeugenden eines Hyperboloides, oder was auf dasselbe hinauskommt, den Erzeugenden eines Kegels zweiter Ordnung, parallel sind.

Einige specielle Beispiele mögen noch Erwähnung finden. Nimmt man das Gespinnst auf einem Rotationshyperboloid an, und verteilt man die Fäden gleichförmig über dasselbe, so entspricht dem so definirten Gespinnst ein Netz, welches die Form einer Fläche hat, die gleichzeitig Schrauben- und Translationsfläche ist und dadurch erzeugt werden kann, dafs eine Schraubenlinie eine Translation längs einer zu ihr symmetrischen Schraubenlinie erfährt. Geht man vom gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid aus, und verteilt man die Geraden so, dafs sie einander äquidistant teilen, so entspricht diesem Gespinnst ein Netz, das durch Translation einer Kettenlinie längs einer zweiten entsteht. Beide Kettenlinien haben parallele entgegengesetzt gerichtete Axen und rechtwinklig sich schneidende Ebenen. Besondere Untersuchung würden auch noch die Bewegungen der Netze verdienen, welche den collinearen Umformungen des Gespinnstes entsprechen; sie soll bei einer anderen Gelegenheit erfolgen.

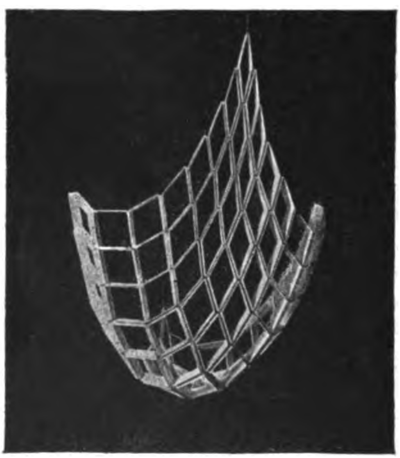


Fig. 14.

Bemerkung. Man kann leicht Netze construiren, welche so

beschaffen sind, dafs sie sich nur nach Translationsflächen deformiren lassen. Man hat nur dafür zu sorgen, dafs die Maschen bei der Deformation stets eben bleiben. Dies geschieht am einfachsten in der Weise, dafs man aus starken Cartonstreifen bewegliche parallelogrammatische Maschen construirt, wie in beistehender Figur, und dieselben gelenkartig aneinanderschliefst. [Vergl. die Figur 14.]*) Die erzeugten Flächen sind bei dieser Anordnung allerdings immer positiv gekrümmt. Die Anordnung läfst sich indessen auch leicht so variiren, dafs negative Krümmungen möglich sind.

15. Allgemeine räumliche Deformation des Tschebytschef-Voss'schen Netzes unter dem Einflusse von Umfangskräften.

Wenn wir den allgemeinen Fall, in welchem das Netz nicht parallelogrammatische Maschen besitzt, genauer untersuchen wollen, müssen wir die Bedingungen aufstellen, unter denen Kräfte an einem gelenkigen gleichseitigen Viereck im Raume sich das Gleichgewicht halten. Die vier Paare von Kräften, die am Umfange eines solchen Vierecks angreifen, müssen natürlich ein geschlossenes Kräftepolygon

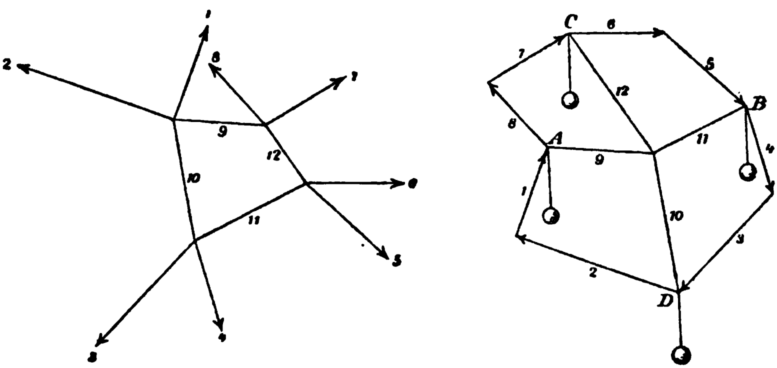


Fig. 15.

[räumliches Achteck] bilden. Um die Lage der Seiten des Vierecks zu finden, haben wir zu bedenken, dafs die Winkel, welche die Seiten 10 und 12, 9 und 11 [Figur 15], ferner die, welche 9 und 10, 11 und 12, und jene, welche 10 und 11, 9 und 12 mit einander bilden, jeweils einander gleich sind. Im Kräfteplan haben wir zwei Paare von gegenüberliegenden Seiten des Achtecks mit einem solchen Punkt zu verbinden, dafs die erwähnten Winkelgleichheiten auch

*) Das abgebildete Netz ist von Herrn stud. math. Fr. Thiersch für das mathematische Institut der technischen Hochschule München hergestellt worden.

im Kräfteplan aufrecht erhalten bleiben. Der Punkt hat dann die Eigenschaft, dafs von ihm aus gesehen die Paare gegenüberliegender Seiten sowie die beiden Diagonalen des räumlichen Vierecks *ABCD* unter jeweils gleichem Winkel erscheinen. Auf mechanischem Wege kann der Punkt so gefunden werden, dafs man zwischen die Ecken *AB* und *CD* des Vierecks *ABCD* gleichgespannte Fäden einzieht, welche sich überkreuzen. Der gemeinsame Knickpunkt der beiden Fäden giebt den gesuchten Punkt. Die Richtigkeit der Construction ist leicht zu beweisen. Die Resultante der gleichen Spannungen der Fäden 10 und 12 geht durch die Halbirungslinie des Winkels, und ihre Gröfse ist nur abhängig vom Winkel, unter dem der Faden geknickt ist. Die Resultante der Spannungen in den Fadenteilen 9 und 11 liegt in der Halbirungslinie ihres Knickungswinkels und mufs die erstgenannte Resultante aufheben. Beide Resultanten müssen gleich grofs sein, infolgedessen auch die Knickungswinkel der beiden Fäden. Sie müssen aber auch in dieselbe Richtung fallen, und es müssen sich daher die beiden Fadenebenen in einer Linie schneiden, die beide Knickungswinkel halbirt. Erweitert man das Netz von einer Masche auf mehrere Maschen und desgleichen den zugehörigen Kräfteplan [das Gespinnst], so findet man bald, dafs der Kräfteplan construirt werden kann als räumliches Gespinnst von gleich gespannten Fäden, welche entsprechende Ecken des Polygons der Umfangskräfte mit einander verbinden. Der Kräfteplan kann daher wenigstens auf mechanischem Wege mit Hilfe solcher Fäden construirt werden [siehe Figur 16].

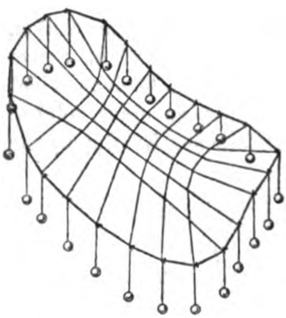


Fig. 16.

Ist aber der Kräfteplan bekannt, so bietet die Construction des Netzes keine Schwierigkeiten mehr. Denn wir können aus dem Kräfteplan die Winkel, welche die einzelnen Maschen mit einander einschliefsen, ohne weiteres entnehmen. Gehen wir wiederum vom Netz zur Haut über und wollen wir die Form der Haut bestimmen, so haben wir zunächst nach der Form des zugehörigen Gespinnstes zu fragen. Dasselbe bildet im Grenzfall ebenfalls eine Haut, auf der die gespannten Fäden geodätische Linien sind. Die Schmiegungsebenen dieser geodätischen Linien sind in dem Gespinnst durch die Ebenen, in denen die geknickten Fäden 9 und 11, 10 und 12 [Fig. 15] liegen, vorgebildet. Dem Umstande, dafs die beiden Fäden gleich stark geknickt sind, entspricht folgende Beziehung der Richtung der beiden geodätischen Linien zu den Asymptoten-

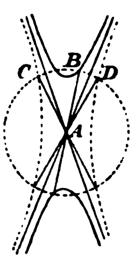


Fig. 17.

Richtungen der Haut. Es sei [siehe Figur 17] die stets hyperbolische Indicatrix in einem Punkt A der Haut hervorgehoben und gleichzeitig die dazu conjugirte Hyperbel. Ist AB die Richtung der einen geodätischen Linie, so findet man die Richtung der andern, indem man um A einen Kreis vom Radius AB beschreibt, der die conjugirte Hyperbel in den Punkten C, D und ihren gegenüberliegenden trifft. AC oder AD mufs dann die Richtung der andern geodätischen Linie sein.

16. Andere aus ihren Gespinnsten definirten Rhombennetze. Ihre ebenen, den collinearen Umformungen des Gespinnstes entsprechenden Deformationen.

Die nach Tschebytschef's Vorgang construirten Rhombennetze sind keineswegs die einzigen. Es giebt vielmehr eine aufserordentlich grofse Mannigfaltigkeit anders angeordneter Rhombennetze, die sich auf ähnliche Weise mechanisch untersuchen lassen, wie das von Tschebytschef. Man gelangt zu denselben am einfachsten, wenn man von den zugehörigen Gespinnsten ausgeht. Denken wir uns ein ebenes Gespinnst [Fig. 18a], das aus gleich gespannten Fäden gebildet ist, die sich zu dreien in einem Punkt schneiden. Demselben entspricht zunächst ein Netz, das aus lauter gleichseitigen, zu je dreien in einem Punkt zusammenstofsenden Sechsecken mit paarweise parallelen Seiten besteht [Fig. 18b]. Man kann in jedes dieser Secksecke drei Glieder einfügen und so ein Rautennetz erhalten, das sich vom vorigen dadurch unterscheidet, dafs nunmehr in den einzelnen Knoten abwechselnd drei und sechs Glieder zusammenstofsen. In einem solchen Netz kommen drei Scharen von parallelen Gliedern vor entsprechend den drei Scharen von Geraden des zugehörigen Gespinnstes.*) Betrachten wir das Gespinnst, von dem wir ausgegangen sind, als Kräfteplan, so werden bei der zugehörigen Beanspruchung des Netzes die zum Sechsecksnetz hinzugefügten Glieder spannungslos bleiben, da ihnen im Kräfteplan verschwindende Linien entsprechen. Bei irgend welchen anderen Beanspruchungen ist dies natürlich nicht mehr der Fall, und wir können die Spannungen in den einzelnen Gliedern ohne weiteres finden, wenn wir in dem Kräftepolygon die drei Scharen von Transversalen ziehen, die solche Eckpunkte mit einander verbinden, denen parallele Glieder des Netzes entsprechen. In diesem allgemeineren Falle werden naturgemäfs nicht mehr je drei Transversalen in einem Punkt sich schneiden, und es treten dann auch Spannungen in den zugefügten Gliedern auf. Wenn man indessen die Forderung stellt,

*) Die Form dieses Netzes ist im Grenzfall von drei willkürlichen Functionen abhängig, als welche man die Richtung der Glieder einer Schar als Function der Ordnungszahl annehmen kann. Das Tschebytschef-Vofs'sche Netz hängt nur von zwei willkürlichen Functionen ab.

dafs in allen Gliedern nur Spannungen einerlei Art, z. B. überall blofs Zugspannungen, vorkommen [wie bei einem gespannten Gewebe], dann kann sich die Spannungsverteilung nur sehr wenig von der ausgezeichneten, beziehungsweise von einer solchen, bei der immer drei Transversalen sich in einem Punkte schneiden, unterscheiden, und zwar um so weniger, je gröfser die Anzahl der Maschen ist. Um dies zu zeigen, denken wir uns an den Umfangskräften eine solche Aenderung vorgenommen, dafs nunmehr die Transversale 4567 [Fig. 18] nicht mehr durch die Schnittpunkte der übrigen läuft,

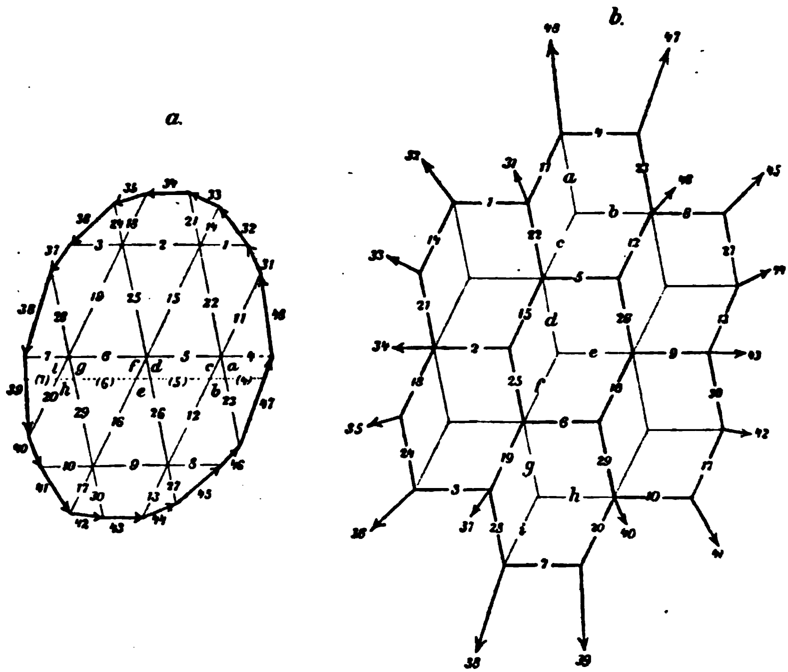


Fig. 18.

sondern eine der punktirten Linie entsprechende Lage annimmt. Sofort treten in den Zusatzgliedern dreier Sechsecke Spannungen auf, welche mit $a \ldots i$ bezeichnet sind. Bei dem in der Figur 18 dargestellten Fall sind dieselben Zugspannungen [vergl. die Anmerkung auf Seite 63]. Wäre die Transversale auf die entgegengesetzte Seite, von ihrer ursprünglichen Lage aus gerechnet, gerückt worden, so wären in den Zusatzgliedern Druckspannungen aufgetreten. Hätte sich die Transversale gedreht, d. h. so geändert, dafs sie ihre ursprüngliche Lage geschnitten hätte, so würden teils Zug-, teils

Druckspannungen aufgetreten sein. Hätte sich die Transversale gar um mehr als eine Maschenbreite verschoben, so wären schon in den Sechseckseiten Druckspannungen aufgetreten. Man entnimmt hieraus, dafs schon das ursprüngliche Sechsecksnetz und noch mehr das durch die Zusatzglieder zum Rhombennetz umgeformte bei sehr grofser Maschenzahl unter dem Einflufs von Umfangskräften, die ausschliefslich Zugspannungen in den Gliedern erzeugen, sich nur so verändern kann, dafs das Gespinnst aus dreifach sich schneidenden Geraden besteht.

Zu den Änderungen des Gespinnstes, bei welchen der Charakter desselben aufrecht erhalten bleibt, gehören vor allem die Collineationen. Die zugehörigen Netzdeformationen verdienen besonderes Interesse.

Die dreifachen Geradensysteme in der Ebene, die so beschaffen sind, dafs durch jeden Punkt drei Gerade gehen, sind zweierlei Art. Die eine Art erhalten wir als Collineation eines Quadratnetzes und einer Schar von Diagonalen. Zu der andern Art gehört das schon bei den Geflechten [S. 52] betrachtete System, das aus den Tangenten eines Kreises und den Radien desselben gebildet ist [Fig. 20a]. Wird ein solches System irgendwie collinear umgeformt, so verliert es die für uns wesentliche Eigenschaft, dafs drei Gerade immer durch einen Punkt gehen, nicht. Wir wollen nun die Deformation eines Netzes betrachten, wenn das zugehörige Gespinnst von der ersten Art ist und collinear umgeformt wird. Dabei denken wir uns das Gespinnst über die ganze Ebene ausgedehnt und ignoriren den Umstand, dafs dann im Netz unendlichgrofse Spannungen auftreten, welche den unendlich langen Maschen des Gespinnstes entsprechen. Die einfachste Form des Gespinnstes, von der wir ausgehen, mag aus drei Scharen von Parallelen bestehen, die sich unter Winkeln von 60^0 schneiden. Das zugehörige Netz besteht aus regulären Sechsecken. Unterwerfen wir das Gespinnst einer affinen Transformation, so wird das Netz in der Weise verändert, dafs sich die Winkel in den einzelnen Maschen ändern, alle Maschen aber unter sich congruent bleiben [Fig. 18b]. Gehen wir zu einer perspectivischen Umformung über, bei welcher die unendlich ferne Gerade der Ebene ins Endliche gebracht wird, so ändert sich der Charakter des zugehörigen Netzes ganz wesentlich. Das Netz erfüllt nämlich jetzt nicht mehr die ganze Ebene, sondern es tritt eine Grenzcurve auf, längs welcher die Sechsecke in gerade Linien ausgezogen sind. Diese Grenzcurve ist eine Kettenlinie, das Netz erfüllt nunmehr das Innere dieser Kettenlinie doppelt, und die beiden Teile hängen längs der Kettenlinie zusammen [Figur 19]. Die Netzmaschen, welche auf die Kettenlinie zu liegen kommen, entsprechen jenen Knoten des Gespinnstes, die im Unendlichen liegen. Nach diesen Knoten verlaufen nämlich die Geraden parallel, und die zugehörigen sechseckigen Maschen sind abgeplattet. Die doppelte Ueberdeckung des Innern entspricht durchaus der Klein-Schläfli'schen

Auffassung der projectiven Gespinnstebene als einseitiger Doppelfläche. In Figur 19 fallen infolge der symmetrischen Anordnung des Gespinnstes die Netzmaschen beider Ueberdeckungen auf einander, sie treten aber alsbald auseinander, wenn man das Gespinnst collinear deformirt. Die Glieder, welche eine sechseckige Masche in drei rhombische teilen, sind der Uebersichtlichkeit halber weggelassen.

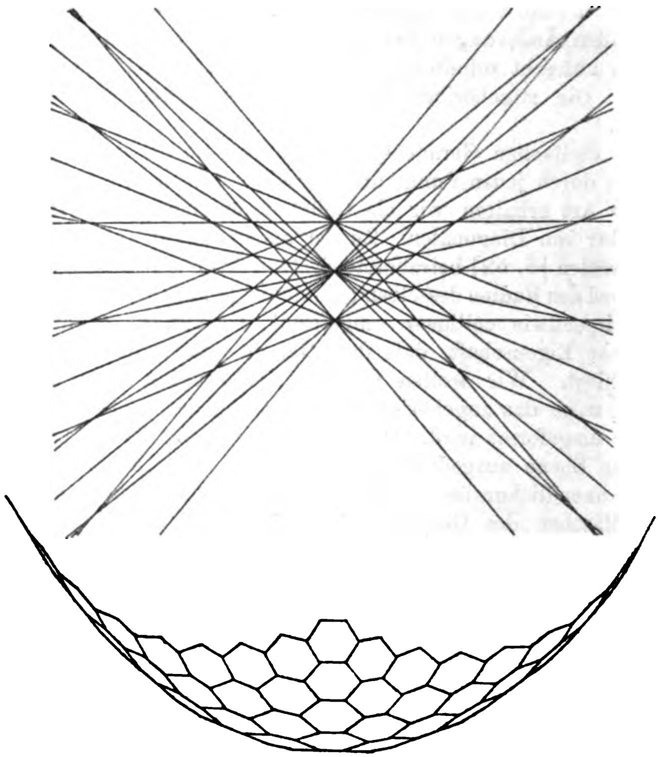


Fig. 19.

Bedeutend mannigfaltiger sind die Deformationen eines Netzes der zweiten Art. Als Ausgangsform wählen wir jenes Netz, das dem kreisförmigen Gespinnst entspricht. Es habe die beistehende Form [Fig. 20a u. b]. Die äußere Umgrenzung, längs welcher die Maschen plattgedrückt sind, entspricht wiederum den unendlich fern gelegenen Gespinnstknoten, der innere Umfang dagegen dem Kreis. Hier tritt eine Ausnahme von der Structur des Netzes insofern ein, als längs dieses Kreises abwechselnd sechseckige und viereckige Maschen vorkommen. Diese Ausnahme wird aber alsbald beseitigt, wenn man

sich das Netz vierfach den Kreisring überdeckend und an den innern und äufsern Rändern zusammengefügt denkt. Es schliefsen sich dann am innern Rand je zwei viereckige Maschen zu einer sechseckigen zusammen, und das ganze Netz, dessen reguläre Structur nirgends mehr gestört ist, hat nunmehr den Zusammenhang einer Ringfläche. Die vierfache Ueberdeckung kann man sich anschaulich so vorstellen, dafs man sich das Netz auf beide Seiten einer Kugelzone mit gleichen Begrenzungsradien aufgelegt und die Zone senkrecht zu der Richtung der parallelen Kreisebenen zu einem ebenen doppeltüberdeckten Kreisring zusammengeprefst denkt. Bei dieser

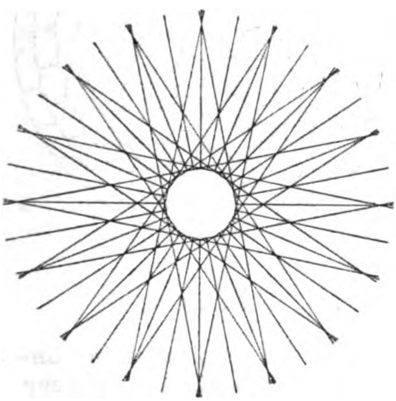


Fig. 20a.

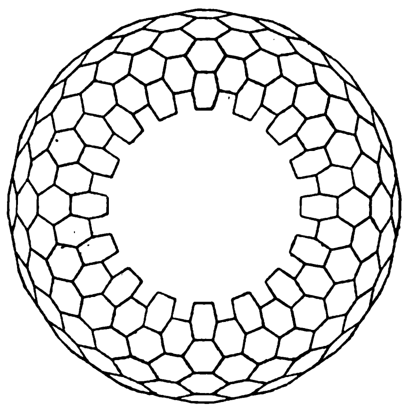


Fig. 20b.

vierfachen Ueberdeckung hat man sich die zugehörige Gespinnstebene einerseits als abgeplattetes einschaliges Hyperboloid, andrerseits als einseitige Doppelfläche vorzustellen.

Collinearen Umformungen des Gespinnstes entsprechen eigentümliche Deformationen des Netzes, die insofern ein gewisses gestaltliches Interesse beanspruchen, als sie eine Beziehung der unendlich ausgedehnten Ebene des Gespinnstes auf einen endlichen Teil der Ebene des Netzes darstellen. In beistehenden Figuren [20, 21, 22] sind die Deformationen des Netzes für einzelne Fälle gezeichnet. Solange der Kreis der Gespinnstebene nur zu einer Ellipse deformirt wird, bleibt der äufsere Umfang des Netzes eine geschlossene transcendente Curve, in speciellen Fällen ein Kreis; der innere Kreis tritt im allgemeinen doppelt auf, und das Netz erfüllt zwei ringförmige Bereiche mit gemeinsamem äufseren, aber verschiedenem inneren Umfang. Wenn in der Gespinnstebene der Kegelschnitt zur Parabel wird [Fig. 21a], so berühren die inneren Umfänge den äufseren [Fig. 21b]. Bei den Netzen, die hyperbelartigen Gespinn-

sten [Fig. 22a] entsprechen, wird der äufsere Umfang des Netzes in zwei Teile getrennt, an welche sich der innere Umfang berührend anschliefst [Fig. 22b]. Noch einige Punkte verdienen bei dieser

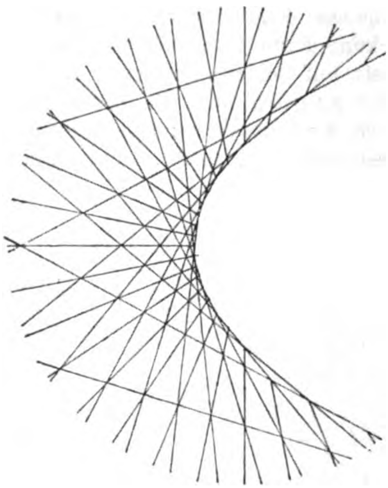


Fig. 21a.

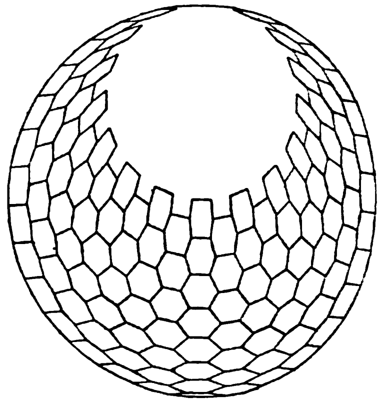


Fig. 21b.

Umformung Beachtung. Wenn eine Seite des Gespinnstes ins Unendliche fällt, so hat dieselbe natürlich keine bestimmte Richtung mehr. In dem Netz wird das entsprechende Glied durch einen Punkt

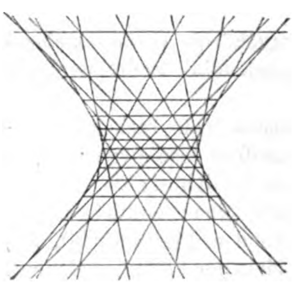


Fig. 22a.

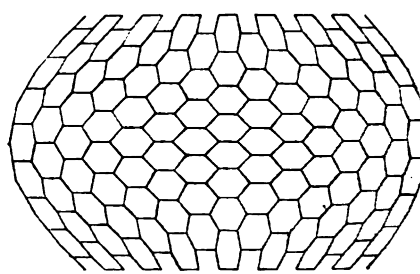


Fig. 22b.

dargestellt. Man kann sich dann vorstellen, dafs jenes Glied senkrecht auf der Ebene des Netzes steht. Fällt der Mittelpunkt des Gespinnstes in der Normalform durch die collineare Umformung ins Unendliche [Fig. 22a], so reducirt sich der innere Umrifs auf eine doppelt gezählte Strecke [Fig. 22b].

17. Ebene Rhomben- und Polygonnetze, deren Gespinnste regulären Einteilungen der Flächen constanter Krümmung entsprechen.

Die Mannigfaltigkeit der Rautennetze in der Ebene ist durch die angeführten Beispiele noch lange nicht erschöpft. Man kann, ausgehend vom ebenen Parallelogrammnetz, durch Einfügung neuer Diagonalen Gespinnste construiren, welche regelmäfsig angeordnete Schnittpunkte von verschiedenem Grad von Vielfachheit besitzen. Das zugehörige Netz wird die Ebene mit congruenten Maschen lückenlos überdecken. [Vergleiche die Fig. 23 u. 24.] Als Maschen erscheinen zunächst Polygone von der doppelten Seitenzahl der Vielfachheit der Gespinnstknoten. Die Polygone lassen sich, da sie paarweise parallele Seiten haben, durch Einfügung neuer

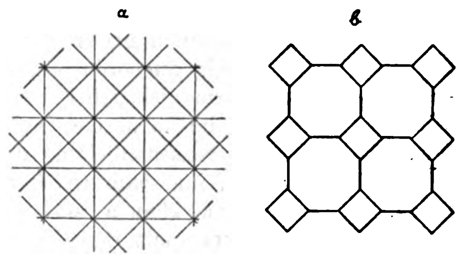


Fig. 23.

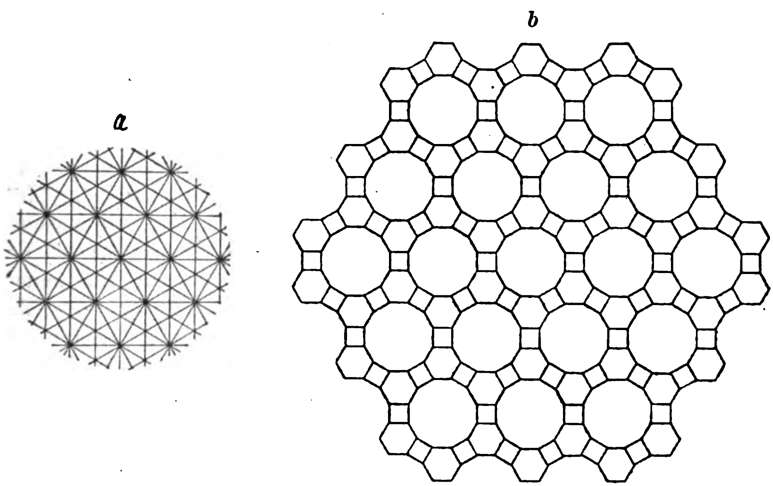


Fig. 24.

Glieder in mannigfacher Weise in Rauten einteilen. Ist die Seitenzahl das Doppelte einer ungeraden Zahl, so ist eine symmetrische sternförmige Einteilung möglich, wie in Fig. 26, in anderen Fällen nicht. Haben wir die Einfügung der Glieder vorgenommen, so läfst sich das Polygon nur mehr so deformiren, dafs die gegenüberliegenden Seiten parallel sind.

In dem vervollständigten Netz giebt es in jeder Lage Reihen paralleler Glieder, welche geradlinigen gleichgespannten Fäden des zugehörigen Gespinnstes entsprechen. Sollen in allen Gliedern nur Spannungen einerlei Art vorkommen, so ist das Gespinnst wiederum sehr eng beschränkt, sobald eine sehr grofse Maschenzahl in Frage kommt. Deformationen, welche in einem Netz von beliebig hoher Maschenzahl nur Zugspannungen erzeugen, entsprechen wieder Collineationen des Gespinnstes. Sie lassen sich nach Früherem leicht übersehen und bieten kein wesentlich neues Interesse. Dagegen kann man zu Netzen mit regelmäfsig angeordneten Maschen übergehen, für welche es keine Ausgangsform giebt, bei der alle Maschen congruent sind. Die zugehörigen Gespinnste werden in der Theorie der automorphen Functionen zur Veranschaulichung derjenigen Bereiche der Gaufs'schen Ebene benützt, innerhalb welcher jene Functionen sich wiederholen. Diese Figuren können auch losgelöst von der functionentheoretischen Beziehung mit der Einteilung der Flächen constanten Krümmungsmafses in congruente und symmetrische Stücke in Zusammenhang gebracht werden. Wählen wir als solches Stück ein geodätisches Dreieck, und überdecken wir mit dessen congruenten und symmetrischen Wiederholungen die Fläche lückenlos, so bilden die Begrenzungen derselben ein System von geodätischen Linien, dessen Beltrami'sche Abbildung*) in die Ebene ein entsprechendes System von geraden Linien mit regelmäfsig verteilten mehrfachen Schnittpunkten darstellt. Jede solche Figur kann als Gespinnst aufgefafst und das zugehörige Netz construirt werden. Enthält das Gespinnst eine endliche Anzahl von Linien, wie bei der congruenten Einteilung der Flächen positiver Krümmung, so wird das zugehörige Netz aus einer endlichen Zahl von Maschen bestehen und ist nichts anderes als das in die Ebene ausgebreitete Kantennetz eines Archimedischen Polyeders, das aus Polygonen von gerader Seitenzahl gebildet ist. Solcher Polyeder giebt es drei, das erste von sechs Vierecken und acht Sechsecken begrenzt, das zweite von zwölf Vierecken, acht Sechsecken und sechs Achtecken, das dritte von dreifsig Vierecken, zwanzig Sechsecken und zwölf Zehnecken begrenzt. Sie entsprechen der Tetraeder-, der Oktaeder- und der Ikosaeder-Einteilung der Kugel. Diese Netze schliefsen sich nach einer doppelten Ueberdeckung der Ebene, wie Fig. 25 zeigt, die

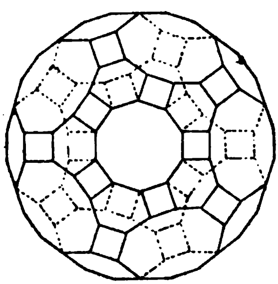


Fig. 25.

*) So möge die Abbildung genannt werden, bei welcher die geodätischen Linien der Fläche in gerade Linien der Ebene übergehen.

das Netz darstellt, welches der Ikosaeder-Einteilung der Kugel zugehört. Wir können aus solchen Netzen durch Verkleinerung und Vermehrung der Maschen keine ausgedehnte Haut erzeugen. Auch verlieren hier die Netzformen, welche Collineationen des Gespinnstes entsprechen, ihre mechanische Bedeutung. Mehr Interesse verdienen die Netze, welche Gespinnsten zugehören, die aus unendlich vielen Linien bestehen, wie sie bei der Einteilung von Flächen negativer Krümmung in congruente und symmetrische Stücke auftreten. Sie lassen sich allseitig ins Unendliche ausdehnen und geben im Grenzfall Anlaſs

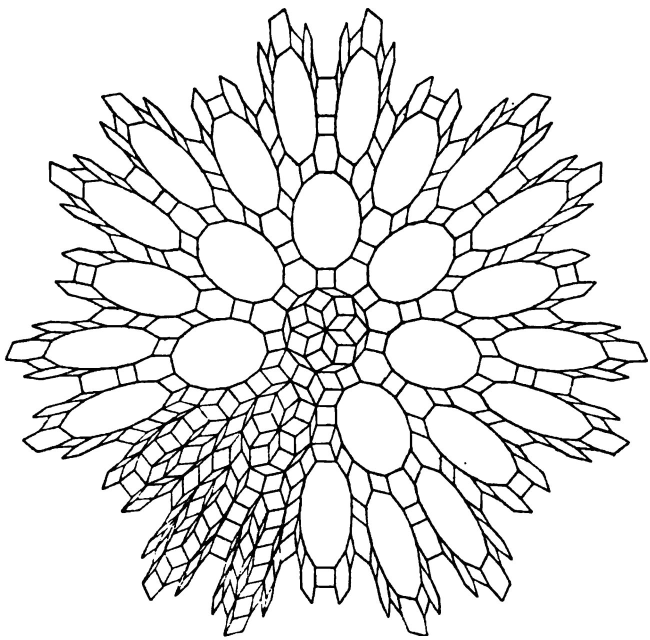


Fig. 26.

zu Häuten von überall gleichartiger Textur, welche sich aber nicht mehr so in die Ebene ausbreiten lassen, daſs die gleichartige Textur auch in der gleichartigen Maschenform zur Geltung käme. Eines der einfacheren ist in beistehender Figur 26 dargestellt. Es liegen immer sieben Vierzehnecke um ein solches herum, dazwischen schalten sich Vier- und Sechsecke ein. Die in den Figuren 25, 24 und 26 dargestellten Netze bilden die Anfangsglieder einer Reihe, insofern sich Zehnecke, Zwölfecke und Vierzehnecke in entsprechender Zahl zwischen Vierecke und Sechsecke einschalten. Man kann die Reihe ins Unendliche fortsetzen und gelangt dann zu einer Form wie in Fig. 27, bei welcher Polygone von unendlicher Seitenzahl auftreten.

Das zugehörige Gespinnst ist das Beltrami'sche Abbild jener Einteilung der Flächen negativer Krümmung, welche durch Wiederholung eines Dreiecks mit den Winkeln 90^0, 60^0, 0^0 entsteht. Die Räume zwischen den gabelförmig verzweigten Ketten von Vierecken und Sechsecken hat man sich durch ein einfaches Rautennetz ausgefüllt zu denken. Alle diese Netze mit Ausnahme jenes, das in Fig. 24 dargestellt ist, haben die Eigentümlichkeit, dafs ihre Maschen nach aufsen hin mehr und mehr plattgedrückt werden, wenn man das Netz in die Ebene ausbreitet. Geht man im Grenzfall zur Haut über, so wird nur die nächste Umgebung eines Punktes derselben nach allen Richtungen ausgespannt sein, während alle übrigen Teile nur in einer, nämlich der radialen Richtung gespannt sind. Aus der Betrachtung des zugehörigen Gespinnstes geht unmittelbar hervor, dafs letztere unverhältnismäfsig gering beansprucht sind im Vergleich zu der ausgespannten Stelle. Ein Gewebe, welches nach Art dieser Haut hergestellt wäre, würde das „Muster" immer nur an einigen wenigen gespannten Stellen zeigen, während der Rest des reichsten Faltenwurfes fähig ist.

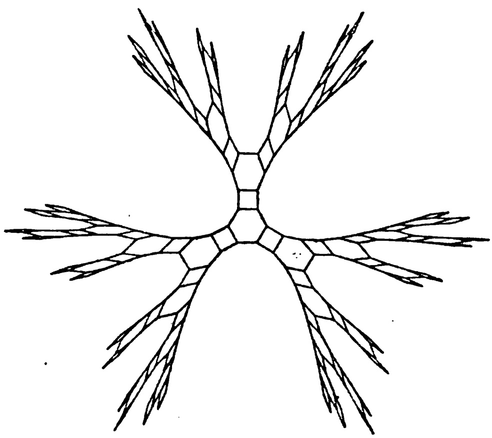


Fig. 27.

III. Unausdehnbare faltbare Häute.

18. Begriff einer über eine feste Fläche gespannten und dabei gefalteten Haut.

Bei den Untersuchungen des vorigen Capitels über Netze haben wir die Möglichkeit der Faltung der aus Netzen im Grenzfall entstehenden Häute erkannt, ohne indessen bei der Untersuchung der Deformationen diesen Umstand weiter zu berücksichtigen. Wir haben uns ausschliefslich mit solchen Deformationen der Haut beschäftigt, die auch als Biegungen verbunden mit Dehnung aufgefafst werden können. Wir wollen nunmehr zu Flächen übergehen, welche aus anderen durch Faltung entstehen. Zu diesem Zweck denken wir uns eine Haut von der Eigenschaft, dafs sie in jeder Richtung unausdehnbar ist, dagegen beliebig gefaltet werden kann. Eine Haut dieser Art ist der Grenzfall des am Eingang des vorigen Capitels betrachteten Netzes mit lauter dreieckigen Maschen.

Dünnes, wiederholt zerknittertes Papier, am besten sogenanntes Strohpapier giebt ein gutes Modell einer solchen Haut. Wir wollen dabei voraussetzen, dafs es für die Haut einen Zustand giebt, in welchem sie nirgends gefaltet ist und also auf eine Fläche im gewöhnlichen Sinne glatt aufgepafst werden kann. Durch Faltung kann nun jede solche Haut auf jede Fläche [abgesehen von Zusammenhangsschwierigkeiten] aufgelegt werden, und zwar noch auf die mannigfaltigste Art. Die Möglichkeiten werden eingeschränkt und einer genaueren Betrachtung zugänglich, wenn wir noch Bedingungen hinzufügen. Eine erste möge die sein, dafs die Fläche längs einer Schar von Curven nicht gefaltet ist, d. h. dafs diese Curven auf der gefalteten Haut dieselbe Länge haben wie auf der Fläche, auf der sie aufgelegt wird. Um diese Forderung an einem Beispiel genauer zu fixiren, denken wir uns etwa eine Kugelcalotte, die mit Faltung in eine Ebene gelegt werden soll. Wir können das so ausführen, dafs eine Schar von Parallelkreisen der Kugel in concentrische Kreise von gleich grofsem Radius in der Ebene übergeht. Die Meridiane müssen dabei eine Faltung erleiden, welche vom Mittelpunkt gegen die Peripherie zunimmt.*)

Wir wollen die im folgenden zu betrachtenden Faltungen noch weiter einschränken, und zwar wiederum mittels eines Principes, das sich schon früher als fruchtbar erwiesen hat. Wir wollen nämlich am Umfang der faltbaren Haut Kräfte angreifend denken und zusehen, wie unter solchen Umständen eine mit Faltung verbundene Aufpassung der Haut auf eine Fläche möglich ist. Eine dergestalt auf eine Fläche aufgepafste Haut wollen wir „einseitig gespannt“**) nennen. So wäre die vorhin auf die Ebene aufgepafste Kugelcalotte nicht als gespannte Haut in unserem Sinne zu bezeichnen. Es würden nämlich blofse Umfangskräfte die Kugelhaube niemals in eine Ebene deformiren können. Unter dem Einflusse entsprechender Umfangskräfte, nämlich solcher, die einer Ebene parallel sind,

*) Die Möglichkeit einer solchen Faltung scheint allerdings durch einen auf Cauchy zurückgehenden Satz ausgeschlossen, nach welchem eine biegsame und unausdehnbare Fläche mit positiver Krümmung starr ist, sobald eine Curve (hier der Grenzkreis) festgehalten wird. [Bianchi: Geometria differenziale S. 199.] Dieser Satz gilt jedoch nur für eigentliche Biegungen und ist auf Deformationen vom Charakter der Faltung nicht anwendbar. Will man sich jedoch eine Faltung als Grenzfall einer in kleinsten Intervallen und abwechselnder Richtung erfolgenden Biegung vorstellen, so hat man zu bedenken, dafs die relativen Längenänderungen, welche zur Ermöglichung einer Biegung in eine endliche Anzahl von Falten notwendig sind, äufserst rasch abnehmen, sobald wir zu einer immer gröfseren Zahl von solchen Falten übergehen. Der Cauchy'sche Satz steht daher für den Grenzfall der Faltung, der uns hier allein beschäftigt, nicht mehr im Wege.

**) Im Gegensatze zu „allseitig gespannt“, wobei die Haut ungefaltet auf der Fläche aufliegt.

würde der Rand der Calotte eine passende ebene Curve [eine Seilcurve jener Kräfte] bilden und in diesem Zustande gespannt sein, während die Haut selbst ungespannt und unbestimmt in ihrer Form bleibt. Dagegen würden wir obige Kugelcalotte sehr wohl auf Kugeln von kleinerem Radius aufspannen können und zwar durch Umfangskräfte, welche in Richtung der Meridiane wirken. Es würden in diesem Falle die Meridiane gespannt, die Parallelkreise aber gefaltet sein. Der eben erwähnte Fall giebt uns ein Beispiel, nach dem sich der allgemeine Fall beurteilen läfst. Wenn irgend eine Haut durch Umfangskräfte auf einer Fläche einseitig aufgespannt ist, so wird vom Rande aus eine Schar von gespannten Linien gehen, welche sowohl geodätische Linien auf der Fläche sind, auf der die Haut aufgespannt wird, wie auch auf der Haut selbst, wenn wir uns letztere in faltenlosem Zustande denken. Letzteres folgt notwendig aus der Eigenschaft der geodätischen Linien, innerhalb gewisser Grenzen, die hier allein in Betracht kommen, kürzeste zu sein; ersteres aus dem Umstande, dafs die als glatt vorausgesetzte Fläche keine anderen als Normalreactionen auf die darüber gespannte Haut auszuüben vermag. Es kann unter Umständen der Fall eintreten, dafs die Haut nicht in ihrer ganzen Ausdehnung in der eben charakterisirten Weise gespannt und dazwischen gefaltet ist. Es können Bezirke vorkommen, innerhalb welcher die Haut glatt und ungefaltet auf der Fläche aufliegt, und andere, in welchen die Haut auf der Fläche entweder nicht aufliegt oder nur durch eine ungespannte Faltung aufgepafst werden kann. Um ein Beispiel zu geben, betrachte man die Calotte, die auf eine Rotationsfläche von der nebenstehenden Form aufgespannt werden soll [Fig. 28]. Die Rotationsfläche ist so beschaffen, dafs der oberste Teil flacher gekrümmt ist als die Calotte, dafs dazwischen eine Zone kommt, in welcher die Krümmung der Fläche jener der Calotte gerade gleichkommt, während der äufsere Teil geringer gekrümmt ist als die Calotte. Spannen wir die Haut durch Umfangskräfte auf die Fläche auf, so wird der äufsere ringförmige Streifen nach Meridianen gespannt und nach Parallelkreisen gefaltet sein. Dann folgt ein Streifen, welcher glatt aufliegt, und der innere Teil kann durch Faltung längs der Meridiane mit der Fläche zur Deckung gebracht werden.

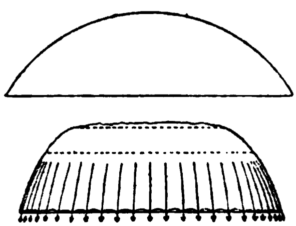


Fig. 28.

19. Construction von einseitig gespannten Häuten auf vorgegebener Fläche.

Wir gehen jetzt dazu über, das Gleichgewicht von Kräften zu studiren, welche an über eine Fläche gespannten Fäden angreifen.

Die Anzahl der Kräfte wollen wir zunächst als endlich, später aber als einfach unendlich voraussetzen. Wir beginnen wieder mit dem einfachen Fall der Ebene. Die beiden Bedingungen dafür, dafs eine Anzahl von Kräften in der Ebene im Gleichgewicht ist, sind die, dafs sowohl das Kräftepolygon wie das Seilpolygon sich schliefst. Diese Bedingungen seien für ein gegebenes Kräftesystem erfüllt. Das zugehörige Seilpolygon sei so beschaffen, dafs in seinen Seiten nur Zugspannungen vorkommen. Wir denken uns nun aus der Ebene ein System von schmalen Streifen, deren Axen die Actionslinien der Kräfte und die Seiten des Seilpolygons sind, herausgeschnitten. Schneiden wir das Seilpolygon an irgend einer Stelle auf, und legen wir das System von Streifen auf irgend eine Fläche glatt auf, so erhalten wir dort ein System von geodätischen Linien. Bringen wir in jeder geodätischen Linie eine Spannung von der Gröfse der Kraft in der Ebene an, so erhalten wir auf der Fläche ein System gespannter geodätischer Linien, das wir uns nunmehr durch Fäden ersetzt denken können. In jedem Knotenpunkt des Seilpolygons herrscht Gleichgewicht. Wir brauchen nämlich nur die Spannungen auf die Tangentialebene an die Fläche im Knotenpunkt zu projiciren, um dies einzusehen. Die Winkel, unter denen sich die geodätischen Linien in den betreffenden Punkten schneiden, sind gleich den Winkeln, welche die entsprechenden Geraden in der Ebene einschliefsen. Die Componenten der Spannungen parallel zur Tangentialebene werden gleich den Kräften in der Ebene, und die Componenten der Spannungen senkrecht zur Tangentialebene werden durch den Widerstand der Fläche aufgehoben. Wäre das Kräftepolygon auch auf der Fläche geschlossen, so würde das ganze System von gespannten Fäden sich nunmehr im Gleichgewicht befinden. Ein solcher Schlufs des Kräftepolygons auf der Fläche hätte zur Voraussetzung, dafs die Totalkrümmung der Ebene und der Fläche innerhalb des Polygons gleich grofs, also beide gleich Null wären. Ist das nicht der Fall, so müfste man, um auf der Fläche ein im Gleichgewicht befindliches System von Fäden zu bekommen, die Enden des aufgelegten Seilpolygons noch mit Kräften versehen, die den Spannungen der durchschnittenen Seile des Seilpolygons entsprechen. Es giebt jedoch gewisse Systeme von im Gleichgewicht befindlichen ebenen Kräften, welche sich ohne weitere Ergänzung auf jede beliebige Fläche übertragen lassen. Denken wir uns in der Ebene ein biegsames Seil von endlicher Länge. In verschiedenen Punkten desselben sollen je zwei nach verschiedenen Seiten gerichtete Kräfte angreifen. Um das Gleichgewicht dieses Systems zu untersuchen, bezw. um jene Curve zu finden, in welche sich das Seil unter dem Einflufs jener Kräfte deformirt, construiren wir in folgender Weise einen Kräfteplan: Wir schliefsen die wirkenden Kräfte in ihrer natürlichen Aufeinanderfolge [siehe Fig. 29] zu

einem Kräftepolygon zusammen, dessen Schlufs natürlich Vorbedingung des Gleichgewichtes ist. Um die Spannung in einem Fadenteil, z. B. 18, zu finden, an dessen Enden auf der einen Seite die Kräfte 1, 2, auf der anderen 6, 7 angreifen, ziehen wir die Diagonale des Polygons, welche die Ecken 1, 2 und 6, 7 mit einander verbindet. Die Länge dieser Diagonale 18 giebt die Spannung in dem betreffenden Seilstück der Gröfse und Richtung nach, und das Gleichgewicht der Kräfte im Seil tritt dann ein, wenn das betreffende Stück des Seiles die Richtung der Diagonale hat. Hat man im Kräfteplan alle den einzelnen Seilstücken entsprechenden Diagonalen gezogen, und kennt man die Länge der einzelnen Seilstücke, so läfst sich die Gleichgewichtsform des Seiles unmittelbar dadurch construiren, dafs man die Seilstücke unter den Winkeln, welche die Diagonalen des Kräftepolygons bilden, aneinandersetzt. Wenn wir ein solches ebenes Kräftesystem in der früher angegebenen Weise auf irgend eine Fläche dadurch übertragen, dafs wir den ebenen Streifen längs des Seilpolygons mit den daran anschliefsenden Streifen in Richtung der Actionslinien der Kräfte auf die Fläche aufbiegen, so erhalten wir auf derselben ein System von geodätischen Linien, welche zu je zweien von den Ecken jenes geodätischen Polygones auslaufen.

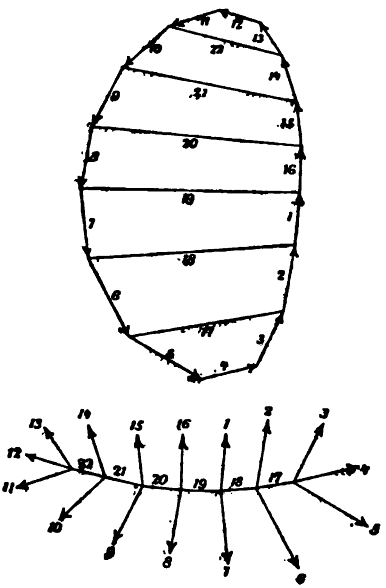


Fig. 29.

Werden in den geodätischen Linien Spannungen gleich den Kräften in der Ebene erzeugt, so befindet sich das System im Gleichgewicht. Es ist ersichtlich, dafs sich diese Betrachtungen von einer endlichen Zahl von Kräften, die an einer endlichen Zahl von Punkten des Seiles angreifen, ohne weiteres übertragen lassen auf eine unendlich grofse Zahl, bezw. auf continuirliche Kräfte. Es geht das Seilpolygon in eine Seilcurve über, und an Stelle des Systems von Streifen, das aus der Ebene herausgeschnitten ist, tritt nun ein ebenes Blatt, das in Richtung der Actionslinien der Kräfte geschlitzt ist.

Wir wenden uns nun dazu, eine vorgegebene Haut auf eine vorgegebene Fläche zu spannen. Um die complicirteren Fälle zu vermeiden, wählen wir in der Ebene zunächst ein Kräftesystem der

vorhin beschriebenen Art, welches sich an einem endlichen ungeschlossenen Seil das Gleichgewicht hält, und übertragen es in der früher angegebenen Weise sowohl auf die Haut wie auf die Fläche. Wenn wir nun auch die Haut längs der geodätischen Actionslinien aufschlitzen würden, so könnten wir sie sicherlich auf die Fläche so auflegen, daſs die Seilcurve und die geodätischen Actionslinien auf beiden sich decken. Nach Anbringung der entsprechenden Spannungen an den Rändern der geschlitzten Haut würde diese auf der Fläche im Gleichgewicht sein. Statt nun die Haut zu schlitzen, können wir sie immer dann auch falten, wenn im geschlitzten Zustande die einzelnen Streifen nach der Aufbiegung übereinandergreifen würden. Die Bedingungen, unter welchen das der Fall ist, lassen sich einfach formuliren, wenn wir die Haut sowohl als die Fläche auf jenes System geodätischer Orthogonalcoordinaten beziehen, das durch die Actionslinien gegeben ist. Das Linienelement der Haut sowohl als der Fläche wird dann durch die Formel

$$ds^2 = du^2 + G \cdot dv^2$$

ausgedrückt. Damit ein Übereinandergreifen der einzelnen Streifen der geschlitzten Haut stattfinde, muſs das G für die Haut gröſser sein als für die Fläche. Ist diese Voraussetzung erfüllt, so kann man, statt die Haut zu schlitzen, sie auch falten und so in jenen Zustand der Spannung überführen, in dem sie auf der Fläche im Gleichgewicht ist. Complicirtere Fälle würden eintreten, wenn wir in der Ebene ein allgemeines im Gleichgewicht befindliches System voraussetzen, zu dem eine geschlossene gespannte Seilcurve gehört. Schlitzen wir die Ebene längs der Actionslinien der angreifenden Kräfte, und legen wir sie sowohl auf die Haut wie auf die Fläche, so erhalten wir wiederum auf beiden ein System von geodätischen Actionslinien. Wir wollen nur solche Teile der Seilcurve auf der Haut und auf der Fläche betrachten, in welchen keine Selbstdurchsetzung derselben erfolgt. Wir beziehen wiederum Haut und Fläche auf das geodätische Orthogonalcoordinatensystem der Actionslinien. Längs der Seilcurve haben die Coefficienten G der beiden Linienelemente denselben Wert. Wenn nun auf der einen Seite der Seilcurve der Coefficient G der Haut einen gröſseren Wert hat als der auf der Fläche, so läſst sich die Haut durch Faltung quer zu den geodätischen Linien auf die Fläche aufpassen. Die Umfangskräfte bestehen in diesem Falle aus zwei Kräften P_1 und P_2, die an den Enden der Seilcurve angreifen, und aus den Kräften, die in den geodätischen Actionslinien am Rande der Haut wirken. [Vergleiche die Figur 30.] Es kann zufällig vorkommen, wie im früher betrachteten Falle der Rotations-

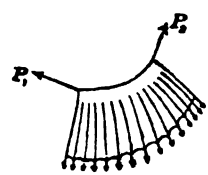


Fig. 30.

fläche, daſs die Seilcurven auf der Haut und auf der Fläche sich gleichzeitig schlieſsen. Dann läſst sich unter der Voraussetzung, daſs das „G“ der Haut überall gröſser als das der Fläche ist, die Haut durch ein System von Randkräften aufspannen. Es wird ein ringförmiger Teil derselben, der um die Seilcurve herumgeht, in unserem Sinne gespannt [und gefaltet]; längs der Seilcurve liegt die Haut faltenlos auf der Fläche, und im Innern derselben hat sie zunächst eine von den äuſseren spannenden Kräften unabhängige Form und kann möglicherweise durch eine Faltung parallel der Seilcurve auf die Fläche aufgelegt werden.

20. Bestimmung der Normalreaction.

Wir haben bei unseren Betrachtungen die Normalreaction der Fläche auſser acht gelassen. Die Berücksichtigung derselben geschieht einfach in folgender Weise: Wir wollen auf unserer Fläche ein Linienelement in Richtung der gespannten geodätischen Linien mit ds_2 und in Richtung senkrecht dazu mit ds_1 bezeichnen. Die Spannung, welche in einem von zwei geodätischen Linien eingeschlossenen Streifen der Haut herrscht, sei mit S bezeichnet. Ist die specifische Spannung, d. h. die Spannung für die Längeneinheit gleich σ, so ist $S = \sigma \cdot ds_1$ zu setzen. Längs des Streifens, der von zwei geodätischen Linien eingeschlossen ist, bleibt der Wert S constant, da in der Richtung quer zu den geodätischen Linien keine Spannung herrscht und auch die Normalreaction keine Componente in Richtung des Streifens hat. Die specifische Spannung ist daher in einem solchen Streifen der Breite desselben umgekehrt proportional. Wir greifen nun auf demselben ein Stück von der Länge ds_2 heraus und bezeichnen die Normalreaction der Fläche gegen dieses Stück mit N. Wir setzen $N = \nu \cdot ds_1 \cdot ds_2$, wobei ν wiederum den auf die Flächeneinheit reducirten Druck der Haut gegen die Fläche bedeutet. Die beiden Spannungen S, welche in der Längsrichtung des Streifens an unserem Element angreifen, mögen den Winkel τ mit einander einschlieſsen. Derselbe ist der Contingenzwinkel der Krümmung des Normalschnittes der Fläche längs der geodätischen Linie. N muſs die Resultante der beiden unter dem Winkel τ geneigten Spannungen S sein. Daher ist notwendigerweise $N : S = \tau$. Führen wir die specifischen Spannungen ein, so erhalten wir:

$$\frac{\nu \cdot ds_1 \cdot ds_2}{\sigma \cdot ds_1} = \tau \quad \text{oder} \quad \frac{\nu}{\sigma} = \frac{\tau}{ds_2} = k.$$

Der Quotient $\tau : ds_2$ ist die Normalkrümmung der geodätischen Linie, und wir haben die Beziehung, daſs das Verhältnis des Flächendruckes zur Hautspannung gleich der Normalkrümmung der geodätischen Linie ist. — Wenn der Flächendruck gleich 0 vorausgesetzt wird, so findet keine Normalreaction zwischen der ge-

spannten Haut und der Fläche statt, letztere kann demnach in Wegfall kommen, und wir haben es nun mit einer einseitig, frei im Raume gespannten Haut zu thun. Ihre gespannten geodätischen Linien müssen notwendig Gerade, und ihre Form mufs die einer windschiefen oder abwickelbaren Fläche sein. Das gilt natürlich nur, solange die Haut einseitig gespannt ist. Allseitig gespannte Häute können unter dem Einflufs von Umfangskräften sehr wohl andere, allerdings überall negativ gekrümmte Formen annehmen. Beispiele bieten die Grenzlagen der im Raume frei ausgespannten Tschebytschef-Voss'schen Netze und ihrer Gespinnste. Auch die Minimalflächen gehören aus Gründen, die zwar aus den hier geführten Entwickelungen nicht unmittelbar einleuchten, zu jenen Formen.

21. Einseitig gespannte Häute unter constantem Innendruck.

Wir denken uns nunmehr eine allseitig geschlossene Haut und wollen dieselbe etwa durch Aufblasen einem constanten Innendruck aussetzen. Es entsteht die Frage: Nach welcher Fläche stellt sich die Haut unter der Wirkung des constanten Innendruckes ein, bezw. bei welcher Form der Haut schliefst dieselbe das gröfste Volumen ein? — Dafs die Beantwortung beider Fragen auf dasselbe hinauskommt, folgt aus dem „Princip der virtuellen Verschiebungen". Die Arbeit, welche der Innendruck bei der Verschiebung der Haut leistet, ist gleich dem Druck mal der Volumenänderung. Für den Gleichgewichtsfall ist notwendige und hinreichende Bedingung, dafs diese Arbeit bei allen mit den Bedingungen verträglichen unendlichkleinen Volumenänderungen unendlichklein von höherer Ordnung sei. Das ist aber auch eine notwendige Bedingung für das Eintreten eines Maximums des Volumens. Die Bedingung, dafs wirklich ein Maximum eintritt, fordert, dafs jene unendlichkleine Gröfse höherer Ordnung stets negativ sei. Sie ist gleichbedeutend mit der Forderung, dafs das Gleichgewicht der wirkenden Kräfte ein stabiles sei. Die Fläche, nach welcher sich die Haut unter der Wirkung des constanten Ueberdruckes einstellt, ist aus der Haut entweder durch reine Biegung verbunden mit allseitiger Spannung, oder durch einseitige Spannung mit Faltung in der Art hervorgegangen, wie wir das vorhin betrachteten. Die in der Haut entstehenden Spannungen müssen bewirken, dafs der specifische Normaldruck an allen Stellen derselbe ist. Für die gefalteten Teile ergiebt sich hieraus die Bedingung: $\nu = \text{const.}$ oder $k \cdot \sigma = \text{const.}$ Das Product aus der specifischen Spannung der Haut in die Krümmung einer gespannten geodätischen Linie mufs längs derselben constant sein. Beziehen wir die entstandene Fläche auf ein System orthogonaler geodätischer Coordinaten, sodafs das Linienelement

$$ds^2 = du^2 + G \cdot dv^2$$

wird [$dv = 0$ geodätische Linie], so ist die früher mit ds_1 bezeichnete Gröfse gleich $\sqrt{G} \cdot dv$, und die Spannung wird: $S = \sigma \cdot \sqrt{G} \cdot dv$. Daher ist

$$\frac{\nu \cdot dv}{S} = \frac{k}{\sqrt{G}}.$$

Die Gröfse k ist beim gewählten Coordinatensystem identisch mit der Gröfse D, der ersten Fundamentalgröfse zweiter Ordnung*). Die linke Seite der letzten Gleichung ist von u unabhängig, sodafs wir auch schreiben können:

$$\frac{\partial\left(\frac{D}{\sqrt{G}}\right)}{\partial u} = 0.$$

Diese Beziehung zusammen mit den Codazzi'schen Gleichungen bestimmt die gesuchten Flächen.

Durch folgende geometrische Betrachtung kann man zeigen, dafs eine Fläche dieser Art bestimmt ist, sobald man eine gespannte geodätische Linie [die analytisch von zwei willkürlichen Functionen abhängt] beliebig giebt. Man kann nämlich dann die Fläche folgendermafsen schrittweise erzeugen. Zunächst sucht man die windschiefe Fläche der Binormalen der gegebenen Curve. Auf dieser ist sie geodätische Linie. Dann begrenzt man auf der Fläche der Binormalen einen unendlich schmalen, an die Curve angrenzenden Streifen, dessen Breite umgekehrt proportional der Krümmung der gegebenen Curve ist. Durch die zweite Begrenzung des Streifens legt man wiederum die Fläche der Binormalen und bestimmt auf ihr einen zweiten Streifen, dessen Breite wiederum der Krümmung der neuen Curve umgekehrt proportional ist. Auf diese Weise kann man die Fläche streifenweise erzeugen.

In manchen Fällen lassen sich, gestützt auf Symmetriegründe, diejenigen geodätischen Linien auf der Haut angeben, welche im aufgeblasenen Zustande gespannt sind. Wenn wir z. B. aus einer doppelten ebenen Haut [Seidenpapier] ein Oval herausschneiden und die beiden Blätter am Rande verbinden, so ist zu erwarten, dafs die aufgeblasene Fläche eine Symmetrieebene besitzt, in welche die Curve zu liegen kommt, an der die beiden Blätter aneinandergefügt sind. Die gespannten geodätischen Linien müssen auf den beiden Teilen

*)
$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

symmetrisch liegen, und da durch einen Punkt immer nur eine solche geht, senkrecht die Symmetrieebene durchsetzen. Auf der in die Ebene ausgebreiteten Doppelfläche werden dieselben in die Normalen zum Rande übergehen. Hat das Oval in der Längsrichtung eine Symmetrielinie, so wird diese die Rolle einer Seilcurve spielen, und die gespannten geodätischen Linien werden an ihr enden. Die aufgeblasene Fläche hat dann die in beistehender Figur dargestellte Form, von deren Richtigkeit man sich durch einen Versuch leicht überzeugen kann. [Vergl. Fig. 31].

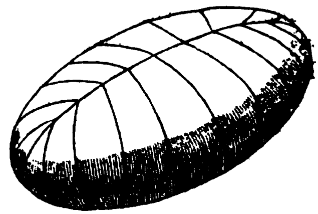


Fig. 31.

22. Rotationsflächen unter constantem Innendruck.

Werden die gesuchten Flächen als Rotationsflächen vorausgesetzt, so sind sie leicht zu ermitteln. Die gespannten geodätischen Linien sind hier die Meridiane. Wenn wir uns erinnern, daſs die Breite eines Streifens zwischen zwei geodätischen Linien umgekehrt proportional der Krümmung der geodätischen Linien sein muſs, und bedenken, daſs die Breite des Streifens in unserem Falle proportional dem Radius des Parallelkreises ist, so haben wir für die gesuchte Meridiancurve die Beziehung, daſs das Product aus dem Krümmungsradius in die Entfernung von einer geraden Linie [Drehaxe] constant sein muſs. Die Curven von dieser Eigenschaft sind wohlbekannt. Es sind dies nichts anderes als die sogenannten elastischen Linien, nämlich jene Curven, in welche sich die Axe eines homogenen dünnen elastischen Stabes von kreisförmigem Querschnitt unter dem Einfluſs zweier an den Enden angreifender, in einer Ebene liegender Kräfte verbiegt. Die Rotationsaxe unseres Meridianes fällt dabei mit der gemeinsamen Actionslinie jener Kräfte zusammen. Um einen einfachen speciellen Fall herauszugreifen, denken wir uns ein ebenes kreisförmiges Doppelblatt am Rande zusammengefügt und einem constanten Innendruck ausgesetzt. Die erzeugte Fläche wird eine Rotationsfläche. Der Meridian derselben sitzt senkrecht auf der Rotationsaxe auf [*ab* in der Fig. 32] und stellt daher jenen Fall der elastischen Linie dar, bei welchem die Tangenten in den stets auf der Actionslinie der Kräfte liegenden Wendepunkten unter sich parallel und senkrecht zur Actionslinie sind. [Vergl. die Fig. 32*α*.] Es ist dabei nebensächlich, daſs man die Haut als kreisförmiges Doppelblatt angenommen hat. Man hätte ebensowohl einen Cylinder mit Grund- und Deckfläche, bei dem das Verhältnis zwischen Radius des Grundkreises und Höhe einen gewissen Betrag nicht überschreitet, nehmen können. Auch dieser giebt aufgeblasen dieselbe Fläche, vorausgesetzt, daſs die

Summe aus Durchmesser und Höhe gleich ist dem Durchmesser des kreisförmigen Doppelblattes. Würde man ein einfaches kreisförmiges Blatt vom doppelten Radius am Rande solange falten, bis sich schliefslich der Rand in einen Punkt zusammenzieht, und den auf diese Weise gebildeten Innenraum aufblasen, so käme wiederum dieselbe Form zum Vorschein. Sie wäre nur insofern nicht mehr ganz symmetrisch, als die obere und untere Hälfte verschieden stark gefaltet sind. Durch besondere Anordnungen lassen sich auch die übrigen Rotationsflächen der elastischen Linie mittels aufgeblasener Häute erzeugen. So kann man die Rotationsfläche der sinusförmigen Curve dadurch herstellen, dafs man die Mittelpunkte der beiden Hälften des kreisförmigen Doppelblattes durch eine eingefügte starre Verbindung in einer Entfernung hält, die gröfser ist als die Länge der Rotationsaxe [ab] des aufgeblasenen Doppelblattes. Ist die Verbindungslinie kürzer, so erhält man eine apfelförmige Form des Rotationskörpers, die der beistehenden Gestalt [Fig. 32β] der elastischen Linie entspricht. Die anderen Formen der elastischen Linie lassen sich am einfachsten dadurch erzeugen, dafs man einen Teil des Doppelblattes durch eine steife Kreisscheibe ersetzt. Das aufgeblasene Gebilde ist dann von zwei parallelen Ebenen begrenzt, und der wulstförmige Rand nach einer elastischen Linie von der Form der Fig. 32γ gekrümmt. Es liegt sehr nahe, den Versuch zu machen, eine ringförmige Fläche durch Aufblasen zu erzeugen, um zu den Formen zu gelangen, welche durch Rotation des schraffirten Teiles der Figur 32γ entstehen. Man wird zu diesem Behufe ein rechteckiges Blatt Papier zunächst in der Mitte der Längsaxe zusammenknicken, die parallelen Seiten in Verbindung bringen, dann diese cylinderförmige Haut nochmals senkrecht zur früheren Richtung knicken und die beiden ringförmigen Enden zusammenschliefsen, sodafs eine Haut vom Zusammenhang einer Ringfläche entsteht, und man könnte vermuten, dafs dieselbe beim Aufblasen in eine wulstförmige Form mit dem soeben charakterisirten Querschnitt übergeht. Dabei würden der äufsere Umkreis sowie die Meridiane gespannt, die Fläche dazwischen gefaltet sein. Ein diesbezüglicher Versuch ergiebt die Thatsache, dafs die so construirte Haut sich beim Aufblasen an zwei gegenüberliegenden Enden in starke Falten wirft und eine in Fig. 33 angedeutete Form annimmt. Es ist offenbar die Rotationsfläche keine stabile Gleichgewichtsform. Dann kann

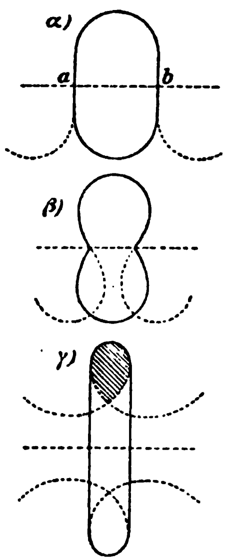


Fig. 32.

sie auch unter den gegebenen Bedingungen kein Maximum von Inhalt haben. Diese Folgerung läfst sich unschwer bestätigen. Man kann zeigen, dafs es Nicht-Rotationsflächen giebt, die alle Bedingungen erfüllen und einen ebenso grofsen Raum umschliefsen wie jene vermutete Rotationsfläche. Deformiren wir nämlich den äufseren Kreis der Rotationsfläche ohne Änderung seiner Länge zu einer ebenen, überall convexen Curve, deren Krümmungsradius aber nirgends unter eine bestimmte Grenze, die durch die Gröfse des Querschnittes gegeben ist*), herabgehen soll, und lassen wir längs derselben den schraffirten Querschnitt so gleiten, dafs seine Ebene immer senkrecht zur deformirten Curve steht und dafs die Symmetrielinie des Querschnittes in die Normale der deformirten Curve fällt, während der oberste Punkt desselben immer auf der Curve bleibt, so entsteht eine Fläche, auf welcher die verschiedenen Lagen des bewegten Querschnittes geodätische Linien sind, die natürlich dieselbe Länge haben wie die entsprechenden geodätischen Linien auf der ringförmigen Fläche. Die Querdimensionen der einzelnen Streifen zwischen denselben sind in allen Punkten geringer als am äufseren Umfang, während sie auf der Haut überall die Gröfse des äufseren Umfanges besitzen. Die Haut mufs sich also durch Spannung und Faltung auf unsere neue Fläche auflegen lassen. Diese neue Fläche hat aber genau denselben Inhalt wie die Ringfläche. Um dies zu beweisen, haben wir zu beachten, dafs die Volumina beider Flächen gleich sind dem Product aus dem Querschnitt in die Länge des vom Schwerpunkt durchlaufenen Weges. In beiden Fällen beschreibt der Schwerpunkt eine Parallelcurve zum äufseren Umfang. Da die äufseren Umfänge einander gleich sind, so sind es auch die Längen der Schwerpunktswege als Parallelcurven im gleichen Abstande. Es berechnet sich nämlich die Länge der Parallelcurve zu einem Oval im Abstande d als Summe bezw. Differenz aus dem Umfange des Ovals und dem Umfange eines Kreises vom Radius d, solange die Entfernung d unter dem kleinsten Krümmungsradius des Ovals bleibt. Aus diesen Überlegungen folgt, dafs **eine ringförmige Rotationsfläche unter den gegebenen Bedingungen niemals ein Maximum von Inhalt haben kann, da es eben stets andere Flächen giebt, welche auch die Bedingungen erfüllen und gleichen Inhalt umschliefsen.**

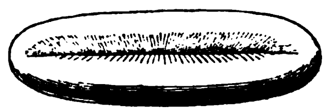


Fig. 33.

Zum Schlusse möge noch die Frage gestreift werden: Welche Form nimmt eine unausdehnbare Haut, die im ungefalteten Zustande

*) Es dürfen sich nämlich bei der Erzeugung der Fläche benachbarte Querschnitte nicht schneiden.

eine vorgegebene geschlossene Rotationsfläche mit einfach zusammenhängendem Innenraum bildet, unter dem Einflusse eines constanten Überdruckes an? Die vorausgegangenen Betrachtungen lassen vermuten, dafs sich das Problem auf ein solches der elastischen Linie zurückführen läfst. Dabei haben wir zunächst zu bedenken, dafs die durch Aufblasen erzeugte Rotationsfläche an keiner Stelle einen Parallelkreis von gröfserem Radius besitzen kann als die Haut, aus der sie entstanden ist. Sind die beiden Radien gleich, so ist dort die Haut allseitig gespannt; ist der Radius des Parallelkreises der Haut im natürlichen Zustande gröfser als im aufgeblasenen, so ist dieselbe längs der Meridiane einseitig gespannt. Es ist ferner zu berücksichtigen, dafs in den einseitig gespannten Teilen der Haut der Meridian nicht convex gegen die Axe gekrümmt sein kann; es würde nämlich der innere Druck solange eine Ausdehnung der Falten der Haut herbeiführen, bis entweder die Haut allseitig gespannt ist oder der Meridian concav gegen die Axe gekrümmt ist. Lassen wir zunächst den zuletzt erwähnten Fall aufser acht, so könnte man den Meridian der aufgeblasenen Rotationsfläche durch folgendes Biegungsexperiment ermitteln. Man verbindet zwei homogene geradlinige elastische Stäbe von der Länge des Meridianes der Haut an den Enden mit Charnieren aneinander, so dafs sie glatt aufeinanderliegen. Zwischen je zwei sich deckende Punkte schalten wir einen unausdehnbaren Faden von der Länge des Durchmessers des zugehörigen Parallelkreises der Haut ein. Nunmehr drücken wir die mit Charnieren verbundenen Stabenden mit zunehmender Kraft gegen einander. Die Stäbe werden ausknicken und eine neue Gleichgewichtslage annehmen. Dieselbe wird zum Teil durch die gespannten unausdehnbaren Fäden, zum Teil durch die natürliche Biegungsform der Stäbe bestimmt. In ersteren Teilen tritt die Meridianform der unaufgeblasenen Haut auf, die hier auch im aufgeblasenen Zustande erhalten bleibt, in letzteren Teilen, wo die unausdehnbaren Fäden noch schlaff sind, macht sich die Meridianform der aufgeblasenen, einseitig gespannten Haut geltend. Letzteres allerdings nur solange, als der vorhin erwähnte convexe Krümmungssinn nicht auftritt. Wollte man das Biegungsexperiment auch für diesen Fall giltig haben, so müfsten die benützten Stäbe so beschaffen sein, dafs sie auf der Innenseite keine Zugspannungen auszuhalten vermögen, was sich allenfalls durch Einkerben erreichen liefse. Solche Stäbe würden dann, statt sich gegen die Axe convex zu biegen, an zwei Stellen unter endlichem Winkel knicken und dazwischen einen concaven Bogen bilden. Jenen Knickungsstellen entsprächen ringförmige Einschnürungen der aufgeblasenen Haut. Die Spannungen in den unausdehnbaren Fäden finden in den Ringspannungen der allseitig gespannten Teile der aufgeblasenen Haut ihr Analogon.

ÜBERSICHT

ÜBER DIE

WICHTIGSTEN LEHRBÜCHER DER

INFINITESIMAL-RECHNUNG

VON EULER BIS AUF DIE HEUTIGE ZEIT.

BERICHT,

ERSTATTET DER DEUTSCHEN MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

VON

G. BOHLMANN.

Vorbemerkung.

Der vorliegende Bericht hat die Absicht, über die hauptsächlichsten Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von Euler bis auf die heutige Zeit eine gedrängte Übersicht zu geben.

Wie man heutzutage weifs, sind für die Differential- und Integralrechnung die drei Begriffe fundamental: Zahl, Function, Grenzwert. Wie diese sich im Laufe der neueren Zeit entwickelt haben, das soll — so weit es für die Lehrbuchlitteratur in Frage kommt — im ersten Capitel dargestellt werden. Vier Stufen werden wir unterscheiden, die durch die Namen Euler, Lagrange, Cauchy, Weierstrafs charakterisirt sind. Sie bezeichnen die Hauptmomente in einer Bewegung, die eine immer weiter gehende logische Verschärfung bedeutet und von Herrn F. Klein*) eine Arithmetisirung der Mathematik genannt worden ist.

Wie sich ihr gegenüber die Autoren der Lehrbücher verhalten haben, werden die folgenden Capitel zu schildern versuchen. Drei Fälle sind zu unterscheiden. Entweder der Verfasser betrachtet die oben genannten Begriffe als etwas unmittelbar Gegebenes und sieht die Art, wie man mit ihnen operirt, als keiner weiteren Begründung bedürftig an; dann gehört er zur naiven Richtung. Oder er sucht sein Werk lückenlos und vollständig durch blofses Schliefsen auf einige wenige, ausdrücklich hervorgehobene Definitionen aufzubauen; er vertritt den arithmetischen Standpunkt. Oder endlich, er nimmt eine Mittelstellung ein, indem er zwar auf Vollständigkeit verzichtet, aber doch die Methoden und Ergebnisse des Arithmetikers nicht unbeachtet läfst. Wir erhalten so drei grofse Classen, in welche sich die Lehrbücher einteilen lassen; jeder von ihnen ist ein Capitel gewidmet; das zweite behandelt die naive, das dritte die arithmetisirende, das vierte die vermittelnde Richtung.

Am Ende des Referates findet der Leser ein Inhaltsverzeichnis, aus dem er die genauere Disposition ersehen kann. Die Jahreszahlen beziehen sich, wenn nichts anderes bemerkt ist, auf die erste Auflage des betreffenden Werkes.

Zum Schlufs möchte ich noch meinem Dank Ausdruck geben für die vielfache Unterstützung und Anregung, die mir von seiten der Fachgenossen zu Teil wurde. Vor allem bin ich Herrn

*) Vergl. F. Klein, „Über die Arithmetisirung der Mathematik". Göttinger Nachrichten 1895.

F. Klein verpflichtet, dem ich nicht nur im einzelnen wertvolle Citate, sondern auch im allgemeinen mehrfache Berichtigung falscher Auffassungen und Eröffnung neuer Gesichtspunkte verdanke. Freilich mufste ich, um das Referat zu dem in Aussicht gestellten Termine liefern zu können, den Rahmen der Darstellung sehr eng fassen. Nur die beiden ersten Capitel konnte ich noch etwas ausgestalten, die beiden letzten beschränken sich auf das, was ich im Jahre 1897 auf der Braunschweiger Versammlung vortrug.

Der Leser möge dieses Mifsverhältnis entschuldigen; andernfalls hätte ich die Fertigstellung des Referates auf unbestimmte Zeit verschieben müssen.

Erstes Capitel.

Die Verschärfung der Grundbegriffe (Zahl, Function, Grenzwert).

§ 1. Euler schafft den Boden für eine Arithmetisirung.

Wenn wir, dem Herkommen folgend, die Periode Eulers als die naive bezeichnen, so sind wir uns der relativen Bedeutung dieses Wortes wohl bewufst. Wir wollen dadurch auf den Gegensatz hinweisen, in welchem sie zu der späteren Zeit der Kritik steht, die wir mit Lagrange beginnen.*) Denn Euler wird es gern nachgerühmt,**) dafs er zuerst die Darstellung der Infinitesimalrechnung von geometrischem Beiwerk losgelöst und das rein Analytische von den Anwendungen geschieden hat. Euler hat also den Boden geschaffen, auf dem eine Arithmetisirung überhaupt erst möglich wurde.

Den Fundamentalbegriffen: Zahl, Function, Grenzwert steht Euler skeptisch gegenüber; numeri nennt er überhaupt nur die rationalen Zahlen, irrationale Zahlen heifsen bei ihm Gröfsen (quantitates). Hierin spricht sich deutlich das Gefühl der Unsicherheit aus, das er der Irrationalzahl und der stetigen Veränderlichen gegenüber hat.

Function definirt er bald als Rechnungsausdruck,***) bald als abhängige Veränderliche;†) er operirt nur mit der Function als Formel. Gelegentlich kommt er dabei auf Schwierigkeiten, er sucht sich klar zu machen, wie wohl $(-1)^x$ als Function von x aufzufassen sei.

Ebenso schwankend steht Euler dem Limes gegenüber. Er hat

*) Dühring (Grundmittel und Erfindungen zur Analysis) rechnet Lagrange noch zum goldenen Zeitalter.

**) Am Schlusse seiner Vorrede zu den Instit. calc. diff. sagt Euler selbst: „Hic autem omnia ita intra analyseos purae limites continentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit ad omnia huius calculi explicanda“.

***) Introductio.

†) Instit. calc. diff.

wohl das Wort, aber nicht den Begriff. Daher die mangelnde Unterscheidung zwischen convergenten und divergenten Reihen, das Resultat

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = -1$$

kommt ihm selbst recht wunderbar vor. Mit den Differentialen kann er sich nicht ganz zurechtfinden, sie sind für ihn wirkliche Nullen, aber ihr Verhältnis repräsentirt einen bestimmten, endlichen Wert, den Differentialquotienten.

Wir wollen uns hier keineswegs auf den Standpunkt stellen, als ob unsere moderne Auffassung aller dieser Dinge die einzig mögliche sei, — als logisch einwurfsfrei und zweckmäfsig hat sie sich allerdings erwiesen. Wir ziehen nur das Facit: Euler genügt es, begriffliche Schwierigkeiten, auf die er stöfst, gelegentlich zu erwähnen, ohne sie jedoch zu beseitigen.

§ 2. Lagrange beginnt die Arithmetisirung.

Lagrange beginnt die Arithmetisirung. Die Zahl freilich ist auch ihm noch etwas Evidentes. Die Function hingegen definirt er zwar wie Euler als Formel, präcisirt aber diese Ausdrucksweise sofort dadurch, dafs er darunter eine nach ganzen, positiven Potenzen der Veränderlichen fortschreitende Reihe versteht. Damit ist der Begriff der analytischen Function geschaffen.

Ihr Zweck ist, den Grenzbegriff als unbequem und metaphysisch aus der Analysis zu verbannen. Dies gelingt beim Differentialquotienten, an dessen Stelle die Ableitung tritt. Diese wird erklärt als Coefficient der ersten Potenz in der Reihenentwickelung. Lagrange hätte sein Ziel erreicht, brauchte man nicht bei der Potenzreihe selbst den Limes.

Trotzdem steht er der unendlichen Reihe nicht so naiv gegenüber wie Euler; er vervollständigt die Taylor'sche Entwickelung durch sein Restglied und basirt dessen Berechnung auf den Mittelwertsatz, der sich seither als unentbehrliches Hülfsmittel in der Differentialrechnung erwiesen hat.

§ 3. Cauchy leistet die Arithmetisirung für Functionen einer Veränderlichen.

Durch Cauchy macht die Arithmetisirung mit einem Male einen gewaltigen Fortschritt. Seine erste That ist die Befreiung von der Formel; Function ist nicht mehr Rechnungsausdruck, sondern abhängige Veränderliche.

Wir verdanken Cauchy vor allem den modernen Grenzbegriff.*)

*) Freilich fehlt die formelmäfsige Definition. Cauchy sagt nur in Worten (Résumé pag. 1): „Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres.“ Dafs er aber unter indéfiniment das Richtige meint, lehren die Anwendungen, die er von seiner Definition macht.

Dieser tritt an die Spitze der Analysis und entfernt dadurch alle jene Schwierigkeiten und Unklarheiten, nach deren Überwindung man bis dahin vergeblich gestrebt hatte. Der Differentialquotient wird wieder was er war, der Grenzwert des Differenzenquotienten; die Differentiale werden rein formal (wie bei Leibnitz) als beliebige Zahlen definirt, deren Quotient der Differentialquotient ist. Das Integral erhält Existenzberechtigung als Grenzwert einer Summe; die Definitionen der Stetigkeit einer Function und der Convergenz einer unendlichen Reihe werden unmittelbar auf den Begriff des Limes gestützt. Wir können geradezu sagen:

Was Cauchy giebt, ist nicht mehr und nicht weniger als eine Theorie der Functionen einer reellen Variablen; was ihm fehlt, ist einmal das, was davor liegt: der Zahlbegriff, sodann, was darnach kommt: die Theorie der Grenzwerte der Functionen von mehreren reellen Variablen. Er kennt nicht die gleichmäſsige Convergenz*), daher seine Irrtümer, daſs jede convergente Reihe von stetigen Functionen eine stetige Summe habe, und daſs jede convergente Reihe bei gliedweiser Integration das Integral der Summe liefere. Auch die gleichmäſsige Stetigkeit hat er nicht.

Wir haben endlich noch Cauchys populärster Schöpfung zu gedenken, seiner Functionentheorie. Zwar bedurfte sie selbst noch recht der Arithmetisirung; auſserdem enthalten Cauchy's Lehrbücher so gut wie garnichts von ihr. Trotzdem darf sie hier nicht unerwähnt bleiben; hat doch die Einführung der complexen Variablen wie kaum etwas anderes die principiellen Fragen gefördert, und ist doch eine Darstellung der Functionentheorie in die meisten modernen Werke über Infinitesimalrechnung aufgenommen. Auf ihren Inhalt einzugehen, können wir bei der Bekanntheit dieses Gegenstandes uns billiger Weise sparen; nur über die Form, welche ihr Cauchy gegeben hat, eine Bemerkung. Diese läſst deutlich den schweren Kampf erkennen, durch den er sich seine Schätze erworben hat. Auf dem mühsamen Wege, daſs er die Singularitäten reeller Integrale und ihre Hauptwerte studirt, erhält er seine Integralsätze, und daſs ihm der Begriff des Integrales in der complexen Ebene von vornherein nicht so evident war, wie es uns jetzt erscheint, das beweist seine Schreibweise, in der er es immer als Mittelwert ausdrückt.

§ 4. Die Arithmetisirung wird fortgesetzt und durch Weierstraſs zu einem gewissen Abschluſs gebracht.

Die jetzt folgende Periode fügt Cauchy's Anschauungen dasjenige hinzu, was ihnen unserem modernen Standpunkte gegenüber

*) Wenigstens in seinen Lehrbüchern. Herr A. Pringsheim teilte mir mit, daſs Cauchy in einer Note der Comptes rendus aus 1853 den Begriff selbständig entwickelt hat.

noch fehlt. In ihrem Mittelpunkte steht Weierstraſs (1815 bis 1897), der zwar selbst kein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung veröffentlicht hat, dessen Vorlesungen aber gerade auf diese Litteratur den nachhaltigsten Einfluſs geübt haben.

Damit soll nicht gesagt sein, daſs Weierstraſs die Vollendung alles dessen zu danken ist, was Cauchy noch zu thun übrig gelassen hatte. Dies wäre in mehrfacher Hinsicht unrichtig. Einmal würde man so zu der Auffassung verleitet, Weierstraſs als Nachfolger von Cauchy anzusehen. Thatsächlich läuft aber die Thätigkeit beider zum Teil parallel; auch knüpft Weierstraſs nur zur einen Hälfte an Cauchy an, von dem er den Limesbegriff*) entlehnt, zur anderen aber an Lagrange, von dem er die Potenzreihe aufnimmt. Gerade die eigentümliche Vereinigung des Cauchy'schen und Lagrange'schen Standpunktes ist für Weierstraſs charakteristisch. Zweitens befindet sich zwischen der Epoche der orthodoxen Weierstraſsianer und der Cauchy's eine Lücke, welche durch die Dirichlet'sche Schule ausgefüllt wird. Auch diese liefert ihre Beiträge zur Arithmetisirung. Endlich ist die kritische Bewegung auch nach Weierstraſs noch zu keinem Abschluſs gelangt. Denn wenn auch zugegeben werden muſs, daſs Weierstraſs sich den Anwendungen gegenüber keineswegs so ablehnend verhalten hat, wie man es sich wohl eine Zeit lang vorstellte, so ging doch sein Programm nur auf die Arithmetisirung der Analysis. Jetzt hingegen arithmetisirt man auch die Geometrie.

Die erstere Entwickelung der Grundbegriffe im einzelnen kann nur in Umrissen angedeutet werden. Sehen wir von anderen (namentlich Bolzano) ab, deren Einfluſs auf die Lehrbuchlitteratur nicht hervortritt, so können wir sagen: Dirichlet's Schüler Dedekind (1872), sowie Heine (1872) und G. Cantor (1872), angeregt durch Weierstraſs, lehren uns, was eine Zahl ist. Die Arbeiten Dirichlet's und seiner Schule über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe klären das Verhältnis, in welchem die beiden Definitionen der Function — einmal als Rechnungsausdruck, das andere Mal als abhängige Veränderliche — zu einander stehen. Auch die englischen Physiker sind an dieser Untersuchung beteiligt. Dabei entdeckt Stokes in seiner Arbeit (1847) „On the critical values of the sums of periodic series"**) die gleichmäſsige Convergenz. Ihr Seitenstück, die gleichmäſsige Stetigkeit, verdanken wir G. Cantor (1872). So bringt die Weierstraſs'sche Richtung die Arithmetisirung der reellen Functionen zu einem gewissen Abschlusse; sie stellt dabei frei, ob man sich auf den Standpunkt Lagrange's oder Cauchy's stellen will. In der Theorie der complexen Functionen

*) Weierstraſs giebt ihm die jetzt übliche formelmäſsige Fassung.
**) a. a. O. Section III. Dieses Citat teilte mir Herr F. Klein mit.

gelingt ihr völlige Präcision nur, solange sie sich auf den Boden Lagrange's stellt, die weitertragende Cauchy'sche Methode vermag sie sich nicht völlig zu unterwerfen, weil sich da grundlegende geometrische Fragen hindernd in den Weg stellen.

Wir treten so in den dritten Abschnitt dieses Paragraphen ein, in die Arithmetisirung der Geometrie. Vorbereitet war diese schon lange durch die grofse Reihe von Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie. Auf der anderen Seite gewinnt speciell die Infinitesimalgeometrie durch die G. Cantor'sche Mengenlehre einen festeren Boden. Wir werden sehen, dafs die Lehrbücher, die sich mit den Grundlagen der Geometrie beschäftigen, gerade diese Gebiete mit Nutzen verwertet haben. Freilich die hier vorhandene Litteratur ist, soweit sie die Infinitesimalrechnung angeht, keine sehr grofse; der Hauptsache nach sind nur die Namen Pasch und Peano zu nennen. Jedoch so viel läfst sich wohl schon jetzt ersehen, dafs die Arithmetisirung der Geometrie wieder einer möglichst geometrischen Behandlung der Geometrie den Weg geebnet hat.

Wir kommen jetzt zur Besprechung der Lehrbücher im einzelnen.

Zweites Capitel.

Die naive Richtung.

§ 1. Die Werke Euler's.

Die Lehrbücher Euler's sind:

1. Introductio in analysin infinitorum (1748).
2. Institutiones calculi differentialis (1755).
3. Institutiones calculi integralis (1768—1794).

Sie haben zahlreiche Auflagen und Ergänzungen erfahren und sind auch in deutscher Übersetzung erschienen. Von ihren Vorgängern unterscheiden sie sich einmal methodisch durch ihre ungeometrische, rein analytische Darstellung, sodann inhaltlich durch ihren Reichtum an neuen Entdeckungen. Im Gegensatz zu den Modernen haftet der Vortrag am Detail; einen Überblick zu gewinnen, ist Sache des Lesers.

Euler interessirt nicht die begriffliche Definition einer Function, sondern die Vielgestaltigkeit ihres analytischen Ausdruckes, und den Wert einer Gleichung schätzt er nicht lediglich nach ihrem logischen Inhalt, sondern auch nach ihrer praktischen Brauchbarkeit für das numerische Rechnen.

Um nun auch auf die einzelnen Werke einzugehen, so ist die Introductio kein eigentliches Lehrbuch der Infinitesimalrechnung, sondern eine Vorbereitung auf diese. Ihr Ziel ist, auf elementarem Wege möglichst alle die Resultate abzuleiten, die man für gewöhn-

lich nur durch die Methoden der Differential- und Integralrechnung erhält. Sie zerfällt in zwei Teile, einen analytischen und einen geometrischen. Dieser ist der Hauptsache nach ein Lehrbuch der analytischen Geometrie, jener würde wohl heutzutage den Titel „algebraische Analysis“ führen.

Überraschend ist im ersten Teile die Fülle der Resultate. Sie betreffen der Hauptsache nach die Entwickelung der rationalen und einfach periodischen Functionen und ihrer Umkehrungen in unendliche Reihen, Producte und Kettenbrüche und ihre Zerlegung in Partialbrüche. Wir finden da die Keime zu ganzen Theorien. An die Partialbruchzerlegung der einfach periodischen Functionen hat bekanntlich die moderne Theorie der elliptischen Functionen angeknüpft, und den Kettenbruchentwickelungen wendet sich die neuere Functionentheorie wieder zu. Die unerschöpflich scheinende Quelle, aus der alle Resultate hergeleitet werden, bilden die beiden Gleichungen

$$e^z = \lim_{m=\infty} \left(1 + \frac{z}{m}\right)^m$$

und

$$e^{zi} = \cos z + i \sin z.$$

Ausdrückliche Erwähnung verdient das Capitel XVI: „De partitione numerorum“; bildet es doch einen der seltenen Fälle, in denen ein Lehrbuch der Infinitesimalrechnung sich mit dem Grenzgebiete von Analysis und Zahlentheorie beschäftigt.

Dem zweiten Teile der Introductio haben wir oben die Überschrift „Analytische Geometrie“ gegeben. In der That ist er überwiegend der Geometrie im Gesamtraum und den Eigenschaften specieller algebraischer Curven und Flächen gewidmet, also Gegenständen, die wir jetzt der analytischen Geometrie zuweisen, und die daher in diesem Referat aufser Betracht bleiben. Dafs die Infinitesimalgeometrie hier einen so kleinen Raum einnimmt, erklärt sich aus dem elementaren Charakter der Introductio. Ohne den Dingen Gewalt anzuthun kann sie nur solche geometrische Verhältnisse in Betracht ziehen, bei welchen die Differentialrechnung mit den Differentialquotienten erster Ordnung auskommt. Wir finden wohl die Construction von Tangenten, Tangentialebenen und Normalen, auch einfache Inhaltsberechnungen, aber nichts über die Krümmungsverhältnisse der Curven und Flächen.

Ganz ignorirt wird die Geometrie in den Institutiones. Eine charakteristische Rolle spielt hingegen die Differenzenrechnung. Die Gleichungen der Differentialrechnung ergeben sich aus analogen der Differenzenrechnung. Umgekehrt werden dann Formeln der Differenzenrechnung als praktische Annäherungen für solche der Differentialrechnung benutzt. Es sei nur an Euler's Summenformel erinnert. Überhaupt tritt die Rücksicht auf das Numerische wieder stark hervor.

Wie wir oben gesehen haben, ist Euler die Unterscheidung von Divergenz und Convergenz nicht geläufig. Um so mehr liegt ihm an der Güte der Convergenz. Langsam convergirende Reihen werden durch Methoden der Differenzenrechnung in rasch convergente verwandelt.

Kaum hervorgehoben zu werden braucht, dafs die formalen Partien der Differential- und Integralrechnung sehr ausführlich behandelt sind. Wir vermissen jedoch unserem heutigen Besitzstande gegenüber den Taylor'schen Satz für Functionen von mehreren Veränderlichen und alles, was mit der Theorie der Determinanten zusammenhängt. In der Lehre von den Differentialgleichungen ist das Additionstheorem der elliptischen Integrale die fundamentale Entdeckung; von einer Integrationstheorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist Euler aber weit entfernt. Die Gleichung $dz = pdx + qdy$ nennt er „absurd“ oder „imaginär“, wenn sie nicht integrabel ist.

Die Ausgabe der Institutiones calculi integralis vom Jahre 1827 ist durch einen Appendix über Variationsrechnung vermehrt, in welchem das Lagrange'sche Kriterium für das Verschwinden der ersten Variation entwickelt ist.

Soviel über die Werke Euler's. Aufgabe der Nachfolger ist es, ihren Inhalt systematisch zu verarbeiten, das Unwesentliche auszuscheiden und die in ihnen enthaltenen fruchtbringenden Ideen möglichst auszubeuten.

§ 2. Die Nachfolger Euler's.

Gewissermafsen das Quellenwerk für die nun folgende Litteratur bildet der grofse Traité von Lacroix:

Lacroix, Traité du calcul différentiel et intégral, 3 Bde. 4°,

der im Jahre 1797 zuerst herausgegeben, dann 1810 in einer wesentlich vermehrten Auflage erschienen ist. Dieser stellt sich die gewaltige Aufgabe, die bisher vorhandene Litteratur über Differential- und Integralrechnung und ihre Anwendungen möglichst vollständig zusammenzutragen und zu einer einheitlichen Darstellung zu verarbeiten. Die Basis bilden vor allem die Lehrbücher Euler's, über die wir im vorigen Paragraphen berichtet haben, und die von Lagrange, welche im nächsten Capitel zur Sprache kommen werden. Der von Lacroix behandelte Stoff ist daher im wesentlichen weiter nichts als die Summe dessen, was den Inhalt der Lagrange'schen und Euler'schen Lehrbücher ausmacht, über den wir sowieso berichten müssen. Im Gegensatze zu Euler fällt besonders auf, dafs Lacroix, Lagrange's Beispiel folgend, auch den geometrischen Anwendungen ausführliche Beachtung schenkt.

Eine erhebliche Wandlung erfährt die Differenzenrechnung. Es

ist interessant zu beobachten, zu welcher Resultante sich hier die Einflüsse Euler's, Lagrange's und Lacroix's vereinen. Wir wissen, daſs bei Euler Differential- und Differenzenrechnung in fortwährender Wechselwirkung zu einander stehen, die namentlich dem Numerischen zu gute kommt. Lagrange will überhaupt nichts von der Differenzenrechnung wissen, er verbannt sie ganz aus seinen Werken; das formale Element, das bei ihm vorherrscht, ist eben die Potenzreihe. Lacroix löst nun die Differenzenrechnung überhaupt von der Differentialrechnung los und behandelt sie für sich in einem dritten und letzten Bande. Gleichzeitig verarbeitet er die Methoden von Laplace's Théorie des probabilités mit hinein. Die innerliche Beziehung zur Differentialrechnung geht dadurch bereits etwas verloren.

Principiell steht Lacroix ganz auf dem Boden der Naiven. Lagrange's Definition der Ableitung und sein Operiren mit der Potenzreihe wird zwar auch erwähnt, aber doch nur als etwas, was dem Euler'schen Standpunkte coordinirt ist. Der eminente Fortschritt, den das Einsetzen von Lagrange's Kritik bedeutet, ist Lacroix nicht zum Bewuſstsein gekommen. Trotzdem dürfte sein Traité auch für den modernen Mathematiker genug des Interessanten bieten.

Weit wirksamer war freilich Lacroix's kleines Lehrbuch:

Traité élémentaire du calcul différentiel et intégral, 2 Bde., 8°, 1797,

das bei einem Umfange von nur 2 Octavbändchen doch die Hauptsachen der Differential- und Integralrechnung wiedergiebt. Dabei ist der zweite Band noch der Summen- und Differenzenrechnung gewidmet. Der Erfolg des Werkchens war ganz auſserordentlich. Zum achten Male wurde es im Jahre 1874 von I. A. Serret und Hermite herausgegeben und durch Noten vervollständigt. Serret's Zusätze zielen meist auf Verschärfung der Begriffe und tragen das Gepräge des im vierten Capitel erwähnten eigenen Lehrbuchs von Serret. Hermite hat dem Werke seine berühmte „Note sur les fonctions elliptiques" hinzugefügt, die geradezu typisch geworden ist für die Behandlung der elliptischen Functionen in den französischen Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung. Sie trägt der Hauptsache nach die Abel-Jacobi'sche Theorie mit Ausschluſs der Transformationstheorie vor in der Form, die ihr Briot und Bouquet gegeben haben; doch erfährt der Leser auch, was $\wp(u)$ ist, und er lernt die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung kennen, der die Periodicitätsmoduln des elliptischen Integrales erster Gattung genügen. Das Beweismittel ist die analytische Rechnung, über deren leitende Gedanken der Leser jedesmal orientirt wird.

Bei dem groſsen Erfolge des Traité élémentaire ist es nicht zu verwundern, daſs er eine ganze Reihe von Nachfolgern oder Nachahmern gefunden hat. Eines der gelesensten Bücher ist das von Navier:

Navier, Résumé des leçons à l'école polytechnique (1840), das unter Verzichtleistung auf jede Strenge den französischen Ingenieuren einen leichtfaſslichen Lehrgang der Infinitesimalrechnung zu bieten sucht. In Deutschland hat es durch die Wittstein'sche Übersetzung eine groſse Verbreitung gefunden. In England kann das Buch von Todhunter:

I. Todhunter, A treatise on the differential and integral calculus with numerous examples. London-New-York 1852, 2 Bde, 8°

als sein Gegenstück aufgefaſst werden. Es hat ebenfalls einen groſsen Erfolg gehabt und wird auch jetzt noch immer wieder in neuen Auflagen herausgegeben. Jedenfalls ist es dasjenige Lehrbuch — und darin liegt seine Bedeutung —, das über den vor ihm immer noch in England herrschenden orthodoxen Newtonianismus einen entscheidenden Sieg davon getragen und die Leibnitz'sche Darstellungsweise definitiv eingebürgert hat.

Im übrigen wird die weitere Entwickelung der naiven Schule gehemmt durch den immer wachsenden Einfluſs Cauchy's. Man zieht sich teils (wie z. B. Lübsen) auf einen pädagogischen Standpunkt zurück und verschlieſst sich und den Leser gegen die Erkenntnis; wir finden aber auch geradezu reactionäre Schriften, wie Dühring*), die sich mit aller Kraft gegen den gefährlichen Feind wehren.

§ 3. Formale Richtungen.

Wir würden die Bedeutung Lacroix's und seiner Vorgänger nur unvollkommen verstehen, wollten wir uns mit der soeben geschilderten Litteratur begnügen, deren Einfluſs sich bis in die neueste Zeit hinein aller Arithmetisirung zum Trotz erhalten hat. Wir haben auch noch der formalen Richtungen zu gedenken, die zwar jetzt in den Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung nur eine ganz untergeordnete Rolle spielen, die aber zu Lacroix's Zeiten eine geradezu dominirende Stellung eingenommen haben.

Der Leser wird sich der Schilderung erinnern, die wir von Lacroix's Differenzenrechnung gegeben haben. Wenn sie auch unserem heutigen Standpunkte fern liegt, so hat sie doch eine umso ausgedehntere Wirksamkeit zu Beginn dieses Jahrhunderts gehabt. Diese äuſsert sich nach zwei Seiten hin: die formalen Eigenschaften der Potenzreihe interessiren die eine, die Methoden der Differenzenrechnung überhaupt die andere Partei. Nur ganz wenige Namen seien angeführt. Die Anhänger der Potenzreihe betrachten sich als die berufenen Vertreter der Lagrange'schen Ideen und

*) a. a. O.

breiten sich durch Vermittelung des Strafsburger Professors Arbogast (Calcul des dérivations 1800) nach Osten aus. In Deutschland entsteht eine ganze combinatorische Schule, die unter Anführung von C. F. Hindenburg den polynomischen Satz als das wichtigste Theorem der Analysis bezeichnet.*) Die östliche Grenze dieser Bewegung bezeichnet der polnische Philosoph Wronski, der zwar dem principiellen Standpunkte Lagrange's nicht beizutreten vermag**), dafür aber umsomehr das formale Element schätzt, zu dessen Ausbildung Lagrange die mehr oder weniger unschuldige Veranlassung gewesen ist. Mit seinem „Loi suprème“ glaubt Wronski die ganze Mathematik zu umspannen.

Mag man nun über diese Untersuchungen denken, wie man will, für uns genügt es zu constatiren, dafs die combinatorische Schule die Lehrbücher der Infinitesimalrechnung eher gehemmt als gefördert hat.

Nicht so Ungünstiges ist über die andere Bewegung zu berichten, die sich die Pflege der Differenzenrechnung zur Aufgabe gemacht hat. In der That kommen hier auch andere als formale Interessen ins Spiel. Wir haben eine algorithmische und eine begriffliche Seite zu unterscheiden. Die erstere beschäftigt sich mit den Regeln zur Bildung von Summen und Differenzen und mit der formalen Integration der Differenzengleichungen, d. h. mit dem Aufsteigen von der Recursionsformel zur independenten Darstellung. Sie ist vernünftiger Weise nicht als Selbstzweck anzusehen, sie ist vielmehr dazu da, die begrifflichen Betrachtungen gelegentlich zu erleichtern und den Bedürfnissen des numerischen Rechnens zu Hülfe zu kommen.

Der begriffliche Teil untersucht — ganz allgemein gesprochen — die Modificationen, welche die mathematischen Resultate erleiden, wenn an Stelle der stetigen Veränderlichen unstetige eingeführt werden. Veranlassung zu dieser Fragestellung könnte die Physik gegeben haben; thatsächlich aber hat diese auf die Differenzenrechnung keinen directen Einflufs ausgeübt, vielmehr ist auch hier das Bedürfnis des praktischen Rechnens ausschlaggebend gewesen: Mit welcher Annäherung kann man den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten, das Integral durch eine Summe ersetzen? Die Interpolation und die mechanische Quadratur sind die Capitel, die hier in Frage kommen.

Verfolgen wir nun die thatsächliche Entwickelung der Differenzen-

*) Der polynomische Lehrsatz, das wichtigste Theorem der ganzen Analysis. Neubearbeitet von Tetens, Klügel, Kramp, Pfaff und Hindenburg. Zum Druck befördert von C. F. Hindenburg. Leipzig 1796.

**) H. Wronski, Réfutation de la théorie des fonctions analytiques. Paris 1812. Eine Gesamtausgabe seiner Werke wird von Dickstein in Warschau vorbereitet.

rechnung, so können wir die Thatsache constatiren, dafs sie, soweit die Formeln ihr Selbstzweck sind, sich vollständig von Differential- und Integralrechnung separirt; ihre begrifflichen Resultate, welche auf den Zusammenhang der beiden Gebiete hinarbeiten, werden hingegen von den Lehrbüchern der Infinitesimalrechnung absorbirt. Die Mittelwertsätze und der Taylor'sche Satz gehören in diesen zum eisernen Bestande, die Lehre von der mechanischen Quadratur nicht zu den Seltenheiten. Freilich geht hierbei das Bewufstsein verloren, dafs diese Einzelheiten durch ein gemeinsames Band verknüpft sind.

Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dafs die Monographien über Differenzenrechnung nicht auch im Sinne des Fortschrittes sich entwickelt haben. Schon Boole's Finite Differences bringen trotz ihrer Symbolik den Zusammenhang mit der Differentialrechnung wieder zur Geltung. Einen weiteren Erfolg bedeutet das Lehrbuch von Schlömilch, indem es die Genauigkeit, mit der die Formeln der Differenzenrechnung die der Differentialrechnung approximiren, durch Einführung des Restgliedes abschätzt. Das russische Lehrbuch von Markoff endlich — um andere zu übergehen — hebt wieder das Numerische nachdrücklich hervor; gleichzeitig interessirt es durch Tchébychef's Verallgemeinerungen des Gaufs'schen Verfahrens zur mechanischen Quadratur.

Wir wenden uns jetzt zum dritten und vierten Capitel, müssen uns aber dabei im wesentlichen auf einen Abdruck des in Braunschweig Vorgetragenen beschränken.

Drittes Capitel.

Arithmetisch-systematische Richtung.

§ 1. Die Werke Lagrange's.

In Lagrange's Werken fällt schon äufserlich das Überwiegen des Textes über die Formeln und die Eleganz der letzteren auf. Sodann kommt in ihnen auch die Geometrie wieder zu ihrem Rechte, auf welche die Infinitesimalrechnung vielfach angewandt wird. So sehr Lagrange ferner seinem ganzen Standpunkte nach an Formeln haftet, so wenig behagt ihm überflüssige Rechnung. Vielleicht ist es sein hieraus entspringender energischer Protest gegen die Differenzenrechnung, der diese teilweise in Mifscredit bringt. Natürlich findet sich in seinen Werken eine ausführliche Darlegung seiner Variationsrechnung. Es ist nicht wunderbar, dafs diese ihre Hauptleistung in der Berechnung der ersten Variation für die allgemeinsten Fälle sucht. Wohl aber ist es wunderbar — wie bei dieser Gelegenheit eingeschaltet sein mag —, dafs auch die neuesten Lehrbücher der Analysis über diesen Standpunkt kaum hinausgehen und die modernen Kriterien vermissen lassen, die Weierstrafs und

seine Vorgänger durch Hinzuziehung der zweiten Variation erhalten haben.

§ 2. Méray.

Direct an Lagrange knüpft der Franzose Méray an, der übrigens ganz der Neuzeit angehört. Er ist zwar gezwungen, den Grenzbegriff — mindestens für die Functionen einer ganzzahligen Veränderlichen — von Cauchy zu entlehnen, den er bei der Zahl- und bei der Reihenconvergenz braucht. Im übrigen aber sieht er die analytische Entwickelbarkeit einer Function als obersten Grundsatz an. Dieser mufs als selbstverständlich betrachtet, und die dann überflüssigen Begriffe der Stetigkeit, Differentiirbarkeit u. s. w. müssen über Bord geworfen werden. Um den Beweis für diese Behauptung zu erbringen, leitet Méray geradezu — und hierin berührt er sich mit Weierstrafs — die Cauchy'sche Functionentheorie allein aus den Eigenschaften der Potenzreihe her. So steht die Lehre von den Functionen der complexen Variabeln an der Spitze; aus ihr folgt gleichsam als Corollar die Lehre von der reellen Veränderlichen, d. h. die Infinitesimalrechnung mit ihren geometrischen Anwendungen.

Mit einem historischen Sprunge nach rückwärts wenden wir uns jetzt zu:

§ 3. Cauchy und seine Schule.

Cauchy's Résumé des leçons données à l'école polytechnique von 1823 und seine Applications du calcul infinitésimal à la géométrie von 1826 bilden zwei ziemlich dünne Quartbände, die nicht nur, was die begriffliche Schärfe anbelangt, sondern auch hinsichtlich der Auswahl und Anordnung des Stoffes Muster für fast alle folgenden Lehrbücher geworden sind. Ergänzt werden dieselben durch Cauchy's Cours d'analyse von 1821, namentlich in der Theorie der unendlichen Reihen. Bei Limesbetrachtungen mit mehr Variablen enthält der letztere jedoch mehrfache Unrichtigkeiten. In den Jahren 1840—1844 wurden seine Vorlesungen von seinem Schüler Moigno in einem Werke herausgegeben, das zwar an Präcision Cauchy nicht erreicht, dafür aber verschiedene neuere Theorien hinzufügt. Aus derselben Schule sind im wesentlichen auch der vierbändige Cours von Houël und der siebenbändige Traité von Laurent hervorgegangen. Beide suchen möglichst alles zu bringen, was man in der Analysis wissen mufs. Besondere Berücksichtigung finden die elliptischen und Abel'schen Functionen und die allgemeine Functionentheorie. Die Lehre von den elliptischen Functionen trägt hier, wie in der Regel in den französischen Büchern, den Charakter, den ihr Hermite in seiner bekannten Note*) gegeben hat. Die Abel'schen Functionen

*) Vergl. S. 101.

werden nach Riemann in der Art von C. Neumann behandelt. Das Houël'sche Werk enthält noch etwas Vectoranalysis, das Laurent'sche auch die Lie'schen Theorien.

§ 4. Die Weierstrafs'sche Schule.

Die Litteratur, welche man bei der Weierstrafs'schen Schule angegeben findet*), ist ja allgemein bekannt. Nur die bekanntesten Namen habe ich aufgeführt. Ich weifs nicht, ob man mir Recht giebt, wenn ich sage: In Deutschland finden wir durch Stolz das gründlichste, in Frankreich durch Jordan das vollständigste, in Italien durch Dini das weitgehendste Werk vertreten.

§ 5. Peano.

Im fünften Paragraphen habe ich einige Lehrbücher von Peano namhaft gemacht. Die Applicazioni geometriche operiren mit veränderlichen Figuren und deren Grenzlagen und stellen über diese Sätze auf in ähnlicher Weise, wie sich die Analysis mit veränderlichen Zahlen und deren Grenzwerten von jeher beschäftigt hat. Wir haben es hier also mit einer beginnenden Arithmetisirung der Geometrie zu thun. Durch ausgiebige, aber mafsvolle Benutzung der Vectoranalysis wird die Schwerfälligkeit vermieden, welche in der Geometrie das Operiren mit einem bestimmten Coordinatensystem mit sich bringt. Die Lezioni enthalten ähnliche Untersuchungen auch für den n-dimensionalen Raum und suchen hinsichtlich der Präcision des Ausdrucks das Äufserste dadurch zu leisten, dafs sie sich beim Aussprechen der Theoreme der Peano'schen Begriffsschrift bedienen.

Viertes Capitel.

Vermittelnde Richtungen.

§ 1. Die Cauchy'sche Schule.

Ich komme jetzt zu den vermittelnden Richtungen. Wir haben da zunächst eine Reihe von Werken Cauchy'scher Schule zu erwähnen, die zwar ihren arithmetischen Ursprung nicht verleugnen, aber gelegentlich mit einem „il est clair“ gefährliche Stellen überspringen. Sturm und Serret sind allgemein bekannt. Als englisches Seitenstück zum Serret kann das vierbändige Lehrbuch von Price aufgefafst werden. Der ebenso glänzend geschriebene als reichhaltige Calcul von Bertrand umfafst zwei starke Quartbände. Er geht gerade auf solche Dinge gern ein, die man in den übrigen Lehrbüchern trotz des Interesses, das sie beanspruchen dürfen, ver-

*) Vgl. das Verzeichnis am Schlufs dieses Berichtes, auf das wir wegen der einzelnen Namen verweisen.

geblich sucht. Für Polytechniker bestimmt ist das in seiner Art ausgezeichnete, aber abstracte Compendium von Schlömilch (1853), sowie die Differential- und Integralrechnung von Kiepert-Stegemann, die durch besondere Berücksichtigung des numerischen Rechnens ihrem Publicum mehr entgegenkommt.

§ 2. Die Eklektiker.

Eine andere Methode, zwischen den Ansprüchen der Wissenschaft und den Bedürfnissen des Lesers einen Compromifs zu schliefsen, ist die der Eklektiker. In gewissem Sinne gehören zu ihnen alle Verfasser von Monographien über Differentialgleichungen, elliptische Functionen u. s. w. Diese lassen wir aber hier beiseite und beschäftigen uns lediglich mit den Büchern über Infinitesimalrechnung. Unter Verzicht auf einen vollständigen Lehrgang greifen die Eklektiker die Punkte heraus, die sie gerade besonders interessiren, und die sie mit aller erforderlichen Exactheit behandeln. Die elliptischen Functionen lernen wir aus dem Cours von Hermite noch nach Jacobi, aus dem von Demartres bereits nach Weierstrafs kennen. Picard's Traité belehrt uns über Randwertaufgaben sowie über die functionentheoretische und gruppentheoretische Behandlung der Differentialgleichungen. Kronecker's Vorlesungen wiederum tragen einen mehr Dirichlet'schen Charakter und betonen u. a. die Zahlentheorie und die Lehre von den Fourier'schen Reihen. Pasch's Einleitung trägt die grundlegenden Fragen der Infinitesimalrechnung vor. Ihr Ziel ist, diese einmal mit möglichster Schärfe zu behandeln; aufserdem aber will sie dem Leser auch klar machen, wie man auf sie gekommen ist. Die Ungenauigkeit, die unserer Anschauung anhaftet, die Genauigkeit, die wir von unseren Begriffen fordern müssen: dieser Gegensatz wird in ihr scharf hervorgehoben. Pasch's Vorlesungen über neuere Geometrie können wir zu den obengenannten Peano'schen Lehrbüchern in Parallele setzen, insofern sie — wenn auch von einem anderen Standpunkte aus — die Grundlagen der Geometrie einer sorgfältigen Prüfung unterwerfen.

Schüler und Lehrer können auch in der Weise einen Pact eingehen, dafs dieser den Gedankenkreis von jenem berücksichtigt, sei es, dafs er die mathematischen Begriffe allgemein menschlichen Vorstellungen unterordnet und sich so mit den Philosophen auseinandersetzt, sei es, dafs er speciell auf die Naturwissenschaften sich bezieht und mit den Physikern einen Bund schliefst.

§ 3. Philosophische Richtung.

Um mit den Philosophen zu beginnen, so ist bekannt, wie Hegel's Philosophie die Zeitgenossen beherrscht hat. Der Gegensatz

von Sein und Werden spielt in ihr eine grofse Rolle. Demgemäfs setzt Snell auseinander, wie die Differentialrechnung das Werden beherrscht, während die Integralrechnung das Gewordene bezeichnet. Das Systematisirende der Hegel'schen Logik ruft ferner den Hang hervor, aus allgemein philosophischen Prämissen die einzelnen Resultate der verschiedenen Wissenschaften zu deduciren. Hiermit in Verbindung bringen wir Ohm's Versuch eines vollkommen consequenten Systems der Mathematik und Duhamel's Sciences des raisonnements. P. du Bois-Reymond fragt in seiner Allgemeinen Functionenlehre: Hat der Idealist Recht, der die Existenz eines genauen Mafses behauptet, oder der Empirist, der sie leugnet? Sein Resultat ist — wie ich mich ausdrücken möchte — eine positive Skepsis: Beide haben Recht. Das Ergebnis kann uns nicht Wunder nehmen; denn in letzter Instanz entscheidet über Wirklichkeit oder Nichtwirklichkeit von irgend etwas schliefslich doch nur der Umstand, ob sich dieses Etwas widerspruchsfrei in unsere übrigen Vorstellungen einordnen läfst. Statt zu erörtern: Giebt es einen Grenzwert? fassen wir daher mit Kerry das Problem lieber psychologisch und fragen: Welche psychologischen Momente haben uns zur Bildung des Grenzbegriffes geführt? Kerry antwortet: Ebenso wie der Mathematiker von der Zahl ausgehend sich seinen Grenzbegriff construirt, so bilden wir auch auf vielen anderen Gebieten aus bereits vorhandenen Begriffsreihen durch fortwährendes Idealisiren Grenzbegriffe und setzen aus diesen wieder Grenzurteile zusammen.

§ 4. Physikalische Richtung.

Die Hinzuziehung der Physik ist für Lehrbücher der Infinitesimalrechnung von einem glücklichen Erfolge begleitet gewesen. Bücher vom Typus Autenheimer und Fuhrmann entlehnen der Natur Übungsaufgaben. Das Werk von Nernst und Schoenflies trägt die Elemente der analytischen Geometrie und der Infinitesimalrechnung unter Bezugnahme auf die Vorstellungen der physikalischen Chemie vor. Das holländische Buch von Lorentz hat einen ähnlichen Charakter, geht aber von rein physikalischen und mechanischen Problemen aus und führt mathematisch wesentlich weiter. An die Kreise der Techniker wendet sich das mathematisch ganz elementar gehaltene englische Lehrbuch von Perry, Calculus for engeneers. Cournot's Théorie des fonctions und der ausführliche Cours von Boussinesq sind wieder mehr mathematisch und stellen sich ein bedeutend höheres Ziel als die bisher genannten Autoren. Es gilt dies einmal vom Inhalt. Man findet z. B. bei Cournot kurz, bei Boussinesq recht eingehend die partiellen Differentialgleichungen der Physik behandelt. Sodann aber suchen beide — was die Arithmetisirung anlangt — den Leser nicht auf dem naiven Standpunkte zu er-

halten, sondern erläutern gerade unter Zuhülfenahme geometrischer und physikalischer Anschauungen diejenigen Punkte, bei welchen nach den Erfahrungen der Arithmetiker besondere Vorsicht geboten ist.

Inhaltsübersicht.

§ 2. Méray (Nouveau précis (1872) und Leçons nouvelles (1894) und später).

1. Grenzbegriff für ganzzahlige Veränderliche und Zahlbegriff. — 2. Es giebt nur Potenzreihen. — 3. Die Infinitesimalrechnung, ein Corollar der Functionentheorie.

§ 3. Cauchy und seine Schule.

1. Der Résumé von 1823 und die Applications à la géométrie von 1826. — 2. Cauchy's Schüler Moigno (1840—1844). Parallel Minding 1836 und Natani 1866. — 3. Die Compendien von Houël (1878) und Laurent (1885—1891).

§ 4. Die Weierstrafs'sche Schule.

1. In Deutschland: Harnack (1881), Lipschitz (1877) und Stolz (1893—1896). — 2. In Frankreich: Gilbert (1872), Tannery (1886) und Jordan (1893—1896). — 3. In Italien: Genocchi-Peano (1884), Pascal (1895) und Dini (1878).

§ 5. Peano.

1. Applicazioni geometriche (1887). — 2. Lezioni di analisi infinitesimale (1893).

IV. Capitel. Vermittelnde Richtungen.

§ 1. Die Cauchy'sche Schule.

1. Sturm (1857) und Serret (1868). — 2. Bertrand (1864—1870). — 3. Schloemilch (1853) und Kiepert-Stegemann (1892—1894).

§ 2. Die Eklektiker.

1. Hermite (1873) und Demartres (1892). — 2. Picard's Traité (1891—1896). — 3. Pasch's Vorlesungen über neuere Geometrie (1882) und Einleitung in die Differential- und Integralrechnung (1882). — 4. Kronecker's Vorlesungen über Integrale (1894).

§ 3. Philosophische Richtung.

1. Anknüpfend an Hegel: Snell (1846—1851), Ohm (1828—1852); Duhamel (1865) — 2. Skepsis bei P. du Bois-Reymond (1882).

§ 4. Physikalische Richtung.

1. Autenheimer (1887) und Fuhrmann (1888—1890). — 2. Nernst-Schoenflies (1895), Lorentz (1882) und Perry (1898). — 3. Cournot (1841). — 4. Boussinesq (1887—1890).

Januschke, Hans, k. k. Direktor der Staats-Oberrealschule in Teschen, das Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. Gebunden n. ℳ 12.—

Kirchhoff, Gustav, Vorlesungen über mathematische Physik. I. Band: Mechanik. 4. Aufl. herausg. von Prof. Dr. W. Wien. Mit 18 Figuren im Text. [X u. 464 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 13.—

Klein, F., und **A. Sommerfeld,** über die Theorie des Kreisels. 3 Hefte. gr. 8. geh.

I. Heft: Die kinemat. u. kinet. Grundlagen d. Theorie. [IV u. 196 S.] 1897. n. ℳ 5.60.
II. Heft: Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. [IV u. 315 S.] 1898. n. ℳ 10.—
III. Heft in Vorbereitung.

Krause, Dr. **Martin,** Professor an der Königl. Sächs. Technischen Hochschule zu Dresden, Theorie der doppeltperiodischen Functionen einer veränderlichen Grösse. (In 2 Bänden.) Zweiter Band. [XII u. 306 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 12.—

Kronecker's, Leopold, Werke. Herausgegeben auf Veranlassung der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften von K. Hensel. (In 4 Bänden.) Zweiter Band. [VIII u. 540 S.] gr. 4. 1897. geh. n. ℳ 36.—

Lie, Sophus, Geometrie der Berührungstransformationen. Dargestellt von Sophus Lie und Georg Scheffers. In 2 Bänden. I. Band. Mit Figuren im Text. [XII u. 694 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 24.—

v. Lilienthal, Dr. **R.,** a. o. Professor der Mathematik an der Kgl. Akademie zu Münster i. W., Grundlagen einer Krümmungslehre der Curvenscharen. [VII u. 114 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 5.—

Markoff, A. A., o. Professor an der Kaiserlichen Universität zu St. Petersburg, o. Mitglied der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg, Differenzenrechnung. Autorisierte deutsche Übersetzung von Theophil Friesendorff und Erich Prümm. Mit einem Vorworte von R. Mehmke, o. Prof. an der Kgl. Technischen Hochschule zu Stuttgart. [VI u. 194 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Minkowski, Dr. **Hermann,** o. Professor der Mathematik an der Universität Königsberg O./Pr., Geometrie der Zahlen. In zwei Lieferungen. Erste Lieferung. [240 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Netto, Dr. **Eugen,** o. ö. Professor der Mathematik an der Universität zu Giessen, Vorlesungen über Algebra. In zwei Bänden. gr. 8. geh.

I. Band: Mit Holzschnitten im Text. [X u. 388 S.] 1896. n. ℳ 12.—
II. Band, 1. Lieferung: Mit Holzschnitten im Text. [192 S.] 1898. n. ℳ 6.—
II. Band, 2. Lieferung: [Soll baldmöglichst folgen.]

Neumann, Dr. **C.,** Professor der Mathematik an der Universität zu Leipzig, die elektrischen Kräfte. Darlegung und genauere Betrachtung der von hervorragenden Physikern entwickelten mathematischen Theorieen. Zweiter Theil: Ueber die von Hermann von Helmholtz in seinen älteren und in seinen neueren Arbeiten angestellten Untersuchungen. [XXXVIII u. 462 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Plücker's, Julius, gesammelte wissenschaftliche Abhandlungen. Im Auftrag der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgeg. von A. Schoenflies u. Fr. Pockels. In 2 Bänden. gr. 8. 1895/96 geh. n. ℳ 50.—

I. Band: Mathematische Abhandlungen. Hrsg. von A. Schoenflies. Mit einem Bildniss Plückers und 73 in den Text gedruckten Figuren. [XXXVI u. 620 S.] 1895. n. ℳ 20.—
II. Band: Physikalische Abhandlungen. Hrsg. von Fr. Pockels. Mit 78 Textfiguren und 9 Tafeln. [XVIII u. 834 S.] 1896. n. ℳ 30.—

Routh, John Edward, Sc. D., Ll. D., F. R. S., etc.; Ehrenmitglied von Peterhouse, Cambridge; Mitglied des Senats der Universität London, die Dynamik der Systeme starrer Körper. In zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Adolf Schepp. Mit einem Vorwort von Felix Klein. 2 Bände. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 24.—

I. Band: Die Elemente. Mit 57 Fig. im Text. [XII u. 472 S.] 1897. n. ℳ 10.—
II. Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Fig. im Text. [X u. 544 S.] 1898. n. ℳ 14.—

Salmon, George, analytische Geometrie des Raumes. Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am Eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Zwei Theile. I. Theil: Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades. Vierte verbesserte Auflage. [XXIV u. 448 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 8.—

Schell, W., allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung. Zur Einführung in das Studium der Curventheorie. 2. erweiterte Auflage. [VIII u. 163 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 5.—

Schlesinger, Ludwig, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen. 2 Bde. gr. 8. geh. n. ℳ 50.—
I. Band: [XX u. 487 S.] 1895. n. ℳ 16.—
II. Band: I. Teil. Mit Figuren im Text. [XVIII u. 532 S.] 1897. n. ℳ 18.—
II. Band: II. Teil. Mit Figuren im Text. [XIV u. 446 S.] 1898. n. ℳ 16.—

Schubert, Dr. **Herm.,** fünfstellige Tafeln und Gegentafeln für logarithmisches und trigonometrisches Rechnen. [VI u. 157 S.] gr. 8. 1897. geb. n. ℳ. 4.—

Serret, J.-A., Lehrbuch der Differential- u. Integral-Rechnung. Mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von Axel Harnack. Zweite, durchgesehene Auflage von Dr. G. Bohlmann, Privatdocent an der Universität zu Göttingen. In zwei Bänden. I. Band: Differentialrechnung. Mit 85 in den Text gedruckten Figuren. [XVI u. 570 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ. 10.—

Stahl, Dr. **Hermann,** Professor der Mathematik in Tübingen, Theorie der Abel'schen Functionen. Mit Figuren im Text. [X u. 354 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 12.—

Staude, Dr. **Otto,** ordentlicher Professor der Mathematik an der Universität Rostock, die Focaleigenschaften der Flächen zweiter Ordnung. Ein neues Kapitel zu den Lehrbüchern der analytischen Geometrie des Raumes. Mit 49 Figuren im Text. [VIII u. 185 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 7.—

Steiner's, Jacob, Vorlesungen über synthetische Geometrie. 2 Tle. II. Teil: Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projektive Eigenschaften. Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearb. von Heinrich Schröter. 3. Aufl. von Rudolf Sturm. Mit 103 Figuren im Text. [XVII u. 538 S.] gr. 8. 1898. geh. n. ℳ 14.—

Stolz, Dr. **Otto,** ord. Professor an der Universität zu Innsbruck, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. In 2 Theilen. II. Theil: Complexe Veränderliche und Functionen. Mit 33 Figuren im Text. [IX u. 338 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 8.—

Sturm, Dr. **Rudolf,** ord. Professor an der Königl. Universität zu Breslau, die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung. In 3 Theilen. III. (Schluss-)Theil: Die Strahlencomplexe zweiten Grades. [XXIV u. 518 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 18.—

Volkmann, P., ord. Professor an der Universität Königsberg i. Pr., erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. [XII u. 181 S.] gr. 8. 1896. geh. n. ℳ 6.—

Wüllner, Adolph, Lehrbuch der Experimentalphysik. 4 Bände. III. Band: Die Lehre vom Magnetismus und von der Elektricität mit einer Einleitung: Grundzüge der Lehre vom Potential. Fünfte, vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit 341 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren. [XV u. 1415 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 18.— [Band IV: Die Lehre vom Licht in Vorbereitung.]